18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

KÖN. PR. AKADEMIE GEMEINNÜTZIGER WISSENSCHAFTEN

Vier und vierzigster Band.

In vier Heften.

Mit vier lithographirten Tafeln.

Berlin, 1852.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des vier und vierzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
2.	Zweiter Nachtrag zu der Theorie der analytischen Facultäten (Bd. 35 und 38). Von Herrn Dr. *Öttinger,* Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Breisgau.	I.	26
11.	Schlufs dieser Abhandlung.	II.	147
3.	Vereinfachung des Beweises von *Cauchy,* dafs jede Gleichung *n*ten Grades wenigstens *eine* Wurzel hat. Von Herrn *J. Sufsmann,* Assistent im Königlichen Gewerbe-Institut zu Berlin.	I.	57
8.	Aufgabe, nebst Auflösung. Vom Herausgeber.	I.	88
10.	Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen. Von Herrn Dr. *E. E. Kummer,* Professor an der Universität zu Breslau. . . .	II.	93
14.	Auszug eines Schreibens des Herrn Dr. *Eisenstein* in Berlin an den Herrn Prof. *Richelot* in Königsberg, und eines Antwortschreibens des Herrn Prof. *Richelot* an den Herrn Dr. *Eisenstein.*	III.	261
17.	Einige Bemerkungen zum *Euler*schen Additionstheorem der elliptischen Integrale. Von Herrn Dr. *Richelot,* Prof. ord. an der Univ. zu Königsberg in Pr.	IV.	277
19.	Zwei Zahlen-Aufgaben; die erste mit der Auflösung, die zweite noch aufzulösen. Vom Herausgeber.	IV.	317
21.	Recherches sur les coefficients des facultés analytiques. Par Mr. le Dr. *O. Schlömilch,* Prof. d'Analyse à l'école royale polytechnique de Dresde.	IV.	344
24.	Aufgabe.	IV.	376

2. Geometrie.

1.	Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien. Von Herrn *H. Grafsmann,* Oberlehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.	I.	1
9.	Die Brennlinie für den elliptischen Quadranten, wenn die einfallenden Strahlen vom Mittelpunct der Ellipse ausgehen und jeder zurückgeworfene Strahl denselben Winkel mit der zugehörigen Normale bildet, wie der entsprechende einfallende. Von Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.	I.	90
13.	Über die Sätze vom Parallelogramm der Kräfte und vom Hebel; so wie vom Parallelepipedum der Kräfte. Vom Herausgeber.	III.	220

Nr. der Abhandlung.		Heft. Seite.
15.	Kurze Ableitung des *Legendre*schen Satzes über die Reduction der Berechnung eines sphärischen auf die eines ebenen Dreiecks. Von Herrn *A. Winkler,* Ingenieur-Practicanten zu Carlsruhe.	III. 273
16.	Lehrsätze. Von Herrn Professor *J. Steiner* zu Berlin.	III. 275
18.	Über Kreiscoordinaten. Von Herrn Dr. *W. Stammer* aus Luxemburg, Candidaten des höhern Schulamts.	IV. 295
20.	Über symmetrische Figuren. Von dem Herrn Prof. *Möbius* zu Leipzig. (Aus den Berichten der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig von 1851.)	IV. 335
23.	Geometrisches. Von Herrn *W. Winkhaus,* cand. math. zu Halver bei Arnsberg.	IV. 375

3. Mechanik.

4.	Eine neue Lösung des Problems der Rotation eines festen Körpers um einen Punct. Von Herrn Dr. *F. J. Richelot,* ordentl. Prof. der Math. an der Universität zu Königsberg. (Auszug einer in der *Ferd. Dümmler*'schen Buchhandlung zu Berlin 1851 erschienenen Schrift.)	I. 60
12.	Exposé de diverses remarques et reflexions sur les moments et d'autres sujets de statique. Par Mr. *Steichen,* professeur à l'école militaire de Bruxelles.	III. 181
13.	Über die Sätze vom Parallelogramm der Kräfte und vom Hebel; so wie vom Parallelepipedum der Kräfte. Vom Herausgeber.	III. 220

II. Angewandte Mathematik.

5.	Über einige Grundformeln der Geodäsie. Von Herrn *Ferd. Minding,* Prof. der Math. an der Universität zu Dorpat. (Nach dem „Bulletin phys. mathém." T. VIII. No. 6.)	I. 66
6.	Über den Umlauf des Springers auf dem Schachbrette (den sogenannten Rösselsprung). Von Demselben. (Aus dem „Bulletin de la classe phys. math. de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg.")	I. 73
7.	Über die Wirkung des durch eine Drathspirale gehenden elektrischen Stroms auf eine in der Spirale befindliche weiche Eisenmasse. Von Herrn Dr. *Hädenkamp* zu Hamm.	I. 83
22.	An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism. By the late *George Green,* fellow of Gonville- and Cains-Colleges at Cambridge. (Vide tome 39 p. 13 of this Journal.)	IV. 356

1.

Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien.

(Von Herrn *H. Grafsmann*, Oberlehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.)

Über die Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch gerade Linien habe ich in diesem Journal (Band 42, S. 190) folgenden Satz aufgestellt.

„Wenn der Punct x Anfangspunct von vier offenen Figuren ist, von denen zwei und zwei ein gemeinschaftliches End-Element haben, während die beiden gemeinschaftlichen Elemente zugleich Grenz-Elemente einer fünften offenen Figur sind: so beschreibt x, wenn die sämmtlichen Ecken der offenen Figuren in festen ***Geraden*** und die sämmtlichen Seiten derselben um feste ***Puncte*** sich bewegen, eine ***Curve vierter Ordnung***."

Ich erinnere hier daran, dafs ich dasjenige Element (Punct oder Linie), mit welchem eine offene Figur beginnt, oder schliefst, ein Grenz-Element derselben nenne. Zur Erläuterung möge (Taf. I. Fig. 7) dienen, in welcher der Punct y End-Element zweier von x ausgehenden offenen Figuren und die Linie Z End-Element der beiden andern ist, während die von y zu Z übergehende offene Figur eine Seite und eine Ecke enthält. Es kann auch insbesondere der Fall eintreten, dafs eine oder die andere offene Figur nur aus *einem* Punct und *einer* Linie besteht, also gar keine Seiten und Ecken hat, sondern von dem Anfangs-Element sogleich in das End-Element übertritt. Dieser Fall tritt z. B. in Fig. 6 ein, wo von den vier von x ausgehenden offenen Figuren die beiden mittleren nur aus dem Puncte x und einer Geraden y oder Z bestehen.

Zu den verschiedenen Specialsätzen, in welche der angeführte Satz zerfällt, gelangt man leicht, wenn man bedenkt, dafs die beiden Übergangs-Elemente (so nenne ich die beiden Grenz-Elemente der vermittelnden offenen Figur, welche in dem Satze als die fünfte offene Figur bezeichnet ist) entweder Puncte sein können, wie y und z in Fig. 1, oder Gerade, wie Y und Z in Fig. 2, oder das eine ein Punct, das andere eine Gerade, wie y und Z in Fig. 3, und dafs, wenn ein Übergangs-Element eine Gerade ist, von den beiden offenen Figuren, die von x aus nach diesem Übergangs-Element hingehen. die eine blofs aus dem Puncte x und diesem Übergangs-Elemente bestehen

kann; wie z. B. in (Fig. 4), wo das Übergangs-Element **Z** von x ausgeht. Hierdurch zerfällt der allgemeine Satz in sechs Specialsätze, welche ich hier kurz zusammenstellen will.

1. Wenn man in einem Polygon (Fig. 1) von einer Ecke x zwei Diagonalen zieht und sich das Polygon (dessen Seiten und Winkel hier überall als variabel angenommen werden) so bewegt, dafs alle Ecken, aufser den drei von der Diagonale getroffenen, in geraden Linien fortschreiten, und alle Seiten, wie auch die Diagonalen, um feste Puncte sich drehen, so beschreibt x eine Curve vierter Ordnung.

2. Dasselbe geschieht, wenn man (Fig. 2) statt der beiden Diagonalen, von x zwei Gerade nach zwei Seiten des Polygons zieht und das Polygon sich so bewegen läfst, dafs diese Geraden und alle Seiten, aufser jenen zweien, um feste Puncte sich drehen, und sowohl die Endpuncte jener beiden Geraden, als auch alle Ecken des Polygons, aufser x, in geraden Linien fortschreiten.

3. Ferner geschieht auch noch dasselbe, wenn man (Fig. 3) nur statt *einer* Diagonale eine Gerade nach einer Seite des Polygons zieht.

4. Wenn zwei Polygone (Fig. 4) eine gemeinschaftliche Ecke x haben, während die Polygonwinkel an dieser Ecke einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und man in einem dieser Polygone von x eine Diagonale zieht, so beschreibt x, wenn sich alle Ecken, aufser den von der Diagonale getroffenen, in geraden Linien bewegen, und alle Seiten beider Polygone, aufser den ineinander liegenden, um feste Puncte sich drehen, eine Curve vierter Ordnung.

5. Das Gleiche geschieht auch (Fig. 5), wenn man von x, statt der Diagonale, die um einen festen Punct rotirt, eine Gerade zieht, deren Durchschnittspunct mit einer Seite des Polygons sich in einer festen Geraden bewegt.

6. Wenn drei Polygone (Fig. 6) eine gemeinschaftliche Ecke x haben und ihre an dieser Ecke befindlichen Polygonwinkel stetig an einander liegen, und sich dann die Polygone so bewegen, dafs alle Ecken, aufser x, in festen Geraden fortschreiten, und alle Seiten, aufser denjenigen, in welchen jene stetigen Winkel aneinander grenzen, um feste Puncte sich drehen, so beschreibt x eine Curve vierter Ordnung.

7. Alle vorstehenden Sätze gelten auch noch, wenn man (Fig. 7) statt der von x gezogenen Geraden, gebrochene Linien setzt, deren Seiten um feste Puncte und deren Ecken in festen Geraden sich bewegen.

Da der allgemeine, an die Spitze gestellte Satz seinerseits wieder nur ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes ist, den ich in meiner Ausdehnungslehre (S. 244 ff.) und im 31. Bande dieses Journals ausführlich bewiesen habe, so darf ich mich hier des Beweises entheben, zumal derselbe nicht die mindesten Schwierigkeiten hat.

Ungleich schwieriger ist der Nachweis, dafs sich, umgekehrt, jede beliebige Curve vierter Ordnung, auf jede der sechs Arten, welche in den vorhergehenden Specialsätzen dargestellt sind, erzeugen läfst. Ich werde hier die einfachsten Erzeugungs-Arten, durch welche jede beliebige Curve vierter Ordnung hervorgebracht werden kann, in einem Satze zusammenstellen und dann die Beweise ihrer Allgemeinheit liefern:

„Jede Curve vierter Ordnung läfst sich erzeugen, als Ort:

1) Einer Ecke (x) eines ***Sechsecks*** (Fig. 1), in welchem von dieser Ecke (x) zwei Diagonalen nach zwei einander benachbarten Ecken gezogen sind, und in welchem diese Diagonalen und alle Seiten durch feste Puncte gehen, während alle von den Diagonalen nicht getroffenen Ecken in festen Geraden liegen.

2) Einer Ecke (x) eines ***Fünfecks*** (Fig. 2), in welchem von dieser Ecke (x) nach zwei Puncten (p_1 und p_2), die in zwei aneinanderstehenden Seiten liegen, zwei Gerade gezogen sind, und in welchem alle übrigen Seiten, so wie diese beiden Geraden (xp_1 und xp_2), durch feste Puncte gehen, während die Puncte (p_1 und p_2) und alle Ecken aufser x, in festen Geraden liegen.

3) Der Spitze (x) eines ***Fünfecks*** (Fig. 3), in welchem von der Spitze nach einem Puncte (p_1) der Grundseite und nach einer daran liegenden Ecke zwei Gerade gezogen sind, und in welchem diese Geraden und alle Seiten, aufser der Grundseite, durch feste Puncte gehen, während jener Punct (p_1) und alle von der Diagonale nicht getroffenen Ecken in festen Geraden liegen.

4) Der gemeinschaftlichen Ecke (x) eines ***Vierecks*** und eines stetig daran liegenden Dreiecks (Fig. 4), wenn die von dieser Ecke gezogene Diagonale des Vierecks und alle Seiten beider Figuren, mit Ausnahme der aufeinander fallenden, durch feste Puncte gehen und alle von der Diagonale nicht getroffenen Ecken in festen Geraden liegen.

5) Der gemeinschaftlichen Ecke (x) eines ***Dreiecks*** und eines stetig daran liegenden ***Vierecks*** (Fig. 5), in welchem von dieser Ecke x nach

einem Puncte (p_1) der an die gemeinschaftliche Seite sich anschliefsenden Seite eine Gerade gezogen wird, während diese Gerade und alle Seiten, aufser der gemeinschaftlichen, durch feste Puncte gehen und jener Punct (p_1), so wie alle Ecken aufser x, in festen Geraden liegen.

6) Der gemeinschaftlichen Spitze x dreier stetig an einander liegender *Dreiecke* (Fig. 6), deren übrige Ecken in festen Geraden liegen und deren Grundseiten und äufsersten Schenkel durch feste Puncte gehen."

Ehe ich zu den Beweisen dieser Sätze übergehe, will ich der Übersicht wegen diejenigen Formeln voranstellen, auf welche ich dabei zurückgehen werde. Überall werde ich unter den kleinen Buchstaben Puncte, unter den grofsen gerade Linien verstehen. Wie in den frühern Aufsätzen soll:

$$(1.) \quad ab$$

die durch a und b gehende Gerade,

$$(2.) \quad \boldsymbol{AB}$$

den Durchschnitt von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ bezeichnen. Ferner soll

$$(3.) \quad ab = 0, \quad \text{oder} \quad a \equiv b$$

ausdrücken, dafs a und b zusammenfallen;

$$(4.) \quad \boldsymbol{AB} = 0, \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B},$$

dafs $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zusammenfallen,

$$(5.) \quad \boldsymbol{Ab} = 0 \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{bA} = 0,$$

dafs b in $\boldsymbol{A}$ fällt.

Nun habe ich gezeigt, dafs die Gleichung

$$(6.) \quad \boldsymbol{A}_x b_x = 0,$$

wenn $\boldsymbol{A}x_x$ und b_x Producte in dem Sinne der Formeln (6. und 2.) sind, welche den Punct x zusammen μmal als Factor enthalten, die Gleichung einer von x beschriebenen Curve μter Ordnung ist. Diesen Satz habe ich den erweiterten *Pascal*schen genannt. Der *Pascal*sche Satz über das *mystische Sechseck* läfst sich, wenn *xabcde* dieses Sechseck ist, durch die Formel

$$(7.) \quad (\boldsymbol{xa}.\boldsymbol{cd})(\boldsymbol{ab}.\boldsymbol{de})(\boldsymbol{bc}.\boldsymbol{ex}) = 0$$

ausdrücken, da dieselbe nur aussagt, dafs die drei Durchschnittspuncte der gegenüberliegenden Seiten jenes Sechsecks in gerader Linie liegen. Setzt man hier $\boldsymbol{cd} \equiv \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{ab}.\boldsymbol{de} \equiv \boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{bc} \equiv \boldsymbol{D}$, so erhält man folgenden Satz:

„Die Gleichung

$$(8.) \quad \boldsymbol{xaBc_1Dex} = 0$$

ist die Gleichung eines Kegelschnitts, der durch die 5 Puncte $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{BD}$, $\boldsymbol{ac_1D}$, $\boldsymbol{ec_1B}$ geht."

Noch füge ich folgende einfache Umgestaltungsformeln hinzu:
Die Gleichung

$$(9.)\quad \left\{\begin{array}{c} axBcx = 0 \\ \text{drückt aus, dafs entweder} \\ acx = 0, \quad \text{oder} \quad Bx = 0 \end{array}\right.$$

ist. Denn die Gleichung drückt aus, dafs der Punct axB mit c und x in gerader Linie liegt. Dies ist aber erstens der Fall, wenn x in B liegt, indem $axB \equiv x$ wird. Liegt hingegen x nicht in B, so ist axB von x verschieden, und die Gleichung sagt dann aus, dafs c in der durch die Puncte axB und x gelegten Geraden, d. h. in der Geraden ax liegen mufs. Es mufs also nothwendig entweder xB, oder acx, Null sein.

Ferner die Gleichung

$$(10.)\quad \left\{\begin{array}{c} abC = 0 \\ \text{ist, wenn } ab \text{ nicht Null ist, gleichbedeutend mit dem Gleichungspaare} \\ aC = 0 \quad \text{und} \quad bC = 0. \end{array}\right.$$

Denn $abC = 0$ drückt dann aus, dafs die Gerade ab mit C zusammenfällt, d. h., dafs a und b in C fallen. Eben so ist die Gleichung

$$(11.)\quad \left\{\begin{array}{c} ABc = 0, \\ \text{wenn } AB \text{ nicht Null ist, gleichbedeutend mit dem Gleichungspaare} \\ Ac = 0 \quad \text{und} \quad Bc = 0. \end{array}\right.$$

Endlich ergiebt sich leicht der Satz:

Wenn ein fortschreitendes *planimetrisches* Product (d. h. ein Product im Sinne der Formeln (1 bis 5.)), welches mit zwei Punct- oder Linear-Factoren beginnt und schliefst, während sonst überall Punct und Linie wechseln, Null ist: so bleibt es auch Null, wenn man, von einem beliebigen Factor an, die ganze Factorenreihe umkehrt und in kleinere schliefst, z. B. wenn

$$(12.)\quad \left\{\begin{array}{c} abCdEfg = 0 \\ \text{ist, so ist auch} \\ a(gfEdCb) = 0. \end{array}\right.$$

Denn die erste Gleichung drückt aus, dafs die drei Puncte $abCdE$, f, g in gerader Linie liegen. Dasselbe drückt die Gleichung $abCdE(fg) = 0$ aus. Vermöge dieser Gleichung gehen wieder die drei Geraden $abCd$, E, fg durch einen und denselben Punct, und das Nemliche drückt die Gleichung $abCd(fgE)$ aus, u. s. w.

Obgleich sich noch manche Formel aufstellen liefse, die für den gegenwärtigen Zweck von Nutzen sein würde, wird man doch mit den vorstehenden Formeln ausreichen.

Indem ich nun zum Beweise des oben aufgestellten sechsfachen Satzes übergehe, bemerke ich noch, dafs ich mich nicht damit begnügen werde, blofs im Allgemeinen die Erzeugbarkeit der Curven vierter Ordnung auf die dort angegebenen 6 Arten nachzuweisen, sondern dafs ich überall bis zur geometrischen Construction derjenigen Puncte und geraden Linien fortschreiten werde, in welchen sich die Geraden und Puncte der veränderlichen Figur bewegen müssen, damit der Punct x eine gegebene Curve vierter Ordnung erzeuge.

Ich zerlege zu dem Ende den Beweis in eine Reihe von Aufgaben, die ich in den folgenden Paragraphen lösen werde und mit deren Lösung der Beweis des obigen Satzes, nebst der geometrischen Construction aller Constanten, vollendet ist.

§. 1.

Die sechs in dem Satze beschriebenen Arten der Bewegung in Formeln darzustellen.

Aus den Formeln (1, 2 und 5.) ergiebt sich sogleich, dafs die in dem obigen Satze beschriebenen Bewegungen, wie sie in den Figuren (1 bis 6) bildlich ausgedrückt sind, beziehlich durch folgende 6 Gleichungen dargestellt werden:

$$(1.)\quad xaBb_1(xb)d_1(xe)f_1Gg_1Fkx = 0,$$
$$(2.)\quad xaB(xbC)D(xeE)Fg_1Gkx = 0,$$
$$(3.)\quad xaBb_1(xb)(xeE)Fg_1Gkx = 0,$$
$$(4.)\quad xaBb_1(xb)d_1Exg_1Fg_1Gkx = 0,$$
$$(5.)\quad xaBb_1xD(xeE)Fg_1Gkx = 0,$$
$$(6.)\quad xaBb_1xDc_1Exg_1Fg_1Gkx = 0.$$

§. 2.

Die sämmtlichen Puncte zu finden, welche, statt x gesetzt, ein Product, in welchem nur die durch die Formel (1. und 2.) dargestellten Multiplications-Arten vorkommen, gleich Null machen.

1. Wenn ein Product nur die durch die Formel (1. und 2.) dargestellten Multiplications-Arten enthält, so wird es als Product, entweder zweier gerader Linien, oder zweier Puncte sich zeigen. Es wird nur nöthig sein, einen dieser Fälle, etwa den zweiten, zu betrachten, da der andere durch Reciprocität aus ihm hervorgeht. Man hat dann das Product zweier Puncte. Der eine derselben, den wir als ersten Factor setzen wollen, sei wieder aus zwei Factoren

zusammengesetzt, so werden diese Factoren Linien sein und man erhält also die Form ABc. Man nehme an, dafs A, B, c den Punct x beziehlich αmal, βmal, γmal als Factor enthalte. Es seien bereits die Puncte gefunden, welche, statt x gesetzt, ABc gleich Null machen. Dann sind nur noch die Puncte zu suchen, welche ABc gleich Null machen, ohne AB gleich Null zu machen. Ist nun aber AB nicht Null, so ist nach Formel (11.) die Gleichung

$$ABc = 0$$

gleichbedeutend mit dem Gleichungspaare

$$Ac = 0 \quad \text{und} \quad Bc = 0,$$

von welchen die erstere eine Curve $(\alpha+\gamma)$ter Ordnung, die letztere eine Curve $(\beta+\gamma)$ter Ordnung darstellt. Ihre Durchschnittspuncte sind die gesuchten Puncte. Also:

„Wenn A, B, c Productfunctionen des Punctes x sind (die ersteren beiden gerade Linien, die letzte ein Punct), so findet man diejenigen Puncte x, für welche

$$(a.) \quad ABc = 0 \quad \text{und} \quad AB \text{ ungleich } 0$$

ist, als die Durchschnitte der beiden Curven, deren Gleichungen

$$(b.) \quad Ac = 0 \quad \text{und} \quad Bc = 0$$

sind, und von denen sich die erstere um alle Puncte schlingt, welche A gleich Null machen, die letztere um die, welche B gleich Null machen."

Auf diese Weise findet man also, indem man schrittweise die Zusammensetzung des Products verfolgt, und bedenkt, dafs zuerst xa nur für $x \equiv a$, Null ist, alle die Puncte, welche das Product gleich Null machen, und die Aufgabe ist gelöset (Vergl. Band 42. S. 201). Doch läfst die Methode in einigen Fällen eine Vereinfachung zu.

Nämlich erstens, wenn c und B constant sind, so enthält die Gleichung $Bc = 0$ den Punct x gar nicht. Wird also diese Gleichung nicht erfüllt, d. h. liegt c nicht in B, so giebt es keinen Punct, welcher, statt x gesetzt, ABc gleich Null macht, ohne AB gleich Null zu machen. Liegt hingegen c in B, so folgt, dafs jeder Punct x, welcher der Gleichung $Ac = 0$ genügt, d. h. jeder Punct der durch diese Gleichung dargestellten Curve, auch ABc gleich Null mache. Wir wollen in diesem Falle der Kürze wegen sagen, es sei dies Product ABc durch jene Curve *theilbar*. Also:

Erstlich. „Wenn das Product zwei aufeinanderfolgende constante Factoren enthält, von denen der Punctfactor in dem Linienfactor liegt, so ist das Product durch eine Curve *theilbar*. Folgen hingegen zwei constante

Factoren auf einander, die nicht diese Lage haben, so bedingt das Hinzutreten des zweiten dieser Factoren *keine* neuen Puncte, die, statt x gesetzt, das Product gleich Null machen."

Ist *zweitens* c wieder ein Product $\equiv CD$ und sind B und D constant, so hat man, als diejenigen Puncte, für welche

$$(c.) \quad AB(CD) = 0 \quad \text{und} \quad AB \text{ ungleich } 0$$

ist, die Durchschnittspuncte der Curven

$$(d.) \quad ACD = 0 \quad \text{und} \quad BCD = 0.$$

Fallen nun zuerst die constanten Linien B und D zusammen, so wird die zweite der Gleichungen BCD schon allgemein befriedigt. Es ist also dann $AB(CD) = 0$ gleichbedeutend mit der Gleichung $ACD = 0$. Alle Puncte x der durch die letztere Gleichung dargestellten Curve machen daher das Product $AB(CD)$ gleich Null; d. h. dieselbe ist durch jene Curve *theilbar*. Fällt aber B nicht mit D zusammen, und ist auch CD ungleich Null, so drücken BD sowohl, als CD, einen *Punct* aus, und zwar, vermöge der zweiten Gleichung in $(d.)$, *denselben* Punct, d. h. es ist $BD \equiv CD$. Man kann also in der ersten Gleichung in $(d.)$ BD statt CD setzen und erhält somit

$$ABD = 0 \quad \text{und} \quad CBD = 0$$

als diejenigen Gleichungen, welche die Gleichung $(d.)$ ersetzen. Von ihnen stellt die erste eine Curve αten, die letzte eine Curve γten Grades dar. Somit sind die Puncte x, welche das Product $AB(CD)$ gleich Null machen, ohne AB oder CD gleich Null zu machen, die Durchschnittspuncte dieser beiden Curven vom αten und γten Grade. Also:

2. „Wenn das (mittels der Multiplications-Arten (1. und 2.)) zusammengesetzte Product P aus zwei Factoren besteht, deren jeder ein Product aus einem variabeln und einem constanten Factor ist, so ist P durch eine Curve theilbar, so oft die beiden constanten Factoren zusammenfallen. Fallen sie nicht zusammen, so erhält man die neu hinzutretenden Puncte, welche P gleich Null machen, als Resultat der Elimination aus zwei Gleichungen, die sich ergeben, wenn man das Product der beiden constanten Factoren, in einem jeden der beiden variablen Factoren, einzeln gleich Null setzt."

Endlich mögen noch zwei besondere Fälle betrachtet werden, welche in den Gleichungen (§. 1.) vorkommen, indem man nämlich die Puncte x sucht, welche $xaBb_1(xb)$, und diejenigen, welche $xaB(xbC)$ gleich Null machen. Ich nehme an, dafs von den vorher erwähnten Fällen, in denen diese Producte

durch Curven theilbar werden, keiner eintritt, schliefse also aus, dafs a oder b_1 in $\boldsymbol{B}$, b in $\boldsymbol{C}$ falle und dafs b_1 mit b, oder $\boldsymbol{B}$ mit $\boldsymbol{C}$ identisch werde. Ist dies ausgeschlossen, so folgt, dafs die beiden Factoren $xa\boldsymbol{B}b_1$ und xb des ersten Products nur dann verschwinden, wenn x in a oder in b fällt, und dafs aufserdem das ganze Product Null wird, wenn $xa\boldsymbol{B}b_1b$ und xbb_1 zugleich Null werden; d. h. wenn x in der Geraden $bb_1\boldsymbol{B}a$ und zugleich in der Geraden bb_1 liegt. Liegen nun a, b, b_1 in gerader Linie, so fallen diese beiden Geraden zusammen: also, wenn x in einer und derselben Geraden liegt, so liegt es auch in der andern, und macht also das Product $xa\boldsymbol{B}b_1(x\boldsymbol{B})$ gleich Null; d. h. dies Product ist dann durch die Curve (gerade Linie) $xbb_1 = 0$ *theilbar*. Liegen aber a, b, b_1 nicht in gerader Linie, so liegt x im Durchschnitt der beiden Geraden $bb_1\boldsymbol{B}a$ und bb_1. Dieser Durchschnitt ist $bb_1\boldsymbol{B}$. Also:

3. „Das Product $xa\boldsymbol{B}b_1(xb)$ wird durch eine gerade Linie *theilbar*, wenn a und b_1 in $\boldsymbol{B}$ fallen oder a, b, b_1 in gerader Linie liegen. Findet keiner dieser drei Fälle Statt, so wird das Product nur durch die drei Puncte $x \equiv a$, b, $bb_1\boldsymbol{B}$ gleich Null gemacht."

Das Product $xa\boldsymbol{B}(xb\boldsymbol{C})$ wird unter den obigen Voraussetzungen nur gleich Null, wenn $x \equiv a$ oder $\equiv b$, oder zugleich $xa(\boldsymbol{BC})$ und $xb(\boldsymbol{BC})$ Null sind, d. h. wenn x zugleich in der Geraden $\boldsymbol{BC}a$ und in den Geraden $\boldsymbol{BC}b$ liegt. Fallen diese beiden Geraden zusammen, d. h. liegen die drei Puncte a, b, $\boldsymbol{BC}$ in einer Geraden, so wird das Product durch diese Gerade *theilbar*. Liegen sie nicht in einer Geraden, so ist x der Durchschnitt der beiden Geraden $\boldsymbol{BC}a$ und $\boldsymbol{BC}b$, d. h. es ist $x \equiv \boldsymbol{BC}$. Also:

4. „Das Product $xa\boldsymbol{B}(xb\boldsymbol{C})$ wird durch eine gerade Linie *theilbar*, wenn a in $\boldsymbol{B}$, oder b in $\boldsymbol{C}$ liegt, oder wenn die drei Geraden ab, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ durch einen und denselben Punct gehen. Findet keiner dieser vier Fälle Statt, so wird das Product nur durch die drei Puncte $x \equiv a$, b und $\boldsymbol{BC}$ gleich Null gemacht."

§. 3.

Diejenigen Puncte x zu finden, welche die Producte in (§. 1.), bis zum Factor F oder f_1 hin, gleich Null machen.

Es wird nur nöthig sein, diese Aufgabe an dem ersten jener Producte ausführlich zu lösen, worauf man dann bei den fünf übrigen die Ausdrücke der

Puncte, welche sie gleich Null machen, unmittelbar aus dem betreffenden Producte selbst wird ablesen können; so dafs eine Zusammenstellung dieser Ausdrücke genügen wird. Wir schliefsen dabei ein für allemal die in (§. 2.) erwähnten Fälle aus, in denen das Product durch eine Curve *theilbar* wird, da diese Fälle nur die Betrachtung verwirren würden, ohne für die Allgemeinheit förderlich zu sein. Welche Puncte x machen also zuerst das Product $xaBb_1(xb)d_1(xe)f_1$ gleich Null?

Es sind dies nach (§. 2.) zuerst die drei Puncte a, b, bb_1B; ferner der Punct e, und aufserdem die Puncte, für welche die Gleichungspaare

$$\begin{cases} xaBb_1d_1 = 0, \\ xbd_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} xaBb_1(xb)d_1e = 0, \\ xd_1e = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} xaBb_1(xb)d_1f_1 = 0 \\ xef_1 = 0 \end{cases}$$

gelten. Nämlich das erste Paar dieser Gleichungen bestimmt nach dem ersten Satze in (§. 2.) den Punct, welcher das Product $xaBb_1(xb)d_1$ gleich Null macht, ohne $xaBb_1(xb)$ gleich Null zu machen; das letzte Paar bestimmt nach demselben Satze diejenigen zwei Puncte, welche das ganze Product, bis f_1 hin, gleich Null machen, ohne es bis zum Factor (xe) hin gleich Null zu machen. Das zweite Paar der Gleichungen bestimmt nach dem zweiten Satz in (§. 2.) diejenigen Puncte, welche das Product $xaBb_1(xb)d_1(xe)$ gleich Null machen, ohne $xaBb_1(xb)d_1$ oder xe gleich Null zu machen; xe endlich wird nur Null für $x \equiv e$. Das erste Gleichungspaar können wir nach der Formel (12.) auch wie folgt schreiben:

$$d_1b_1Bax = 0 \quad \text{und} \quad d_1bx = 0.$$

Sie drücken aus, dafs x in den beiden Geraden d_1b_1Ba und d_1b, also in ihrem Durchschnitt liegt, d. h. sie liefern den Punct

$x \equiv d_1b_1Ba(d_1b)$, den wir d nennen wollen, während wir den Punct bb_1B mit c bezeichnen.

In dem zweiten Gleichungspaare drückt die untere Gleichung Dasselbe aus, nemlich dafs x in d_1e liegt; die obere, dafs die drei Geraden $xaBb_1$, xb, d_1e durch einen und denselben Punct gehen. Da aber x in d_1e liegt, so schneiden sich die beiden letzteren Geraden in x, also mufs die erste jener drei Geraden auch durch x gehen, d. h. es ist

$$xaBb_1x = 0.$$

Diese Gleichung drückt nach Formel (9.) aus, dafs x entweder in ab_1 oder

in B liegt. Da aber x zugleich in $d_1 e$ liegt, so giebt das zweite Gleichungspaar die Puncte

$$x \equiv d_1 e B \quad \text{und} \quad x \equiv d_1 e (a b_1).$$

Endlich das letzte Gleichungspaar drückt aus, dafs x in dem Durchschnitt der Geraden $e f_1$ und des Kegelschnitts $x a B b_1 (x b) d_1 f = 0$ liegt. Dieser Kegelschnitt geht nun offenbar durch die vier Puncte, welche $x a B b_1 (x b) d_1$ gleich Null machen, d. h. durch die Puncte a, b, c, d. Um noch einen fünften Punct zu finden, schreibe man die Gleichung dieses Kegelschnitts, welche ausdrückt, dafs die drei Geraden $x a B b_1$, $x b$, $d_1 f_1$ durch einen und denselben Punct gehen, in der Form $x a B b_1 (d_1 f_1) b x = 0$. Dann folgt aus dem Satze (No. 8), dafs der Kegelschnitt auch durch den Punct $d_1 f_1 B$ geht, den wir mit r bezeichnen wollen. Demnach drückt das dritte Gleichungspaar aus, dafs x in den Durchschnitten der Geraden $e f_1$ und des durch die Puncte a, b, c, d, r gelegten Kegelschnitts geht. Sind h und i diese Durchschnittspuncte, so soll dies symbolisch durch

$$(h, i) \equiv e f_1 . [a, b, c, d, r]$$

ausgedrückt werden.

Also sind die Puncte x, für welche

$$x a B b_1 (x b) d_1 (x e) f_1 = 0$$

(1.) wird, erstens die sieben Puncte

$$a, \quad b, \quad b b_1 B, \quad d_1 b_1 B a (b d_1), \quad e, \quad e d_1 B, \quad e d_1 (a b_1),$$

die ich nach der Reihe mit

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad g$$

bezeichnen will, und aufserdem die beiden Puncte

$$(h, i) \equiv e f_1 . [a, b, c, d, r], \quad \text{wo} \quad r \equiv d_1 f_1 B$$

ist.

Eben so findet sich

$$x a B (x b C) D (x e E) F = 0$$

(2.) für die Puncte

$$a, \quad b, \quad BC, \quad BDa(DCb), \quad e,$$

die ich mit

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e$$

bezeichne, und aufserdem für die vier Puncte

$$(f, g) \equiv DEe . [a, b, c, d, r], \quad \text{wo} \quad r \equiv DEbB,$$
$$(h, i) \equiv FEe . [a, b, c, d, s], \quad \text{wo} \quad s \equiv DFbB.$$

Ferner wird

$$xaBb_1(xb)(xeE)F = 0$$

(3.) für die Puncte
$a,\ b,\ bb_1B,\ ab_1E,\ e,\ BE,\ beEb_1Ba(be)$ *),
die nach der Reihe durch
$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$
bezeichnet werden sollen, und aufserdem für die zwei Puncte
$(h, i) \equiv EFe.[a, b, c, r, s]$, wo $r \equiv BF$, $s \equiv ab_1F$.

Sodann wird

$$xaBb_1(xb)d_1ExF = 0$$

(4.) für die Puncte
$a,\ b,\ bb_1B,\ d_1b_1Ba(bd_1),\ bd_1E,\ ab_1E,\ BE,$
die ich nach der Reihe mit
$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$ **)
bezeichne, und aufserdem für die Puncte
$(h, i) \equiv F.[a, b, c, d, r]$, wo $r \equiv EFd_1B$.

Ferner ist

$$xaBb_1CxD(xeE)F = 0$$

(5.) für die Puncte
$a,\ BC,\ ab_1C,\ DCb_1BaD,\ e,\ DE,\ efCb_1aB(ef),$
die der Reihe nach
$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$
bezeichnen sollen, und aufserdem für die zwei Puncte
$(h, i) \equiv FEe.[a, b, c, d, r]$, wo $r \equiv DE$.

---

*) Die vier Puncte $d \ldots g$ in (3.) erfolgen so. Nach (§. 2.) wird $xaBb_1(xb)(xeE) = 0$, wenn $xaBb_1(xeE) = 0$ und $xb(xeE) = 0$ ist. Man kann dafür (nach 12.) $xaBb_1Eex = 0$ und $xbEex = 0$ schreiben. Das Letztere giebt (nach 9.) x entweder in E, oder in eb liegend. Dem Ersteren wird (nach 8.) unter andern durch die Puncte BE, ab_1E und e genügt. Also sind BE und ab_1E die Durchschnitte von E mit dem Kegelschnitt $xaBb_1Eex = 0$. Eben so ist e einer der Durchschnitte von eb mit diesem Kegelschnitt. Um den andern zu finden, nehme man x in eb an, so ist $ex \equiv eb$, also, Dies in die Gleichung des Kegelschnitts gesetzt, ergiebt sich $xaBb_1Eeb = 0$, oder (nach 12.), $beEb_1Bax = 0$, d. h. x liegt in der Geraden $beEb_1Ba$, aber auch in be, also ist $x \equiv beEb_1Ba(be)$.

**) Die Puncte e, f, g erfolgen so. Nach (§. 2.) ist $xaBb_1(xb)d_1Ex = 0$, wenn $xaBb_1(xb)d_1x = 0$ und $Ex = 0$ ist. Die erstere Gleichung kann auch $xb(xaBb_1)d_1x = 0$ geschrieben werden. Sie drückt (nach 9.) aus, dafs entweder x in bd_1 liegt, oder dafs $xaBb_1x = 0$ ist, d. h. x in B oder in ab_1 liegt; also erhält man $x \equiv$ den Durchschnitten dieser drei Geraden mit der Geraden E, folglich $\equiv bd_1E,\ BE,\ ab_1E$.

(6.) Endlich ist

$$xaBb_1CxDc_1ExF = 0$$

für die Puncte

$$a, \quad BC, \quad ab_1C, \quad DCb_1BaD, \quad DE,$$

die ich mit

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e$$

bezeichne, und aufserdem für die vier Puncte

$$(f, g) \equiv E.[a, b, c, c_1, r], \quad \text{wo} \quad r \equiv b_1c_1B,$$
$$(h, i) \equiv F.[a, b, c, d, s], \quad \text{wo} \quad s \equiv FEc_1D.$$

In jedem dieser sechs Fälle giebt es also neun Puncte, welche, statt x gesetzt, das betreffende Product gleich Null machen.

§. 4.

Die besonderen Beziehungen in der Lage der neun in (§. 3.) gefundenen Puncte für jeden der 6 Fälle zu finden.

Die in (§. 3.) gefundenen neun Puncte haben in jedem der sechs Fälle die Beschaffenheit, dafs sich um sie eine bewegliche Curve dritter Ordnung schlingen läfst. In der That haben jene Producte entweder die Form QF [im 2ten bis 6ten Falle], oder die Form qf_1 [im ersten Falle], wo Q oder q den Factor x dreimal enthält. Fügt man nun zu QF eine constante Gerade G als Factor hinzu, die nicht mit F zusammenfällt, so drückt die Gleichung

$$QFG = 0$$

(nach der Formel 6.) aus, dafs x einer Curve dritter Ordnung angehört. Diese Curve enthält offenbar die neun Puncte, welche das Product QF gleich Null machen. Alle übrigen Puncte jener Curve geben, in Q statt x eingeführt, eine Gerade, welche die Gerade F in dem Punct FG schneidet. Läfst man nun die Gerade G in eine beliebige andere Gerade G' übergehen, welche F in einem von FG verschiedenen Puncte trifft, so drückt die Gleichung QFG' eine Curve dritter Ordnung aus, welche sich um dieselben neun Puncte schlingt. Alle übrigen Puncte dieser Curve geben, statt x in Q eingeführt, eine Gerade, welche die Gerade F in dem Puncte FG' schneidet, also in einem andern Puncte, als wenn man in Q die Puncte der ersten Curve einführt. Beide Curven haben also aufser jenen neun Puncten keine Puncte gemein, und man erhält also eine bewegliche Curve dritter Ordnung, die sich um jene festen neun Puncte schlingt. Dasselbe ergiebt sich in dem andern Falle, wenn man qf_1 mit einem

Puncte g_1 combinirt, und dann entsprechend verfährt. Also haben in allen sechs Fällen die gefundenen neun Puncte die angegebene Beschaffenheit.

Ferner liegen in jedem der einzelnen sechs Fälle mindestens drei von den neun Puncten in *gerader Linie.* So z. B. liegen in dem ersten Falle, wie sich unmittelbar aus den Formeln in (§. 3, 1.) ergiebt, e, f, g in der Geraden ed_1 und e, h, i in der Geraden ef_1. Es wird genügen, Dies für die einzelnen Fälle übersichtlich zusammenzustellen.

„In gerader Linie liegen:

In 1. die Puncte e, f, g und ebenso e, h, i.
In 2. – – e, f, g – – e, h, i.
In 3. – – e, b, g – – e, h, i.
In 4. – – e, f, g – – e, d, b.
In 5. – – e, f, g – – e, h, i.
In 6. – – e, f, g."

Es ist bekannt, dafs wenn von neun Puncten, um welche sich eine bewegliche Curve dritter Ordnung schlingen läfst, drei in gerader Linie liegen, die sechs übrigen in einem Kegelschnitt liegen müssen. Also giebt es in den ersten fünf Fällen jedesmal *zwei* Kegelschnitte, in welchen sechs der neun Puncte liegen müssen, in dem letzten giebt es *einen* solchen. Diese Beziehung mufs also durch die obigen Formeln gleichfalls ausgedrückt sein. Doch ist es nöthig, zu bemerken, dafs dieselbe durch die oben dargestellten Beziehungen schon mitbedingt ist.

§. 5.

Wenn beliebige neun Puncte gegeben sind, welche die in (§. 4.) bezeichnete Lage haben, die Producte der in (§. 3.) dargestellten Formen zu finden, welche für diese neun Puncte verschwinden.

Es seien $a, b, \ldots i$ die neun gegebenen Puncte, welche der Bedingung unterworfen sind, dafs sich um sie eine bewegliche Curve dritter Ordnung schlingen läfst. Hierzu tritt im ersten Falle die Bedingung hinzu, dafs e sowohl mit f und g, als auch mit h und i, in gerader Linie liege. Dann kommt es im ersten Falle nur darauf an, B, b_1, d_1, f_1 so zu wählen, dafs den Gleichungen in (§. 3, 1.) genügt wird. Ja, da durch acht jener neun Puncte bekanntlich schon immer der neunte bestimmt ist, so kommt es nur darauf an, die Gleichungen für acht Puncte zu erfüllen, indem dann die Gleichung, durch welche der neunte Punct bestimmt ist, schon immer von selbst erfüllt werden

mufs. Man wähle zu dem Puncte, der unberücksichtigt bleiben soll, den Punct g. Dann sagt die Gleichung, durch welche der Punct c in (§. 3, 1.) bestimmt ist, nämlich $c \equiv bb_1B$, aus, dafs c sowohl in bb_1 als in B liegt; oder, anders ausgedrückt, dafs bcb_1 und cB Null sind. Die Gleichung $d \equiv d_1b_1Ba(bd_1)$ sagt aus, dafs d in der Geraden d_1b_1Ba und in bd_1 liegt, d. h., dafs $d_1b_1Bad = bd_1d = 0$ sei, oder, anders geschrieben (nach Fall 12.), dafs $daBd_1b_1$ und bdd_1 Null sind. Die Gleichung $f \equiv ed_1B$ drückt aus, dafs efd_1 und fB Null sind. Diese Ausdrücke, welche hiernach Null sind, in angemessener Ordnung zusammengestellt, sind:

$$bdd_1, \quad cB, \quad bcb_1,$$
$$efd_1, \quad fB, \quad daBd_1b_1.$$

Aus dem Verschwinden der senkrecht unter einander stehenden Ausdrücke folgt sogleich

$$d_1 \equiv bd(ef), \quad B \equiv cf, \quad b_1 \equiv daBd_1(bc).$$

Ferner drückt die Gleichung $(h, i) \equiv ef_1.[a, b, c, d, r]$ aus, dafs h und i in der Geraden ef_1 und in dem durch die Puncte a, b, c, d, r gelegten Kegelschnitte liegen, oder, anders ausgedrückt, dafs der Punct f_1 in der durch die drei Puncte e, h, i gehenden Geraden und der Punct r in dem durch die sechs Puncte a, b, c, d, h, i gehenden Kegelschnitte liegt. Dafs nämlich diese 6 Puncte in einem Kegelschnitte liegen müssen, ist nach (§. 4.) schon in der Bedingung eingeschlossen, dafs die andern drei Puncte e, f, g in gerader Linie liegen. Endlich, die Gleichung $r \equiv d_1f_1B$ drückt aus, dafs r in der Geraden d_1f_1 und in der Geraden B liegt. Da r sowohl in B als in dem Kegelschnitt $[a, b, c, d, h]$ liegt, so wird es in einem der Durchschnitte beider liegen müssen. Der eine dieser Durchschnitte ist, da $B \equiv cf$ ist, c, also ist r der andere, d. h. es ist

$$(c, r) \equiv B.[a, b, c, d, h].$$

Dann geben also die beiden noch übrigen Bestimmungen, dafs f_1 in d_1r und und in eh liegt,

$$f_1 \equiv d_1r(eh).$$

Es ist daher jetzt B, b_1, d_1, f_1 so bestimmt, dafs alle Gleichungen in (§. 3, 1.), vorläufig mit Auschlufs der Gleichung $g \equiv ed_1(ab_1)$, erfüllt werden. Setzt man demnach diese gefundenen Werthe in das Product $xaBb_1(xb)d_1(xc)f_1$, so wird dasselbe für die acht Puncte $x \equiv a \ldots f, h, i$ gleich Null gemacht, also auch durch den 9ten Punct g; und die Aufgabe ist für den ersten Fall gelöset. Es reicht daher die Anzahl der Gleichungen in (§. 3, 1.) gerade

zur Bestimmung der sieben constanten Factoren des Products hin. Man erwäge, dafs jede Bestimmung eines Puncts (oder einer geraden Linie) durch zwei Zahlengleichungen in (§. 3, 1.), durch welche die neun Puncte bestimmt wurden, achtzehn Zahlengleichungen einschliefsen. Da jedoch durch acht Puncte schon der neunte bestimmt war, so braucht man nur sechzehn dieser Gleichungen zu berücksichtigen. Unter diesen Gleichungen sind aber zwei, nämlich die, welche ausdrücken, dafs e, f, g, und eben so e, h, i, in gerader Linie liegen, in den Bedingungen der Aufgabe eingeschlossen; es bleiben daher noch vierzehn Zahlengleichungen zu berücksichtigen. Dasselbe gilt in allen übrigen Fällen, mit Ausnahme des sechsten, wo nur die Puncte e, f, g in gerader Linie liegen sollen, also funfzehn Gleichungen übrig bleiben. Jene 14 Zahlengleichungen reichen nun in unserem Falle zur Bestimmung der sieben constanten Factoren des Products gerade hin. Dasselbe gilt für den dritten und vierten Fall, da hier auch nur sieben constante Factoren in dem Producte sich zeigen. Hingegen in dem zweiten und fünften Falle erscheinen acht constante Factoren, und es bleiben also hier noch zwei Bestimmungen willkürlich. Im sechsten Fall endlich kommen gleichfalls acht constante Factoren vor, aber funfzehn Zahlengleichungen; also bleibt hier nur eine Bestimmung willkürlich. Diese Bemerkung möge zum Leitfaden bei der Lösung der folgenden Aufgaben dienen. Im zweiten Falle bleiben zwei Bestimmungen willkürlich. Aus den Gleichungen für c und d in (§. 3, 2.) erhält man dann folgende vier Ausdrücke gleich Null: $\boldsymbol{cB}$, $\boldsymbol{cC}$, $\boldsymbol{daBD}$, $\boldsymbol{dbDC}$. Ferner sagt die Gleichung $(f, g) \equiv \boldsymbol{DEe}.[a, b, c, d, r]$ aus, dafs $\boldsymbol{DE}$ in der durch e, f, g gehenden Geraden liegt, und dafs r in dem durch die sechs Puncte a, b, c, d, f, g gehenden Kegelschnitt liegt. Die zugehörige Gleichung $r \equiv \boldsymbol{DEbB}$ drückt aus, dafs r in $\boldsymbol{B}$ liegt, und $\boldsymbol{DE}$ in br. Nimmt man nun die Gerade $\boldsymbol{B}$, für welche nur die Bestimmung da war, dafs sie durch c gehen soll, willkürlich durch c an, so ist der Punct r, als zweiter Durchschnittspunct der Geraden $\boldsymbol{B}$ und des durch a, b, c, d, f, g gehenden Kegelschnittes bestimmt, d. h. es ist

$$(c, r) \equiv \boldsymbol{B}.[a, b, c, d, f].$$

Dann ist $\boldsymbol{DE}$ bestimmt, nämlich $\equiv \boldsymbol{rb(ef)}$. Da nun $\boldsymbol{D}$ durch diesen Punct und den Punct $\boldsymbol{daB}$ geht, so ist auch $\boldsymbol{D}$ bestimmt, und dadurch wieder $\boldsymbol{C}$, nämlich

$$\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{rb(ef)(daB)}, \quad \boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{dbDc}.$$

Nimmt man noch die Gerade $\boldsymbol{E}$ willkürlich durch den Punct $\boldsymbol{rb(ef)}$ an, so sind durch diese Annahme die bisher betrachteten Gleichungen aus (§. 3, 2.)

erfüllt. Ferner die Gleichung $(h, i) \equiv FEe.[a, b, c, d, s]$ sagt aus, dafs FE in der durch e, h, i gehenden Geraden, und s in dem durch die sechs Puncte a, b, c, d, h, i gehenden Kegelschnitt liegt. Endlich sagt die Gleichung $s \equiv DFbB$ aus, dafs s in B und in DFb liegt; das letztere läfst sich so ausdrücken: dafs F in sbD liegt. Mithin erhalten wir

$$(c, s) \equiv B.[a, b, c, d, h], \quad F \equiv ehE(bsD);$$

wodurch nun alle Gleichungen in (§. 3, 2.) erfüllt sind und die Aufgabe für den zweiten Fall gelöset ist.

Im dritten Falle liegt (nach §. 4) der Punct e sowohl mit b und g in gerader Linie, als auch mit h und i. Daraus folgt (nach §. 4.) dafs die vier Puncte a, c, d, f sowohl mit b und g in einem und demselben Kegelschnitt liegen, als auch mit h und i, wenn, wie vorausgesetzt wurde, $a \ldots i$ neun solche Puncte sind, um die sich eine bewegliche Curve dritter Ordnung schlingen läfst.

Ich werde nun von den Gleichungen in (§. 3, 3.) die Gleichung für g ganz unberücksichtigt lassen und aus der Gleichung für f nur die Bestimmung aufnehmen, dafs f in B liegen soll. Dann geben die Gleichungen für c und d:

$$0 = bcb_1 = cB = adb_1 = dE;$$

woraus man, da auch f in B liegt,

$$B \equiv cf, \quad b_1 \equiv bc(ad), \quad dE = 0$$

erhält. Die Gleichung $(h, i) \equiv EFe.[a, b, c, r, s]$ drückt aus, dafs EF in der durch e, h und i gehenden Geraden, und dafs die Puncte r und s in dem durch die fünf Puncte a, b, c, h, i gelegten Kegelschnitt liegen. Die hiezugehörigen Gleichungen $r \equiv BF$, $s \equiv ab_1F$ sagen aus, dafs r in B, s in ab_1 liegt, und F durch die Puncte r und s geht. Man erhält also:

$$(c, r) \equiv B.[a, b, c, h, i], \quad (a, s) \equiv ab_1.[a, b, c, h, i], \quad F \equiv rs.$$

Endlich bestimmt sich E dadurch, dafs es durch den Punct d geht und EF in eh liegt, d. h. E in ehF; also ist

$$E \equiv ehFd.$$

Hierdurch sind alle Constanten des Products $xaBb_1(xb)(xeE)F$ bestimmt; und zwar so, dafs dies Product für die Puncte a, b, c, d, e, h, i gleich Null wird. Bezeichnet man die beiden übrigen Puncte, für die jenes Product Null wird, für den Augenblick mit f' und g', so mufs nach den Formeln (§. 3, 3.) einer derselben, z. B. f', in $B \equiv cf$ liegen, der andere g', in eb; und dann mufs nach (§. 4.) f' mit a, c, d, h, i und mit a, c, d, b, g' in einem Kegelschnitte liegen. Es wird also f' dadurch bestimmt, und zwar auf gleiche Weise

wie f, nämlich:

$$(c, f) \equiv (c, f') \equiv \boldsymbol{B}.[a, c, d, h, i],$$

und eben so:

$$(b, g) \equiv (b, g') \equiv eb.[a, c, d, b, f].$$

Also wird jenes Product für die neun gegebenen Puncte gleich Null und die Aufgabe ist auch für den dritten Fall gelöset

Die Lösung der Aufgabe für die übrigen Fälle hat nun keine Schwierigkeiten, und es wird genügen, die Formeln *zusammenzustellen*. Der Übersicht wegen füge ich auch die Formeln für die ersten drei Fälle hinzu.

(1.) $\begin{cases} d_1 \equiv bd(ef), \quad \boldsymbol{B} \equiv cf, \quad b_1 \equiv daBd_1(bc), \quad (c, r) \equiv \boldsymbol{B}.[a, b, c, d, h], \\ f_1 \equiv d_1 r(eh). \end{cases}$

(2.) $\begin{cases} cB^* \equiv 0, \quad (c, r) \equiv \boldsymbol{B}.[a, b, c, d, f], \quad (c, s) \equiv \boldsymbol{B}.[a, b, c, d, h], \\ \boldsymbol{D} \equiv rb(ef)(daB), \quad \boldsymbol{C} \equiv dbDc, \quad rb(ef)\boldsymbol{E}^* = 0, \quad \boldsymbol{F} \equiv ehE(bsD). \end{cases}$

(3.) $\begin{cases} \boldsymbol{B} \equiv cf, \; b_1 \equiv bc(ad), \; (c, r) \equiv \boldsymbol{B}.[a, b, c, h, i], \; (a, s) \equiv ad.[a, b, c, h, i], \\ \boldsymbol{F} \equiv rs, \quad \boldsymbol{E} \equiv ehFd. \end{cases}$

(4.) $\begin{cases} \boldsymbol{B} \equiv cg, \; b_1 \equiv bc(af), \; \boldsymbol{E} \equiv gf, \; d_1 \equiv adBb_1(bd), \; (c, r) \equiv \boldsymbol{B}.[a, b, c, d, h], \\ \boldsymbol{F} \equiv rd_1\boldsymbol{E}(hi). \end{cases}$

(5.) $\begin{cases} bB^* = 0, \; \boldsymbol{C} \equiv bc, \; \boldsymbol{D} \equiv df, \; b_1 \equiv daB(DC)(ac), \; (d, r) \equiv \boldsymbol{D}.[a, b, c, d, h], \\ fE^* = 0, \quad \boldsymbol{F} \equiv ehEr. \end{cases}$

(6.) $\begin{cases} bB^* = 0, \quad \boldsymbol{C} \equiv bc, \quad \boldsymbol{D} \equiv de, \quad \boldsymbol{E} \equiv ef, \quad b_1 \equiv daB(DC)(ac), \\ (b, r) \equiv \boldsymbol{B}.[a, b, c, f, g], \; (r, c_1) \equiv rb_1.[a, b, c, f, g], \; (d, s) \equiv \boldsymbol{D}.[a, b, c, d, h], \\ \boldsymbol{F} \equiv sc_1Eh. \end{cases}$

Es ist nur noch zu bemerken, dafs in den drei letzten Fällen die Formeln so gebildet sind, dafs in (4.) der Punct e, in (5.) der Punct g, in (6.) der Punct i als derjenige gewählt ist, welcher unberücksichtigt bleibt. Die Art, wie derselbe aus den übrigen acht Puncten bestimmt ist, ergiebt sich leicht aus den in (§. 4.) für die einzelnen Fälle gestellten Bedingungen. Nämlich im vierten Falle liegt e sowohl mit g und f, als mit b und d in gerader Linie; mithin ist dann $e \equiv gf(bd)$. Im fünften Falle liegt (nach §. 4.) g in der Geraden ef und in dem durch a, b, c, d, f gelegten Kegelschnitt, also ist dann

$$(f, g) = ef.[a, b, c, d, f].$$

Im letzten Falle endlich liegt i (nach §. 4.) in dem durch a, b, c, d, h ge-

---

*) Diese Gleichungen sollen ausdrücken, dafs die Gerade, die den letzten Factor bildet, *willkürlich* durch den Punct, mit dem sie multiplicirt ist, gelegt werden kann.

legten Kegelschnitt, und (nach §. 3.) zugleich in der Geraden F, die durch h geht, also ist

$$(h, i) \equiv F.[a, b, c, d, h].$$

Es ist leicht, nach den sechs Formelgruppen die Constructionen auf dem Papiere auszuführen, indem alle die Formeln nur Symbole für geometrische Constructionen sind. Auch leuchtet unmittelbar ein, dafs sie sich alle blofs mittels des Lineals machen lassen. Denn wo dort auf die Durchschnitte einer Geraden und eines Kegelschnitts zurückgegangen wird, ist der eine dieser Durchschnitte schon immer bekannt. Es werde z. B. der Punct x in

$$(a, x) \equiv af.[a, b, c, d, e],$$

gesucht, so hat man, wenn man das mystische Sechseck $axbcde$ beschreibt, nach dem *Pascal*schen Satze sogleich

$$0 \equiv bc(ea)[cd.ax](de)bx.$$

Hier kann man statt ax die Linie af setzen, da nach der Annahme x in af liegen soll. Dann drückt die gefundene Gleichung aus, dafs x auch in der Geraden $bc(ea)[cd.af](de)b$ liegt, also hat man

$$x \equiv bc(ea)[cd.af](de)b(af].$$

Die wirkliche Ausführung der Constructionen nach der obigen Formeltafel ist von wesentlichem Nutzen; doch habe ich nicht die zugehörigen Figuren beigefügt, weil es wesentlich ist, die allmälige Fortschreitung der Construction zu verfolgen, welche in einer gezeichnet vorliegenden Figur doch immer verschwindet.

Vermöge der erlangten Resultate läfst sich nun die Erzeugung der Curven vierter Ordnung auf die einfache Aufgabe zurückführen: die Projectivität zwischen zwei Strahlenbüscheln, oder zwischen einem Strahlenbüschel und einer Geraden, durch ein planimetrisches Product darzustellen.

§. 6.

Die Projectivität zweier Strahlenbüschel durch ein planimetrisches Product darzustellen.

Es seien drei Strahlen P_1, P_2, P_3 (Fig. 8), die durch einen Punct f_1 gehen, und drei ihnen entsprechende Strahlen L_1, L_2, L_3, die durch einen Punct k gehen, gegeben. Bekanntlich wird durch drei Paare entsprechender Strahlen die Projectivität zweier Strahlenbüschel bestimmt. Es seien l_1, l_2, l_3 die Durchschnittspuncte jener drei entsprechenden Strahlenpaare. Liegen nun l_1, l_2, l_3 in einer Geraden G, so ist $L_\alpha \equiv P_\alpha Gk$, für die Indices $\alpha = 1, 2, 3$, und die beiden Strahlenbüschel sind perspectivisch. Liegen aber l_1, l_2, l_3 nicht

in gerader Linie, so setze man $l_1 l_2 \equiv G$, $l_1 l_3 \equiv H$ und $L_2 P_3 \equiv g_1$. Dann ist offenbar

$$L_\alpha \equiv P_\alpha G g_1 H k,$$

für $\alpha = 1, 2, 3$; wie es der blofse Anblick von (Fig. 8) zeigt, und es ist unmittelbar klar, dafs, wenn man noch beliebig viele Strahlen L_α durch f_1 zieht und das zugehörige P_α durch die obige Gleichung bestimmt, L_α und P_α entsprechende Strahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel werden. Also ist die Aufgabe gelöset.

§. 7.

Die Projectivität eines Strahlenbüschels und einer Geraden durch ein planimetrisches Product darzustellen.

Auch diese Projectivität wird bekanntlich durch drei Paare entsprechender Elemente bestimmt. Es seien p_1, p_2, p_3 drei Puncte einer Geraden F, und L_1, L_2, L_3 drei Strahlen durch einen Punct k. Man verbinde p_1, p_2, p_3 mit einem beliebigen Puncte a, so erhält man drei Strahlen, die wir P_1, P_2, P_3 nennen wollen. Dann lassen sich nach (§. 6.) zwei Linien B und D und ein Punct c von der Art finden, dafs für die Indices $\alpha = 1, 2, 3$, jedesmal $L_\alpha \equiv P_\alpha BcDk$ ist, also $L_\alpha = p_\alpha aBcDk$.

Nimmt man überhaupt einen beliebigen Punct p in der Geraden F an und setzt $L \equiv paBcDk$, so sind p und L entsprechende Elemente der punctirten Geraden F und des Strahlenbüschels k, während p_1 und L_1, p_2 L_2, p_3 und L_3 entsprechende Elemente derselben projectivischen Gebilde sind. Nun lassen sich in der Geraden F stets zwei Puncte finden, welche in den ihnen entsprechenden Geraden liegen. Man hat nämlich für einen solchen Punct p nur die Gleichung $paBcDkp = 0$ zu erfüllen. Diese giebt, als Ort des Puncts p, einen Kegelschnitt; mithin sind die Puncte, in welchen dieser Kegelschnitt die Gerade F schneidet, die gesuchten Puncte. Es können diese Puncte imaginär sein, aber da die Constructionen mittels imaginärer Puncte stets nach einem allgemeinen Verfahren ohne Schwierigkeit auf Constructionen mittels reeller Puncte sich zurückführen lassen, so braucht man auf diesen Fall keine besondere Rücksicht zu nehmen. Es seien nun jene beiden Puncte p_4 und p_5. Dann sind $L_4 \equiv kp_4$ und $L_5 \equiv kp_5$ (Fig. 9). Nun ziehe man durch p_5 eine beliebige Gerade G und setze $GL_3 p_3 L_4 \equiv g_1$, so zeigt der blofse Anblick der Figur, dafs $L_\alpha \equiv p_\alpha g_1 Gk$ ist, für $\alpha = 3, 4, 5$; also gilt diese Gleichung auch für jedes Elementenpaar, welches mit diesen drei

Paaren projectivisch ist, mithin auch für die Elementenpaare L_1 und p_1, L_2 und p_2, d. h. es ist

$$L_a \equiv p_a g_1 G k,$$

auch für die Indices $a = 1, 2, 3$, und die Aufgabe ist gelöset.

§. 8.

Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch die in (§. 1.) dargestellten Bewegungen.

Ich erinnere hier an einen Satz, den ich in einer früheren Abhandlung (Band 42. S. 207) für Curven $n$ter Ordnung bewiesen habe und welcher für Curven vierter Ordnung folgendermafsen lautet:

„Wenn man durch drei Durchschnittspuncte einer Curve vierter Ordnung und einer Geraden eine Curve dritter Ordnung legt, so schneidet sie die erstere aufserdem noch in neun solchen Puncten, durch welche sich eine bewegliche Curve dritter Ordnung legen läfst. Diese schneidet die Curve vierter Ordnung aufserdem in drei Puncten, welche in einer beweglichen, um einen festen Punct dieser Curve rotirenden Geraden liegt."

Die Bedingungen, welche wir in (§. 4.) für die neun Puncte $a \ldots i$ aufstellten, waren: erstens, dafs sich um sie eine bewegliche Curve dritter Ordnung schlingen lasse, und zweitens, dafs im sechsten Falle drei Puncte in gerader Linie liegen, in den übrigen Fällen ein Punct (e) mit zwei Punctenpaaren in geraden Linien liege. Der Symmetrie wegen kann man annehmen, dafs auch im sechsten Falle e, h und i in gerader Linie liegen, also e sowohl mit f und g, als mit h und i in gerader Linie liege.

Nun lassen sich in jeder gegebenen Curve vierter Ordnung Ω, nach dem angegebenen Satze stets neun solche Puncte finden, welche diesen Bedingungen genügen. Nämlich, man nehme in der Curve Ω einen beliebigen Punct e an, ziehe von ihm zwei Gerade, und wähle auf jeder, unter den drei Puncten, in welchen sie die Curve aufser e noch schneidet, zwei Puncte aus; durch diese zwei Punctenpaare, durch den Punct e und durch drei der Durchschnittspuncte einer dritten Geraden L_1 mit der Curve, lege man eine beliebige Curve dritter Ordnung hindurch, so schneidet dieselbe die Curve Ω noch in vier Puncten, welche mit e und den zwei Punctenpaaren, die in den von e gezogenen Geraden liegen, zusammen neun Puncte bilden, die allen in (§. 4.) aufgestellten Bedingungen genügen. Es läfst sich also vermöge der Constructionen in (§. 5.) stets ein Product finden, welches verschwindet, wenn der darin vorkommende Factor x mit irgend einem jener neun Puncte zusammenfällt,

und welches eine beliebige der dort angeführten sechs Formen hat. Dies Product stellt in dem ersten der sechs Fälle eine variable Gerade vor, die durch den festen Punct f_1 geht und die wir in der zugehörigen (Fig. 1) mit $\boldsymbol{P}$ bezeichnet haben; in den übrigen fünf Fällen stellt jenes Product einen variablen Punct vor, der in der festen Geraden $\boldsymbol{F}$ liegt und den wir in den zugehörigen (Fig. 2 bis 6) mit p bezeichneten. In allen Fällen ist dies Product in Beziehung auf x vom dritten Grade. Der Ort derjenigen Puncte x, welche, in das Product eingeführt, demselben einen constanten Werth geben, ist eine Curve dritter Ordnung, welche sich um jene neun Puncte schlingt. In der That: soll das Product p mit einem constanten Puncte p_1 (in $\boldsymbol{F}$) zusammenfallen, und ist $\boldsymbol{P}_1$ eine beliebige durch p_1 gezogene constante Gerade, so hat man die Gleichung

$$p\boldsymbol{P}_1 = 0,$$

welche eine Curve dritter Ordnung als Ort von x darstellt, und welche ausdrückt, dafs p in den Durchschnittspunct p_1 von $\boldsymbol{P}_1$ und $\boldsymbol{F}$ fällt. Stellt man sich drei solcher Puncte p_1, p_2, p_3 in $\boldsymbol{F}$ vor, so erhält man drei Curven dritter Ordnung, welche sich um jene neun Puncte $a \ldots i$ schlingen und deren übrige Puncte, statt x in p eingeführt, p beziehlich $\equiv p_1, p_2, p_3$ machen. Nach dem zu Anfange dieses Paragraphen angeführten Satze schneidet jede dieser drei Curven die gegebene Curve Ω noch aufserdem in drei Puncten, die in gerader Linie liegen. Es werde diese Gerade, in Hinsicht auf die drei Curven, beziehlich mit $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{L}_3$ bezeichnet. Diese drei Geraden schneiden sich, nach demselben Satze, in einem festen Puncte der gegebenen Curve. Es sei x der feste Punct. Dann hat man drei Puncte p_1, p_2, p_3 in der Geraden $\boldsymbol{F}$ und drei ihnen entsprechende Geraden $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{L}_3$ durch den Punct k, und kann also nach (§. 7.) eine Gerade $\boldsymbol{G}$ und einen Punct g_1 von der Art finden, dafs $\boldsymbol{L}_\mathfrak{a} \equiv p_\mathfrak{a} g_1 \boldsymbol{G} k$ ist, für die Indices $\mathfrak{a} = 1, 2, 3$. Nun ist die Gleichung

$$p_\mathfrak{a} g_1 \boldsymbol{G} k x = 0,$$

nach Formel (6.), die Gleichung einer von x beschriebenen Curve vierter Ordnung. Dieselbe hat mit Ω gemein: erstens die neun Puncte $a \ldots i$, welche, statt x gesetzt, das Product p gleich Null machen; ferner der Punct k, und endlich die neun Puncte, in welchen die drei Geraden $\boldsymbol{L}_\mathfrak{a}$ die Curve Ω aufser e noch schneiden; denn für diese Puncte verwandeln sich nach dem Obigen p in $p_\mathfrak{a}$, also wird dann $\boldsymbol{L}_\mathfrak{a} \equiv p_\mathfrak{a} g_1 \boldsymbol{G} k$, und da x in $\boldsymbol{L}_\mathfrak{a}$ liegt, so wird

$$p_\mathfrak{a} g_1 \boldsymbol{G} k x = 0;$$

d. h. es sind diese neun Puncte auch Puncte der durch die letzte Gleichung dargestellten Curve. Also hat diese Curve mit Ω schon neunzehn Puncte gemein, und schon $4^2+1=17$ genügen allgemein zur Bestimmung einer Curve vierter Ordnung. Also ist die durch die obige Gleichung dargestellte Curve mit der gegebenen Curve Ω identisch.

Wir haben somit die Erzeugbarkeit aller Curven vierter Ordnung durch die in den Formeln (2. bis 6. §. 1.) dargestellten Bewegungen nachgewiesen. In der ersten jener Formeln ist das Product, bis zum Factor f_1 hin, eine variable, durch den Punct f_1 gehende Gerade, die wir mit $\boldsymbol{P}$ bezeichneten. Soll $\boldsymbol{P}$ mit einer constanten Geraden $\boldsymbol{P}_1$ zusammenfallen, und ist p_1 ein beliebiger, von f_1 verschiedener, constanter Punct dieser Geraden, so hat man die Gleichung

$$\boldsymbol{P}p_1 = 0,$$

welche eine Curve dritter Ordnung als Ort von x darstellt, und welche ausdrückt, dafs die Gerade $\boldsymbol{P}$ durch den Punct p_1 geht, d. h., da $\boldsymbol{P}$ auch durch f_1 geht, mit der Geraden $p_1 f_1 \equiv \boldsymbol{P}_1$ zusammenfällt. Stellt man sich drei solche Geraden $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ vor, welche durch f_1 gehen, so erhält man drei Curven dritter Ordnung, welche sich um diejenigen neun Puncte $a \ldots i$ schlingen, die $\boldsymbol{P}$ gleich Null machen, während die übrigen Puncte jener Curven, statt x in $\boldsymbol{P}$ eingeführt, diesem beziehlich die drei Werthe $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ geben. Diese drei Curven schneiden wieder die Curve Ω in je drei Puncten, welche beziehlich in drei Geraden $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{L}_3$ liegen, während diese drei Geraden sich in einem und demselben Puncte k der Curve Ω begegnen. Nun lassen sich nach (§. 6.) stets zwei Gerade $\boldsymbol{G}$ und $\boldsymbol{H}$ und ein Punct g_1 von der Art finden, dafs $\boldsymbol{P}_\mathfrak{a} \boldsymbol{G} g_1 \boldsymbol{H} k \equiv \boldsymbol{L}_\mathfrak{a}$ wird, für $\mathfrak{a} = 1, 2, 3$. Sind $\boldsymbol{G}$, g_1, $\boldsymbol{H}$ auf diese Weise bestimmt, so ist die Gleichung

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}g_1\boldsymbol{H}kx = 0$$

die einer von x beschriebenen Curve vierter Ordnung, welche mit der Curve Ω erstens die neun Puncte $a \ldots i$ gemein hat, welche statt x gesetzt, das Product $\boldsymbol{P}$ verschwinden machen; ferner hat man den Punct k, und endlich die neun Puncte, in welchen die drei Geraden $\boldsymbol{L}_\mathfrak{a}$ die Curve Ω, aufser dem Puncte e, noch schneiden. Das giebt neunzehn gemeinschaftliche Puncte: also fallen beide Curven zusammen, und es ist die Erzeugbarkeit der Curven vierter Ordnung durch die in (§. 1, 1.) bezeichnete Bewegung gleichfalls dargethan; folglich ist der Beweis des an die Spitze gestellten Satzes vollendet.

§. 9.

Vereinfachung der in (§. 8.) angegebenen Construction.

Die im vorigen Paragraphen gefundene Construction der Constanten wurde durch drei Curven dritter Ordnung vermittelt, und zwar durch die Durchschnitte dieser Curven mit der gegebenen Curve vierter Ordnung. Es lassen sich nun leicht diesen Curven dritter Ordnung ***gerade Linien*** substituiren, indem man die Curven dritter Ordnung in drei gerade Linien zerfallen läfst, oder wenigstens in eine Gerade und einen Kegelschnitt. Die erste Curve dritter Ordnung, die wir anwandten, legten wir durch acht Puncte der gegebenen Curve vierter Ordnung Ω, von denen drei in einer geraden Linie L_1 lagen und vier paarweise auf zwei durch den achten Punct (e) gelegten Geraden vertheilt waren. Es lassen sich diese acht Puncte insbesondere so legen, dafs sich durch sie eine in drei gerade Linien zerfallende Curve dritter Ordnung legen läfst. Man ziehe zu dem Ende von einem Punct e der Curve Ω zwei Gerade M und N, wähle von den übrigen drei Durchschnittspuncten dieser Geraden mit Ω auf jeder zwei Durchschnittspuncte aus, ziehe durch die so gewählten vier Puncte zwei neue Geraden Q und R, deren jede Ω noch in zwei Puncten schneidet; durch 2 dieser 4 Durchschnittspuncte lege man eine von den vorigen verschiedene Gerade L_1, welche wiederum die Curve Ω noch in 2 Puncten schneidet; einer derselben sei k, durch den andern lege man eine zugleich durch e gehende Gerade S: so ist der Verein der drei Geraden Q, R, S eine Curve dritter Ordnung, die durch acht Puncte von der vorhin gegebenen Beschaffenheit geht. Durch den Verein dieser drei Geraden werden dann die 9 Puncte $a \ldots i$ als Durchschnitte derselben mit Ω bestimmt. Dieser Verein kann zugleich als eine der drei durch $a \ldots i$ geschlungenen Curven dritter Ordnung gesetzt werden (wir setzen sie statt der ersten jener drei Curven). Ferner sei x ein beliebiger Punct der Geraden M, welche durch drei jener neun Puncte geht; doch werde x so gewählt, dafs es in keinen dieser drei Puncte fällt. Dann zerfällt offenbar die Curve dritter Ordnung, welche durch x und jene neun Puncte geht, in die Gerade M und in einen Kegelschnitt. Wir setzen diese zerfallende Curve dritter Ordnung als die zweite jener drei Curven. Wenn man dann den vierten Punct, in welchem M die gegebene Curve Ω schneidet, mit k verbindet, so ist die Verbindungslinie diejenige Linie, die oben mit L_2 bezeichnet wurde. Verfährt man eben so mit der Geraden N, und setzt die daraus hervorgehende Curve dritter Ordnung als die dritte jener drei Curven, so erhält man durch eine entsprechende Con-

struction die Gerade, die wir oben mit L_2 bezeichneten. Zu diesen drei Geraden L_1, L_2, L_3 finden sich nun leicht die entsprechenden Puncte (oder Geraden) p_1, p_2, p_3 (oder P_1, P_2, P_3), wenn man in das Product p (oder P) einen beliebigen Punct x einführt, welcher beziehlich in den Geraden Q, M, N liegt, ohne jedoch mit einem der neun Puncte $a \ldots i$ zusammenzufallen.

So ist also die beabsichtigte Vereinfachung vollendet, und man sieht, wie alle Constructionen, selbst wenn die Curve Ω nicht gezeichnet ist, sondern nur 14 Puncte derselben gegeben sind, entweder mittels des Lineals ausgeführt werden können, oder doch von der Art sind, dafs sie höchstens auf die Lösung einer Gleichung zweiten Grades, also, geometrisch gesagt, auf den Durchschnitt einer Geraden und eines durch fünf Puncte gegebenen Kegelschnitts zurückgeführt werden können. Die Durchschnittspuncte einer Geraden und eines durch fünf Puncte gehenden Kegelschnitts lassen sich aber, nach ***Steiner***, mittels des Lineals und eines in der Ebene der Zeichnung angenommenen beliebigen ***festen*** Kegelschnitts (der jedoch nicht in zwei gerade Linien zerfallen darf) ausführen. Also kann man mit diesen Hülfsmitteln auch die festen Puncte und geraden Linien construiren, in denen sich in jedem der sechs Fälle die Geraden und die Puncte der veränderlichen Figur bewegen müssen, um eine durch vierzehn Puncte gegebene Curve vierter Ordnung zu erzeugen.

Stettin im December 1851.

2.

Zweiter Nachtrag zu der Theorie der analytischen Facultäten (Bd. 35 und 38).

(Von Herrn Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Breisgau.)

Differentiale und Integrale höherer Ordnung und mit gebrochenen Exponenten.

§. 1.

Ein anderes Feld für die Anwendung der Facultäten eröffnet sich in der Darstellung der Differentiale und Integrale höherer Ordnung und mit *gebrochenen Exponenten.* Die Bedeutung der Facultäten in diesem Zweige der Mathematik zeigt sich besonders darin, dafs die Entwicklung dieser Differentiale und Integrale beinahe ausschliefslich nur auf Facultäten beruht; wie es sich in Folgendem zeigen wird.

Hingedeutet auf diesen Gegenstand wurde schon von ***Leibnitz*** (***Opp. omn.*** T. III. p. 105), wo er von Differentialen höherer Ordnung und mit *gebrochenen Exponenten* spricht und den Ausdruck $\partial^{\frac{1}{2}}y$, jedoch ohne weitere Erörterung, anführt. An mehreren Orten des ***Commerc. philos. et mathem.*** T. I. kommt ***Leibnitz*** auf diesen Gegenstand zurück, sagt p. 37, dafs $\partial^{-m} = \int^m$ sei und beschäftigt sich p. 99 mit der Darstellung der Ausdrücke $\partial^m(xy)$ und $\int^m(xy)$, worüber ***Bernoulli*** p. 104 weitere Auskunft, namentlich für den Fall, wenn m eine gebrochene Zahl ist, verlangt, worauf ***Leibnitz*** p. 107, jedoch nicht ganz genügend, antwortet, indem er den Werth von $\partial^{\frac{1}{2}}x$ sucht. Für den Fall $\partial x = x\cdot\frac{\partial h}{a}$ findet er $\partial^{\frac{1}{2}}x = x\left(\frac{\partial h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, während schon ***Euler*** $\partial^{\frac{1}{2}}x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}(\partial z)^{\frac{1}{2}}$ angiebt.

Euler kommt auf die Darstellung des oben genannten Differentials (***Comment. Acad. Petrop. od. an.*** 1730 *et* 1731, T. V. p. 56) zurück, trägt es mit Hülfe bestimmter Integrale auf die Form

$$\partial^n(z^e) = z^{e-n}(\partial' x)^n \frac{\int \partial x\,(-\log x)^e}{\int \partial x\,(-\log x)^{e-n}}$$

über und findet für $n = \frac{1}{2}$ und $x = 0$ bis $x = 1$:

$$\partial^{\frac{1}{2}} z = \sqrt{\left(\frac{z \partial z}{A}\right)},$$

wenn A die Kreisfläche bedeutet, deren Durchmesser die Einheit ist.

Nach ihm giebt ***Laplace*** (***Théor. anal. de probab.*** p. 85 und 156) Formeln, welche bestimmte Umformungen der betreffenden Functionen voraussetzen und so zur Darstellung der Differentiale und Integrale höherer Ordnung und mit gebrochenen Exponenten dienen. Auf die Untersuchung des Gegenstandes selbst geht er jedoch nicht ein. Eine andere Formel entwickelt ***Fourier*** (***Théor. de la Chaleur*** p. 562 No. 422), ohne weitere Erörterungen daran zu knüpfen. Auch ***Lacroix*** hat sich in seinem ***Traité du calc. différ. et du calc. intégr.*** an einigen Orten damit beschäftigt, ohne jedoch mehr als das Bekannte wiederzugeben.

Am Ausführlichsten hat sich in der neuern Zeit ***Liouville*** mit diesem Gegenstande befafst. Seine Arbeiten finden sich im ***Journ. de l'éc. polyt.*** und in diesem Journal. In der Abhandlung: ***Sur le calc. des différ. à indices quelconques*** (***Journ. de l'éc. pol.*** T. XIII. Cah. XXI. p. 71) hat er eine Theorie dieses Gegenstandes zu geben versucht. Ferner betrachtet er ihn in zwei Abhandlungen in demselben Bande, p. 1 und p. 163; dann weiter im 24ten und 25ten Hefte desselben Journals und im 11ten, 12ten und 13ten Bande dieses Journals. Auch im Journale von ***Liouville*** und in den ***Comptes rendues*** findet sich einiges hierher Gehörige.

Ohne die genannten Arbeiten gekannt zu haben, zog der Gegenstand meine Aufmerksamkeit auf sich, und ich gebe hier die Resultate auf dem Wege an, wie sie mir begegneten. ***Liouville*** hat seine Theorie auf sehr künstliche Mittel gegründet, die gerade wegen ihrer Künstlichkeit nicht sehr befriedigend sein dürften. Dabei hat er manche sehr einfache Anhaltspuncte aufser Acht- und deshalb manche Lücken gelassen, die sich bei näherer Betrachtung leicht ausgeglichen hätten. Indem dieser Gegenstand auf die bezeichnete Weise hier behandelt werden soll, wird gehörigen Orts, und um die aufgestellte Behauptung zu rechtfertigen, auf das von ***Liouville*** Übergangene hingewiesen werden.

Die nachstehende Untersuchung beschränkt sich vorerst auf die Darstellung der Differentiale und Integrale höherer Ordnung und mit gebrochenen Exponenten der Functionen mit einer veränderlichen Gröfse, als der Grundlage des Übrigen, und dann mit Anwendung derselben auf zusammengesetzte

Functionen; wie es in der Natur der Sache liegt. Denn erst durch Feststellung der Elemente ist der Übergang auf zusammengesetztere Gebilde möglich.

§. 2.

Es sei fx eine beliebige Function von x, so ergiebt sich für ihre Differentiale und Integrale

$$(1.)\quad \int^n fx(\partial x)^n,\ \int^{n-1} fx(\partial x)^{n-1},\cdots \iint fx\,\partial x,\ fx,\ \frac{\partial fx}{\partial x},\ \frac{\partial^2 fx}{(\partial x)^2},\cdots \frac{\partial^{n-1} fx}{(\partial x)^{n-1}},\ \frac{\partial^n fx}{(\partial x)^n}.$$

Geht man, von der rechten zur linken, von den Differentialen auf die Integrale über, so erhält man:

$$(2.)\quad \frac{\partial^{-n} fx}{(\partial x)^{-n}},\ \frac{\partial^{-n+1} fx}{(\partial x)^{-n+1}},\cdots \frac{\partial^{-1} fx}{(\partial x)^{-1}},\ fx,\ \frac{\partial fx}{\partial x},\ \frac{\partial^2 fx}{(\partial x)^2},\cdots \frac{\partial^{n-1} fx}{(\partial x)^{n-1}},\ \frac{\partial^n fx}{(\partial x)^n}.$$

In umgekehrter Ordnung ist:

$$(3.)\quad \int^n fx(\partial x)^n,\ \int^{n-1} fx(\partial x)^{n-1},\cdots \iint fx\partial x,\ fx,\ \int^{-1} fx(\partial x)^{-1},\ \int^{-2} fx(\partial x)^{-2},\ \int^{-n+1} fx(\partial x)^{-n+1},\ \int^{-n} fx(\partial x)^{-n}.$$

Hieraus ergeben sich folgende gleichgeltende Formen:

$$(4.)\quad \int^n fx(\partial x)^n = \frac{\partial^{-n} fx}{(\partial x)^{-n}}.$$

$$(5.)\quad \int^{-n} fx(\partial x)^{-n} = \frac{\partial^n fx}{(\partial x)^n},$$

oder in Symbolen:

$$(6.)\quad \int^n = \partial^{-n} \quad \text{und} \quad \int^{-n} = \partial^n.$$

D. h. ein Differential mit negativem Exponenten deutet ein Integral mit demselben Exponenten, und ein Integral mit negativem Exponenten deutet ein Differential an.

Hiedurch ist der Zusammenhang der Glieder der Ausdrücke (1, 2, 3.) untereinander gegeben. Man kann unmittelbar von dem $n$ten Differential auf das $n$te Integral und umgekehrt übergehen, wenn man in der entwickelten Darstellung für dasselbe $(-n)$ statt $(+n)$ setzt.

Die Gleichung (5.) stellt schon ***Leibnitz*** (***Commerc. epist.*** T. I. p. 37) auf. Der in ihr enthaltene Satz wurde auch als richtig angenommen und in keiner Weise in Frage gestellt. Wenigstens gingen auch ***Laplace*** und ***Fourier***

bei der Entwicklung der von ihnen angegebenen Reductionsformeln von ihm als von einer unbezweifelten Basis aus; wie solches auch aus den vorstehenden Erörterungen hervorgehen wird; vorausgesetzt, dafs die gefundenen Ausdrücke es zulassen und dafs überhaupt nicht etwa beschränkende Bestimmungen in einzelnen besondern Fällen vorkommen.

Hieran knüpft sich dann der weitere Schlufs, dafs, wenn das Gesetz des Überganges von einem positiven zu einem negativen Exponenten und umgekehrt gefunden ist, dafs dann dasselbe Gesagte auch für einen gebrochenen Exponenten und für diesen sogar dann gelte, wenn sich ein Gesetz in seiner Besonderheit nur für einen positiven oder negativen Exponenten nachweisen läfst. Denn die gebrochenen Zahlen sind immer Zwischenglieder der ganzen, die als Hauptglieder einer Reihe zu betrachten sind. Ein Gesetz aber, welches von den Hauptgliedern gilt, mufs sich auch auf die Zwischenglieder ausdehnen lassen.

Hiernach ist die Darstellung der Differentiale und Integrale mit gebrochenen Zeigern in nichts von der Darstellung der Differentiale und Integrale höherer Ordnungen verschieden, sondern fällt mit ihr zusammen. Es handelt sich hier nicht um einen neuen Zweig der Mathematik, wie *Liouville* meint, sondern nur um die Ausbildung eines bestimmten und schon längst gekannten Theils der Differential- und Integralrechnung, nämlich um die Darstellung der sogenannten höhern Differentiale und Integrale der Functionen, der auch schon in die Lehrbücher der Differentialrechnung übergegangen ist und hie und da auch schon, jedoch nicht auf die von *Leibnitz, Bernoulli* u. A. angedeutete Weise, untersucht wurde, wovon die in der neuern Zeit mehrseits versuchte Darstellung der höhern Differentialquotienten Zeugnifs geben.

Dafs die nähere Untersuchung des Gegenstandes nicht ohne Vortheil für die weitere Ausbildung der Differential- und Integralrechnung sein werde, ist leicht zu sehen. Es knüpfen sich an das Eingehen auf die Einzelnheiten Fragen, die sich zum Voraus nicht ahnen lassen, und deren Betrachtung nicht abgewiesen werden darf.

Bezeichnet man das Differential und Integral mit gebrochenen Exponenten durch

$$(7.)\qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} \quad \text{und} \quad \int^{\frac{p}{q}} fx\,(\partial x)^{\frac{p}{q}},$$

wo $\frac{p}{q}$ ein echter Bruch ist, so schliefst sich daran folgende Form:

$$(8.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} \quad \text{und} \quad \int^{r+\frac{p}{q}} fx\,(\partial x)^{r+\frac{p}{q}},$$

und man sieht, dafs jedes Differential und Integral mit gebrochenem Exponenten zwischen das Intervall zweier ganzen Zahlen (r und $r+1$), die Null nicht ausgenommen, fällt. Entwirft man hiernach ein Schema, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$(9.)\quad fx,\ \frac{\partial^{\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}},\ \frac{\partial fx}{\partial x},\ \frac{\partial^{1+\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{1+\frac{p}{q}}},\ \frac{\partial^2 fx}{(\partial x)^2},\ \ldots\ \frac{\partial^r fx}{(\partial x)^r},$$

$$\frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}},\quad \frac{\partial^{r+1} fx}{(\partial x)^{r+1}},$$

$$(10.)\quad fx,\ \int^{\frac{p}{q}} fx\,(\partial x)^{\frac{p}{q}},\ \int fx\,\partial x,\ \int^{1+\frac{p}{q}} fx\,(\partial x)^{1+\frac{p}{q}},\ \int^2 fx\,(\partial x)^2,\ \ldots$$

$$\ldots \int^r fx\,(\partial x)^r,\quad \int^{r+\frac{p}{q}} fx\,(\partial x)^{r+\frac{p}{q}},\quad \int^{r+1} fx\,(\partial x)^{r+1}.$$

Um nun zu der entwickelten Darstellung von (8.) zu gelangen, giebt es zwei Wege.

a. Man geht durch die Intervalle der ganzen Zahlen aufwärts bis man zu $\frac{\partial^r fx}{(\partial x)^r}$ oder $\int^r fx\,(\partial x)^r$ gekommen ist, und dann auf $\frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}$ oder $\int^{r+\frac{p}{q}} fx\,(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$ über.

b. Man geht unmittelbar auf $\frac{\partial^{\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}$ oder $\int^{\frac{p}{q}} fx\,(\partial x)^{\frac{p}{q}}$ über, und dann durch die Intervalle der ganzen Zahlen fort, bis man zu

$$\frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} \text{ oder } \int^{r+\frac{p}{q}} fx\,(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} \text{ gelangt.}$$

Dies führt auf zwei Entwicklungs- oder Übergangs-Methoden und veranlafst folgende Fragen:

Sind die beiden in (*a.* und *b.*) angedeuteten Methoden, die wir durch

(11.) $\dfrac{\partial^{\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}\left(\dfrac{\partial^r fx}{(\partial x)^r}\right)$ und $\dfrac{\partial^r}{(\partial x)^r}\left(\dfrac{\partial^{\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}\right)$,

(12.) $\int^{\frac{p}{q}}\left(\int^r fx(\partial x)^r\right)(\partial x)^{\frac{p}{q}}$ und $\int^r\left(\int^{\frac{p}{q}} fx(\partial x)^{\frac{p}{q}}\right)(\partial x)^r$

andeuten, gleich, oder nicht?

Welche mufs gewählt werden, wenn sie nicht gleich sind?

Der zunächst liegende Gedanke ist wohl, dafs beide Wege *gleich* sein werden. Die Untersuchung der einzelnen Fälle wird aber zeigen, dafs Dies nicht immer der Fall ist; wodurch die zweite Frage bedingt wird.

Um hiebei eine weitere Stütze und Sicherheit gegen unrichtige Resultate zu erlangen, werden noch folgende Übergänge dienen, die sich aus (4, 5, 6.) rechtfertigen. Es ist

(13.) $$\frac{\partial^r fx}{(\partial x)^r} = \int^m\left(\frac{\partial^{r+m} fx}{(\partial z)^m}\right)(\partial x)^m,$$

(14.) $$\frac{\partial^r fx}{(\partial x)^r} = \frac{\partial^{r+m}}{(\partial x)^m}\left(\int^m fx(\partial x)^m\right),$$

(15.) $$\int^r fx(\partial x)^r = \frac{\partial^m}{(\partial x)^m}\left(\int^{r+m} fx(\partial x)^{1+m}\right),$$

(16.) $$\int^r fx(\partial x)^r = \int^{r+m}\left(\frac{\partial^m fx}{(\partial x)^m}\right)(\partial x)^{r+m}.$$

Ist nun r ein echter Bruch $\frac{p}{q}$, so ergiebt sich aus (15. und 16.)

(17.) $$\int^{\frac{p}{q}} fx(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{\partial^{m-\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{m-\frac{p}{q}}}\left(\int^m fx(\partial x)^m\right) = \int^m\left(\frac{\partial^{m-\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{m-\frac{p}{q}}}\right)(\partial x)^m.$$

Der einfachste Fall für (17.) tritt ein, wenn $m=1$ gesetzt wird. Dann ist

(18.) $$\int^{\frac{p}{q}} fx(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{\partial^{1-\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{1-\frac{p}{q}}}\left(\int fx\,\partial x\right) = \frac{\partial^{\frac{p_1}{q}}}{\partial^{\frac{p_1}{q}}}\left(\int fx\,\partial x\right),$$

(19.) $$\int^{\frac{p}{q}} fx(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \int\left(\frac{\partial^{1-\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{1-\frac{p}{q}}}\right)\partial x = \int\left(\frac{\partial^{\frac{p_1}{q}} fx}{(\partial x)^{\frac{p_1}{q}}}\right)\partial x,$$

wenn $\frac{p_1}{q} = \frac{q-p}{q}$ ist und als zusammengehörig oder als ein Ganzes betrachtet werden soll. Die Form (19.) hat *Liouville* benutzt, die vorhergehende aber nicht, und es erklärt sich hieraus theilweise, warum er manche Resultate nicht

fand, die er erhalten hätte, wenn er die Form (18.) benutzt hätte. Ist nämlich die in (11. und 12.) gemachte Unterscheidung richtig, so mufs sie auch durch die Benutzung der in (13. bis 19.) aufgestellten Sätze bestätigt werden. Die Folge wird zeigen, dafs sich Dies wirklich so verhält.

Nachdem der Weg für unsern Entwicklungsgang vorgezeichnet ist, sollen nun die Differentiale und Integrale höherer Ordnung und mit gebrochenen Exponenten entwickelt, und es soll der Einflufs berücksichtigt werden, welchen die verschiedene Ordnung im Differentiiren und Integriren hat. Die Differentiale und Integrale der Functionen sollen gesondert von einander dargestellt werden. Dies stört eine folgerichtige Entwicklung nicht, und hat noch den Vortheil, dafs man die Harmonie zwischen den Differentialen und Integralen um so deutlicher hervortreten sieht, da sie auf verschiedenen Wegen gefunden werden.

§. 3.

Differentiale von x^n.

Es ist bekanntlich für ein ganzes positives r und n

$$(1.) \qquad \frac{\partial^r x^n}{(\partial x)^n} = n^{r|-1} x^{n-r} = \frac{1^{n|1} x^{n-r}}{2^{n-r|1}}.$$

So lange $n \geqq r$ ist, ergeben sich lauter darstellbare Werthe. Für $r > n$ geht das Differential in 0 über. Für $r = n$ ist

$$(2.) \qquad \frac{\partial^r x^r}{(\partial x)^r} = 1^{r|1}.$$

Für gebrochene Werthe von r und n ergeben sich nach (§. 2.) die nachstehenden besondern Formen; wobei auf die zur Anwendung zweckmäfsigste Darstellung in jedem einzelnen Fall Rücksicht genommen ist.

$$(3.) \qquad \frac{\partial^r x^{\frac{n}{m}}}{(\partial x)^r} = \frac{n^{r|-m} x^{\frac{n}{m}}}{m^r x^r} = (-1)^{r-1} \frac{n(m-n)(2m-n)\ldots((r-1)m-n)\sqrt[m]{x^n}}{m^r x^r},$$

$$(4.) \qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} x^n}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{n|1} x^n}{1^{-\frac{p}{q}+n|1}\sqrt[q]{x^p}} = \frac{q.2q.3q\ldots nq\, x^n}{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)(2q-p)\ldots(nq-p)\sqrt[q]{x^p}},$$

$$(5.) \qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} x^{\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}\sqrt[m]{x^n}}{1^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}|1}\sqrt[q]{x^p}}.$$

Die Gleichungen (3, 4, 5.) gelten ohne alle Beschränkung. Ist $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$, so wird, wie auch aus (2.) folgt,

$$(6.) \qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} \sqrt[q]{x^p}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = 1^{\frac{p}{q}|1}.$$

Man erhält für das $r$te Differential von x^{-n}:

$$(7.) \qquad \frac{\partial^r x^{-n}}{(\partial x)^r} = (-1)^r \frac{n^{r|1}}{x^{n+r}} = (-1)^r \frac{1^{n+r-1|1}}{1^{n-1|1} x^{n+r}} = \frac{1^{-n|1}}{1^{-n-r|1} x^{n+r}}.$$

Die letzte Form ergiebt sich aus (1.), wenn man $-n$ statt $+n$ setzt. Hieraus lassen sich folgende besondere Ausdrücke ableiten:

$$(8.) \qquad \frac{\partial^r x^{-\frac{n}{m}}}{(\partial x)^r} = \frac{(-1)^r n^{r|m}}{m^r x^r \sqrt[m]{x^n}} = (-1)^r \frac{n(n+m)(n+2m)\cdots(n+(r-1)m)}{m^r x^r \sqrt[m]{x^n}}.$$

$$(9.) \qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} x^{-n}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = (-1)^{\frac{p}{q}} \frac{1^{\frac{p}{q}+n-1|1}}{1^{n-1|1} x^n \sqrt[q]{x^p}} = (-1)^{\frac{p}{q}} \frac{1^{\frac{p}{q}|1}(q+p)(2q+p\cdots((n-1)q+p)}{q \cdot 2q \cdot 3q \ldots (n-1)q \cdot x^n \sqrt[q]{x^p}}.$$

$$(10.) \qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} x^{-\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{-\frac{n}{m}-\frac{p}{q}|1} x^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}}.$$

Ist $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$, so wird aus (10.)

$$(11.) \qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} x^{-\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}}{1^{-\frac{2p}{q}|1} \sqrt[q]{x^{2p}}}.$$

In den Formeln (7 bis 10.) findet keine Beschränkung für die Exponenten Statt. (No. 4. und 10.) gelten sogar für den Fall, wenn $n = 0$ ist. Man erhält dann:

$$(12.) \qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} x^0}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{1^{-\frac{p}{q}|1} \sqrt[q]{x^p}}$$

Von den hier zu machenden Anwendungen heben wir folgende hervor, welche entstehen, wenn $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, 0, 1, 2, 3, ... statt n in (4, 6 und 10.) gesetzt wird.

$$(13.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}} x^0}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(\pi x)}}, \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}} x}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}, \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}} x^2}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \cdot 4 x \sqrt{x}}{1 \cdot 3 \sqrt{\pi}}, \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}} x^3}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 x^2 \sqrt{x}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{\pi}}, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}} x^n}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n x^{n-1} \sqrt{x}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \sqrt{\pi}}. \end{cases}$$

$$(14.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x^0} = \frac{1}{\sqrt{(\pi x)}}, \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{(-\pi)}}{2x\sqrt{x}}, \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{3\sqrt{(-\pi)}}{2 \cdot 2 \cdot x^2 \sqrt{x}}, \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{3 \cdot 5 \sqrt{(-\pi)}}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot x^3 \sqrt{x}}, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1) \sqrt{(-\pi)}}{2 \cdot 2 \cdot 4 \ldots (2n-2) x^n \sqrt{x}}. \end{cases}$$

$$(15.)\quad \frac{\partial^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \qquad (16.)\quad \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{(-1)}}{x\sqrt{\pi}}.$$

Die zweite Form von (13.) haben ***Leibnitz*** und ***Euler*** (s. v. §. 1.) behandelt. ***Liouville*** giebt (***Journ. de l'éc. pol.*** T. XIII. p. 161) (No. 16.) an. Statt der allgemeinen Ausdrücke (4. und 5., 9. und 10.) giebt er eine Reductionsformel für $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}}$, also für einen sehr speciellen Fall, die bei einzelnen Anwendungen auf Integrale zurückweiset. Die hier befolgte Methode giebt gleich am Anfange der Untersuchung Resultate, welche ***Liouville*** erst am Schlusse einer weitläufigen und künstlichen Theorie findet, die wohl mit aus dem Grunde so verwickelt ist, weil er der ***Legendre***schen Bezeichnung der Facultäten folgt, welche einfachen und allgemeinen Entwicklungen widerstrebt.

§. 1.

Fortsetzung.

Bei der Darstellung der höhern Differentiale von x^n ist ferner der Einfluſs nachzuweisen, welchen die Ordnung im Differentiiren auf die Resultate

hat. Es ist nach (§. 2. und 3.):

$$(1.)\quad \frac{\partial^{r+s}x^n}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\left(\frac{\partial^s x^n}{(\partial x)^s}\right) = n^{s|-1}\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}x^{n-s} = n^{s|-1}(n-s)^{r|-1}x^{n-s-r}$$

$$= n^{s+r|-1}x^{n-s-r} = \frac{1^{n|1}x^{n-s-r}}{1^{n-s-r|1}}.$$

$$(2.)\quad \frac{\partial^{r+s}x^n}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{\partial^s}{(\partial x)^s}\left(\frac{\partial^r x^n}{(\partial x)^r}\right) = n^{r|-1}\frac{\partial^s}{(\partial x)^s}x^{n-r} = n^{r|-1}(n-r)^{s|-1}x^{n-r-s}$$

$$= n^{r+s|-1}x^{n-r-s} = \frac{1^{n|1}x^{n-r-s}}{1^{n-r-s|1}}.$$

Die Formeln (1. und 2.) führen für positive ganze n, r und s, zu dem Satze:

$$(3.)\quad \frac{\partial^{r+s}x^n}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{\partial^{s+r}x^n}{(\partial x)^{s+r}}.$$

Man erhält immer darstellbare Werthe, so lange $n \geqq s+r$ ist. Ist $r+s>n$, so ist,

$$(4.)\quad \frac{\partial^{r+s}x^n}{(\partial x)^{r+s}} = 0;$$

wie bekannt. Da nun r und s nach (§. 3.) auch gebrochene Zahlen sein können, so ergeben sich hier folgende besondere Formen:

$$(5.)\quad \frac{\partial^{r+s}x^{\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{n^{r+s|-m}\sqrt[m]{x^n}}{m^{r+s}x^{r+s}} = (-1)^{r+s-1}\frac{n(m-n)^{r+s-1|m}\sqrt[m]{x_n}}{m^{r+s}x^{r+s}}$$

$$= (-1)^{r+s-1}\frac{n(m-n)(2m-n)\ldots((r+s-1)m-n)\sqrt[m]{x^n}}{m^{r+s}x^{r+s}}.$$

$$(6.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}x^n}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{n|1}x^n}{1^{n-r-\frac{p}{q}|1}x^r\sqrt[q]{x^p}}$$

$$= \frac{1^{n|1}q^{n-r}x^n}{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)^{n-r|q}x^r\sqrt[q]{x^p}} = \frac{1^{n|1}q^{n-r}x^n}{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)(2q-p)\ldots((n-1)q-p)x^r\sqrt[q]{x^p}}$$

für $n>r$ und

$$= (-1)^{r-n}\frac{1^{n|1}p^{r-n|q}x^n}{1^{-\frac{p}{q}|1}q^{r-n}x^r\sqrt[q]{x^n}} = (-1)^{r-n}\frac{1^{n|1}p(p+q)\ldots(p+(r-n-1)q)x^n}{1^{-\frac{p}{q}|1}q^{r-n}x^r\sqrt[q]{x^p}}$$

für $r>n$

$$(7.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}x^{\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}\left(1+\frac{n}{m}-\frac{p}{q}-r\right)^{r|1}\sqrt[m]{x^n}}{1^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}|1}x^r\sqrt[q]{x^p}}.$$

In den Formen (5. und 7.) unterliegen die Exponenten keiner Beschränkung

untereinander, und die Ordnung im Differentiiren ist gleichgültig. Ist aber $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$ in (7.), so erhält man:

$$(8.) \quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} x^{\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}(1-r)^{r|1}\sqrt[m]{x^n}}{x^r \sqrt[q]{x^p}} = 0;$$

denn es ist $(1-r)^{r|1} = 0$.

Die Form (6.) führt immer auf darstellbare und unter sich gleiche Werthe, so lange $n \geqq r$ ist, in welcher Ordnung auch differentiirt werden mag. Wird aber $r > n$, so giebt eine verschiedene Ordnung im Differentiiren verschiedene Resultate, denn es ist

$$r^{r+\frac{p}{q}|-1} = n^{r|-1}(n-r)^{\frac{p}{q}|-1} = 0,$$

wenn $r \leqq n$ wird, während

$$n^{\frac{p}{q}+r|-1} = n^{\frac{p}{q}|-1}\left(n-\frac{p}{q}\right)^{r|-1}$$

immer darstellbare Werthe giebt. Dies führt zu dem folgenden Satze:

Steigt man bei der Entwicklung des Differentials

$$(9.) \quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} x^n}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}$$

zuerst durch die ganzen Exponenten in dem Schema (9., §. 2.) auf und geht von r auf $r+\frac{p}{q}$ über, so führt das vorstehende Differential auf 0, wenn $r > n$ ist. Geht man aber zuerst auf $\frac{p}{q}$ über und steigt dann durch die ganzen Exponenten in dem Schema (9.) bis auf $\frac{p}{q}+r$, so erhält man immer darstellbare Werthe.

Man hat daher:

$$(10.) \quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} x^n}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{\partial^{\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}\left(\frac{\partial^r x^n}{(\partial x)^r}\right) = 0,$$

$$(11.) \quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} x^n}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\left(\frac{\partial^{\frac{p}{q}} x^n}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}\right) = n^{\frac{p}{q}|-1}\left(n-\frac{p}{q}\right)^{r|-1} x^{n-r-\frac{p}{q}}.$$

In dem vorliegenden Fall gilt die Gleichung

$$\frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} x^n}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{\partial^{\frac{p}{q}+r} x^n}{(\partial x)^{\frac{p}{q}+r}}$$

nicht. Um daher darstellbare Werthe für das vorliegende Differential zu erhalten, ***mufs zuerst nach*** $\frac{p}{q}$ ***und dann nach*** r ***differentiirt werden.*** Die Ordnung im Differentiiren der Form (6.) ist also nur so lange gleichgültig, als $n \geqq r$ ist.

Für ein ***negatives*** n hat man aus (§. 3.):

$$(12.)\quad \frac{\partial^{r+s} x^{-n}}{(\partial x)^{r+s}} = (-1)^s n^{s|1} \frac{\partial^r}{(\partial x)^r} x^{-n-s} = (-1)^{s+r} n^{s|1} (n+s)^{r|1} x^{-n-s-r}$$

$$= (-1)^{s+r} n^{s+r|1} x^{-n-s-r} = (-1)^{s+r} \frac{1^{n+s+r-1|1}}{1^{n-1|1} x^{n+s+r}} = \frac{1^{-n|1} x^{-n-s-r}}{1^{-n-s-r|1}},$$

$$(13.)\quad \frac{\partial^{r+s} x^{-n}}{(\partial x)^{r+s}} = (-1)^r n^{r|1} \frac{\partial^s}{(\partial x)^s} x^{-n-r} = (-1)^{r+s} n^{r|1} (n+r)^{s|1} x^{-n-r-s}$$

$$= (-1)^{r+s} n^{r+s|1} x^{-n-r-s} = (-1)^{r+s} \frac{1^{n+r+s-1|1}}{1^{n-1|1} x^{n+r+s}} = \frac{1^{-n|1} x^{-n-r-s}}{1^{-n-r-s|1}}.$$

Aus (12. und 13.) ergiebt sich

$$(14.)\quad \frac{\partial^{r+s}}{(\partial x)^{r+s}} \frac{1}{x^n} = \frac{\partial^{s+r}}{(\partial x)^{s+r}} \frac{1}{x^n},$$

und die Ordnung im Differentiiren ist gleichgültig. Zugleich zeigt sich, dafs r, s und n untereinander keiner Beschränkung unterliegen und dafs sich immer gleiche und darstellbare Werthe auch bei verschiedener Ordnung im Differentiiren ergeben.

Aus (12. oder 13.) erhält man folgende besondere Formen:

$$(15.)\quad \frac{\partial^{r+s} x^{-\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{r+s}} = (-1)^{r+s} \frac{n^{r+s|m}}{m^{r+s} x^{r+s} \sqrt[m]{x^n}}$$

$$= \frac{n(n+m)(n+2m) \ldots (n+(r+s)m)}{m^{r+s} x^{r+s} \sqrt[m]{x^n}},$$

$$(16.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} x^{-n}}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = (-1)^{r+\frac{p}{q}} \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{n+r|q}}{1^{n-1|1} q^{n+r} x^{n+r} \sqrt[q]{x^p}}$$

$$= (-1)^{r+\frac{p}{q}} \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1} p(p+q)(p+2q) \ldots (p+(n+r-1)q)}{1^{n-1|1} q^{n+r} x^{n+r} \sqrt[q]{x^p}},$$

$$(17.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} x^{-\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = (-1)^{r+\frac{p}{q}} \frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}-1|1} \left(\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)^{r|1}}{1^{\frac{n}{m}-1|1} x^{r+\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}}.$$

Auch hier sollen einige besondere Fälle zu bequemerer Übersicht zusammengestellt werden. Setzt man $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ und für n und r allmälig die Werthe 0, 1, 2, ..., so ergiebt sich aus (6. und 15.):

$$(18.)\begin{cases} \frac{\partial^{\frac{3}{2}} x^0}{(\partial x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{2x\sqrt{(\pi x)}}, \\ \frac{\partial^{\frac{5}{2}} x^0}{(\partial x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{+1.3}{2.2x^2\sqrt{(\pi x)}}, \\ \frac{\partial^{\frac{7}{2}} x^0}{(\partial x)^{\frac{7}{2}}} = \frac{-1.3.5}{2.2.2x^3\sqrt{(\pi x)}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial^{r+\frac{1}{2}} x^0}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} = (-1)^r \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2^r x^r \sqrt{(\pi x)}}, \end{cases} \qquad (19.)\begin{cases} \frac{\partial^{\frac{3}{2}} x}{(\partial x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{+1}{\sqrt{(\pi x)}}, \\ \frac{\partial^{\frac{5}{2}} x}{(\partial x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-1}{2x\sqrt{(\pi x)}}, \\ \frac{\partial^{\frac{7}{2}} x}{(\partial x)^{\frac{7}{2}}} = \frac{+1.3}{2.2x^2\sqrt{(\pi x)}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial^{r+\frac{1}{2}} x}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} = (-1)^{r-1} \frac{1.3\ldots(2r-3)}{2^{r-1} x^{r-1} \sqrt{(\pi x)}}, \end{cases}$$

$$(20).\quad \frac{\partial^{r+\frac{1}{2}} x^n}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} = \frac{1^{n|1}\, 2^{n-r}\,[2(n-r)-1]^{r|2}\, x^n}{1^{n|2}\, x^r \sqrt{(\pi x)}} = (-1)^{n-r} \frac{1^{n|1}\, 1^{r-n|2}}{2^{r-n}\, x^{r-n} \sqrt{(\pi x)}}.$$

$$(21.)\begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{(-\pi)}}{2x\sqrt{x}}, \\ \frac{\partial^{\frac{3}{2}}}{(\partial x)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{x} = \frac{-1.3\sqrt{(-\pi)}}{2.2.x^2\sqrt{x}}, \\ \frac{\partial^{\frac{5}{2}}}{(\partial x)^{\frac{5}{2}}} \frac{1}{x} = \frac{1.3.5\sqrt{(-\pi)}}{2.2.2x^3\sqrt{x}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial^{r+\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} \frac{1}{x} = (-1)^r \frac{1.3\ \ldots\ (2r+1)\sqrt{(-\pi)}}{2^{r+1} x^{r+1} \sqrt{x}}, \end{cases}$$

$$(22.)\begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{x^2} = +\frac{1.3\sqrt{(-\pi)}}{2.2.x^2\sqrt{x}}, \\ \frac{\partial^{\frac{3}{2}}}{(\partial x)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{x^2} = -\frac{1.3.5\sqrt{(-\pi)}}{2.2.2.x^3\sqrt{x}}, \\ \frac{\partial^{\frac{5}{2}}}{(\partial x)^{\frac{5}{2}}} \frac{1}{x^2} = +\frac{1.3.5.7\sqrt{(-\pi)}}{2.2.2.2.x^4\sqrt{x}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial^{r+\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} \frac{1}{x^2} = (-1)^r \frac{1.3.5\ldots(2r+3)\sqrt{(-\pi)}}{2^{r+2} x^{r+2} \sqrt{x}}, \end{cases}$$

$$(23.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} \frac{1}{x^n} = (-1)^r \frac{1.3.5\ldots(2n+2r+1)\sqrt{(-\pi)}}{1.2.3\ldots(n-1)\,2^{n+r} x^{n+r} \sqrt{x}}.$$

Ferner ist aus (6. und 16.), wenn $r \pm n$ statt r gesetzt wird:

$$(24.)\quad \frac{\partial^{n+r+\frac{p}{q}} x^n}{(\partial x)^{n+r+\frac{p}{q}}} = (-1)^r \frac{1^{n|1} p^{r|q}}{1^{-\frac{p}{q}|1} q^r x^r \sqrt[q]{x^p}} = (-1)^r \frac{1^{n|1}.p(p+q)\dots(p+(r-1)q)}{1^{-\frac{p}{q}|1} q^r x^r \sqrt[q]{x^p}},$$

$$(25.)\quad \frac{\partial^{r-n+\frac{p}{q}} x^{-n}}{(\partial x)^{r-n+\frac{p}{q}}} = (-1)^{r-n+\frac{p}{q}} \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q}}{1^{n-1|1} q^r x^r \sqrt[q]{x^p}} = (-1)^{r-n+\frac{p}{q}} \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1} p(p+q)\dots(p+(r-1)q)}{1^{n-1|1} q^r x^r \sqrt[q]{x^p}},$$

wenn $r+n$ und $r-n$ ganze Zahlen sind. Man erkennt leicht eine hervortretende Harmonie in beiden Gebilden, und sieht, dafs die höhern Differentiale von x^n und x^{-n}, bei denen der Differential-Exponent den Exponenten der Grundgröfse um gleich viel Einheiten überragt (24.), oder von ihm übertroffen wird (25.), immer hinsichtlich der Gröfsen p, q, r und x gleiche Gebilde hervorbringen.

Hierher gehört die Darstellung der Differentiale höherer Ordnung und mit gebrochenen Exponenten von folgender Function:

$$fx = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots A_2 x^2 + A_1 x + A_0.$$

Man erhält die nachstehenden Resultate

$$(26.)\quad \frac{\partial^r fx}{(\partial x)^r} = \frac{A_n 1^{n|1} x^{n-r}}{1^{n-r|1}} + \frac{A_{n-1} 1^{n-1|1} x^{n-r-1}}{1^{n-r-1|1}} + \dots \frac{A_{r+1} 1^{r+1|1} x}{1^{1|1}} + A_r 1^{r|1} x^0.$$

$$(27.)\quad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{1^{-\frac{p}{q}|1} \sqrt[q]{x^p}} \Big(\frac{A_n q^{n|q} x^n}{(q-p)^{n|q}} + \frac{A_{n-1} q^{n-1|q} x^{n-1}}{(q-p)^{n-1|q}} + \frac{A_{n-2} q^{n-2|q} x^{n-2}}{(q-p)^{n-2|q}} + \dots$$
$$\dots \frac{A_2 q.2q x^2}{(q-p)(2q-p)} + \frac{A_1 q x}{q-p} + A_0 \Big),$$

$$(28.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} fx}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1}{1^{-\frac{p}{q}|1} x^r \sqrt[q]{x^p}} \Big(\frac{A_n 1^{n|1} q^{n-r} x^n}{(q-p)^{n-r|q}} + \frac{A_{n-1} 1^{n-1|1} q^{n-r-1} x^{n-1}}{(q-p)^{n-r-1|q}} + \dots$$
$$\dots \frac{A_2 1.2 q^{2-r} x^2}{(q-p)^{2-r|q}} + \frac{A_1 q^{1-r} x}{(q-p)^{1-r|q}} + \frac{A_0 q^{-r}}{(q-p)^{-r|q}} \Big).$$

Auf die Formel (28.) finden die in (9 bis 11.) angegebenen Gesetze Anwendung.

Hieran schliefst sich nun noch eine Bemerkung über den bekannten Satz, dafs eine ***beständige*** Gröfse ***kein*** Differential hat. Er hat seine volle Gültigkeit, so lange der Differential-Exponent eine ganze Zahl ist; er wird aber nach den bisher gefundenen Resultaten unrichtig, wenn es sich um die Darstellung eines Differentials mit ***gebrochenem*** Exponenten handelt; denn es

findet sich, wenn a eine beständige Gröfse bedeutet, aus (6.):

$$(29.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} a}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = a\frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} x^0}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = (-1)^r \cdot \frac{p^{r|q}\, a}{1^{-\frac{p}{q}|1} q^r x^r \sqrt[q]{x^p}}$$

$$= (-1)^r \cdot \frac{p(p+q)\ldots(p+(r-1)q)\,a}{1^{-\frac{p}{q}|1} q^r x^r \sqrt[q]{x^p}},$$

und es rechtfertigt sich die Behauptung, dafs ***beständige*** Gröfsen Differentiale unter den in (9 bis 11.) gegebenen Bestimmungen haben können, wenn letztere mit ***gebrochenen*** Exponenten vorkommen.

§. 5.

Differentiale des Binomiums $(ax+b)^r$.

Durch einfache Ableitung erhält man

$$(1.)\quad \frac{\partial^r (ax+b)^n}{(\partial x)^r} = n^{r|-1}(ax+b)^{n-r} a^r = \frac{1^{n|1} a^r (ax+b)^{n-r}}{1^{n-r|1}},$$

und hieraus die besondern Formen:

$$(2.)\quad \partial^r (ax+b)^{\frac{n}{m}} = \frac{n^{r|-m} a^r (ax+b)^{\frac{n}{m}}}{m^r (ax+b)^r}$$

$$= (-1)^{r-1} \frac{n(m-n)(2m-n)\ldots((r-1)m-n)\, a^r (ax+b)^{\frac{r}{m}}}{m^r (ax+b)^r}.$$

$$(3.)\quad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} (ax+b)^n}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{n|1} q^n a^{\frac{p}{q}} (ax+b)^{n-\frac{p}{q}}}{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)^{n|q}} = \frac{q.2q.3q\ldots nq \sqrt[q]{a^p}(ax+b)^{n-\frac{p}{q}}}{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)(2q-p)\ldots(nq-p)},$$

$$(4.)\quad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} (ax+b)^{\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{\frac{n}{m}} \sqrt[q]{a^p}\,(ax+b)^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}}}{1^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}|1}},$$

$$(5.)\quad \frac{\partial^r (ax+b)^r}{(dx)^r} = 1^{r|1} a^r \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} (ax+b)^{\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = 1^{\frac{p}{q}|1} \sqrt[q]{a^p}.$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$(6.)\quad \frac{\partial^r (ax+b)^{-n}}{(\partial x)^r} = \frac{(-1)^r n^{r|1} a^r}{(ax+b)^{n+r}} = \frac{(-1)^r . 1^{n+r-1|1} a^r}{1^{n-1|1}(nx+b)^{n+r}} = \frac{1^{-n|1} a^r}{1^{-n-r|1}(ax+b)^{n+r}},$$

$$(7.)\quad \frac{\partial^r (ax+b)^{-\frac{n}{m}}}{(\partial x)^r} = \frac{(-1)^r n^{r|m} a^r}{m^r (ax+b)^{r+\frac{n}{m}}} = \frac{(-1)^r (n+m)(n+2m)\ldots(n+(r-1)m)\, a^r}{m^r (ax+b)^{r+\frac{n}{m}}},$$

$$(8.)\quad \frac{\partial^{\frac{p}{q}}(ax+b)^{-n}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = (-1)^{\frac{p}{q}} \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}\, p^{n|m}\sqrt[q]{a^p}}{1^{n-1|1}(ax+b)^{n+\frac{p}{q}}\, q^n}$$

$$= (-1)^{\frac{p}{q}} \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}\, p(p+q)\dots(p+(m-1)q)\sqrt[q]{a^p}}{1^{n-1|1} q^n (ax+b)^{n+\frac{p}{q}}}.$$

$$(9.)\quad \frac{\partial^{\frac{p}{q}}(ax+b)^{-\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = (-1)^{\frac{p}{q}} \frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}}{1^{\frac{n}{m}-1|1}(ax+b)^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}}}.$$

Für alle diese Formeln bleiben die Bemerkungen (§. 3.) in Kraft. Die weitern hiehergehörigen Entwicklungen, die sich auf die bisher gezeigte Weise rechtfertigen lassen, sind:

$$(10.)\quad \frac{\partial^{s+r}(ax+b)^n}{(\partial x)^{s+r}} = n^{r+s|-1}\, a^{s+r}(ax+b)^{r-r-s} = \frac{1^{n|1}\, a^{s+r}(ax+b)^n}{1^{n-r-s|1}(ax+b)^{r+s}}.$$

Hiebei gilt

$$(11.)\quad \frac{\partial^{r+s}(ax+b)^n}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{\partial^{s+r}(ax+b)^n}{(\partial x)^{r+s}},$$

unter den zu (3. §. 4.) angeführten Beschränkungen. Es ist ferner:

$$(12.)\quad \frac{\partial^{r+s}(ax+b)^{\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{n^{r+s|-m}\, a^{s+r}(ax+b)^{\frac{n}{m}}}{m^{r+s}(ax+b)^{r+s}}$$

$$= (-1)^{r+s-1} \frac{a^{s+r}\, n(m-n)(2m-n)\cdots((r+s-1)m-n)(ax+b)^{\frac{n}{m}}}{m^{r+s}(ax+b)^{r+s}},$$

$$(13.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{n|1}\, q^{n-r}\, a^r\sqrt[q]{a^p}\,(ax+b)^n}{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)^{n-r|q}(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}}$$

$$= \frac{1^{n|1}\, q^{n-r}\, a^r\sqrt[q]{a^p}\,(ax+b)^{n-r-\frac{p}{q}}}{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)(2q-p)\dots((n-r)q-p)}$$

für $n > r$

$$= (-1)^{r-n} \frac{1^{n|1}\, p^{r-n|q}\, a^r\sqrt[q]{a^p}\,(ax+b)^n}{1^{-\frac{p}{q}|1}\, q^{r-n}(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}}$$

$$= (-1)^{r-n} \frac{1^{n|1}\, a^r\sqrt[q]{a^p}\, p(p+q)\dots(p+(r-n-1)q)}{1^{-\frac{p}{q}|1}\, q^{r-n}(ax+b)^{r-n+\frac{p}{q}}}$$

für $r > n$

$$(14.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^{\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}\, a^r \sqrt[q]{a^p}\,(ax+b)^{\frac{n}{m}}\left(1+\frac{n}{m}-\frac{p}{q}-r\right)^{r|1}}{1^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}|1}\,(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}}.$$

Auf die Ausdrücke (12 bis 14.) finden die zu (5. §. 4.) gemachten Bemerkungen ihre volle Anwendung, und

$$\frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{\partial^{\frac{p}{q}+r}(ax+b)^n}{(\partial x)^{\frac{p}{q}+r}}$$

findet nur unter bestimmten Beschränkungen, die Gleichung

$$\frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^{\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = 0$$

aber ohne Ausnahme Statt. Für ein negatives n erhält man:

$$(15.)\quad \frac{\partial^{r+s}(ax+b)^{-n}}{(\partial x)^{r+s}} = (-1)^{r+s}\frac{n^{r+s|+1}\,a^{r+s}}{(ax+b)^{n+r+s}} = (-1)^{r+s}\frac{1^{n+r+s-1|1}\,a^{r+s}}{1^{n-1|1}(ax+b)^{n+r+s}}$$
$$= \frac{1^{-n|1}\,a^{r+s}}{1^{-n-r-s|1}(ax+b)^{n+r+s}},$$

$$(16.)\quad \frac{\partial^{r+s}(ax+b)^{-\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{r+s}} = (-1)^{r+s}\frac{n^{r+s|m}}{m^{r+s}(ax+b)^{r+s+\frac{n}{m}}}$$
$$= (-1)^{r+s}\frac{n(m+n)(2m+n)\ldots(n+(r+s-1)m)}{m^{r+s}(ax+b)^{r+s+\frac{n}{m}}}.$$

$$(17.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^{-n}}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = (-1)^{r+\frac{p}{q}}\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}\,p^{n+r|q}\,a^r\sqrt[q]{a^p}}{1^{n-1|1}q^{n+r}(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}$$
$$= (-1)^{r+\frac{p}{q}}\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}\,a^r\sqrt[q]{a^p}\,p(p+q)\ldots(p+(r+s-1)q)}{1^{n-1|1}q^{n+r}(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}},$$

$$(18.)\quad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^{-\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = (-1)^{r+\frac{p}{q}}\frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}-1|1}\left(\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)^{r|1}\,a^r\sqrt[q]{a^p}}{1^{\frac{n}{m}-1|1}(ax+b)^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}+r}}.$$

Für (15 bis 18.) gilt die Gleichung

$$(19.)\quad \frac{\partial^{r+s}}{(\partial x)^{r+s}}\,\frac{1}{(ax+b)^n} = \frac{\partial^{s+r}}{(\partial x)^{s+r}}\,\frac{1}{(ax+b)^n},$$

ohne Ausnahme, und die Ordnung im Differentiiren ist gleichgültig.

Noch ist auf einen besondern Fall aufmerksam zu machen. Bei der Darstellung von $\frac{\partial^r (ax+b)^n}{(\partial x)^r}$ ist es nämlich gleichgültig, ob man zuerst differentiirt und dann das Binomium entwickelt, oder ob man zuerst das Binomium entwickelt und dann differentiirt; wie leicht durch die Ausführung zu sehen. Beide Resultate geben die gleiche endliche Glieder-Anzahl. Geht aber r in $\frac{p}{q}$ über, so erhält man auf den zwei angedeuteten Wegen:

$$\frac{\partial^{\frac{p}{q}}(ax+b)^n}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = n^{\frac{p}{q}|-1} a^{\frac{p}{q}} (ax+b)^{n-\frac{p}{q}}$$

$$= n^{\frac{p}{q}|-1} a^{\frac{p}{q}} \left[(ax)^{n-\frac{p}{q}} + \left(n-\frac{p}{q}\right)_1 (ax)^{n-\frac{p}{q}-1} b + \left(n-\frac{p}{q}\right)_2 (ax)^{n-\frac{p}{q}-2} b^2 \ldots \right]$$

$$= \frac{\partial^{\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} [(ax)^n + n(ax)^{n-1} b + (n)_2 (ax)^{n-2} b^2 + \cdots]$$

$$= a^{\frac{p}{q}} \left[n^{\frac{p}{q}|-1} (ax)^{n-\frac{p}{q}} + n(n-1)^{\frac{p}{q}|-1} (ax)^{n-1-\frac{p}{q}} b \right.$$

$$\left. + (n)_2 (n-2)^{\frac{p}{q}|-1} (ax)^{n-2-\frac{p}{q}} b^2 + \ldots \right].$$

Im ersten Falle entsteht eine ***unendliche*** Reihe von Gliedern, im zweiten eine ***endliche.*** Es läfst sich jedoch die zweite Form auf die erste zurückführen, wenn man die Facultäten zusammenfafst. Dies giebt

$$\frac{\partial^{\frac{p}{q}}(ax+b)^n}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{p}{q}} \left[n^{\frac{p}{q}} (ax)^{n-\frac{p}{q}} + n^{1+\frac{p}{q}|-1} (ax)^{n-1-\frac{p}{q}} b + \frac{n^{2+\frac{p}{q}|-1}}{1.2} (ax)^{n-2-\frac{p}{q}} b^2 \right.$$

$$\left. + \frac{n^{3+\frac{p}{q}|-1}}{1.2.3} (ax)^{n-3-\frac{p}{q}} b^3 + \cdots \right]$$

$$= n^{\frac{p}{q}|-1} a^{\frac{p}{q}} \left[(ax)^{n-\frac{p}{q}} + \left(n-\frac{p}{q}\right)_1 (ax)^{n-1-\frac{p}{q}} b \right.$$

$$\left. + \left(n-\frac{p}{q}\right)_2 (ax)^{n-2-\frac{p}{q}} b^2 + \cdots \right],$$

Diese Formel führt dann, wenn man das Gesetz, welches die ersten Glieder aussprechen, festhält, wieder, wie vorhin, auf eine unendliche Glieder-Anzahl. Um Harmonie in diese Darstellungen zu bringen, wird es am zweckmäfsigsten sein, ein Binomium bei der Differentiation als ein Ganzes zu behandeln; wie es der Begriff einer Function mit sich bringt. Die gleichen Bemerkungen gelten

auch für

$$\frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}$$

bei einem ganzen positiven n. Ein gebrochenes positives, so wie ein ganzes oder gebrochenes negatives n, führt ohne das auf eine unbegrenzte Glieder-Anzahl. In diesem Falle haben diese Bemerkungen keine Anwendung.

Wir stellen nun noch einige besondere Fälle der in diesem Paragraphen erhaltenen Resultate der Übersicht wegen zusammen. Setzt man $\frac{p}{q}=0$ in (3. und 8.) und statt n allmälig die Werthe 0, 1, 2, ..., so erhält man

$$(20.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}}(ax+b)^0}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(\pi(ax+b))}}, \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}(ax+b)}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2(ax+b)\sqrt{a}}{\sqrt{(\pi(ax+b))}}, \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}(ax+b)^2}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2.4.(ax+b)^2\sqrt{a}}{1.3\sqrt{(\pi(ax+b))}}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}(ax+b)^n}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2.4\ldots 2n\,(ax+b)^n\sqrt{a}}{1.3\ldots(2n-1)\sqrt{(\pi(ax+b))}}, \end{cases}$$

$$(21.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}}(ax+b)^{-1}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{(-a\pi)}}{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}(ax+b)^{-2}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1.3\sqrt{(-a\pi)}}{2.2(ax+b)^{\frac{5}{2}}}, \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}(ax+b)^{-3}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1.3.5\sqrt{(-a\pi)}}{1.2.2^3(ax+b)^{\frac{7}{3}}}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}(ax+b)^{-n}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)\sqrt{(-a\pi)}}{1.2\ldots(n-1)2^n(ax+b)^{n+\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Wird in (13. und 17.) $n=0,1,2,3,\ldots$, $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$ gesetzt, so findet man

$$(22.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^{\frac{3}{2}}(ax+b)^0}{(\partial x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-a\sqrt{a}}{2(ax+b)\sqrt{(\pi(ax+b))}}, \\ \frac{\partial^{\frac{5}{2}}(ax+b)^0}{(\partial x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1.3\,a^2\sqrt{a}}{2.2(ax+b)^{\frac{5}{2}}\sqrt{\pi}}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{r+\frac{1}{2}}(ax+b)^0}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} = (-1)^r\frac{1.3\ldots(2r-1)\,a^r\sqrt{a}}{2^r(ax+b)^{r+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}. \end{cases}$$

$$(23.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{\frac{1}{2}}(ax+b)}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2\sqrt{(a(ax+b))}}{\sqrt{\pi}}, \\ \dfrac{\partial^{\frac{3}{2}}(ax+b)}{(\partial x)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{(\pi(ax+b))}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial^{r+\frac{1}{2}}(ax+b)}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} = (-1)^{r-1}\dfrac{1.3\ldots(2r-3)\,a^r\sqrt{a}}{2^{r-1}(ax+b)^{r-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}, \end{cases}$$

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{\frac{3}{2}}(ax+b)^{-1}}{(\partial x)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{1.3\,a\sqrt{(-a\pi)}}{2.2\,(ax+b)^{\frac{5}{2}}}, \\ \dfrac{\partial^{\frac{5}{2}}(ax+b)^{-2}}{(\partial x)^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{1.3.5\,a^2\sqrt{(-a\pi)}}{2.2.2\,(ax+b)^{\frac{7}{2}}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial^{r+\frac{1}{2}}(ax+b)^{-1}}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} = (-1)^r\dfrac{1.3\ldots(2r+1)\,a^r\sqrt{(-a\pi)}}{2^{r+1}(ax+b)^{r+\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

$$(25.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{\frac{3}{2}}(ax+b)^{-2}}{(\partial x)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{1.3.5\,a\sqrt{(-a\pi)}}{2.2.2\,(ax+b)^{\frac{7}{2}}}, \\ \dfrac{\partial^{\frac{5}{2}}(ax+b)^{-2}}{(\partial x)^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{1.3.5.7\,a^2\sqrt{(-a\pi)}}{2.2.2.2\,(ax+b)^{\frac{9}{2}}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial^{r+\frac{1}{2}}(ax+b)^{-2}}{(\partial x)^{1+\frac{1}{2}}} = (-1)^r\dfrac{1.3\ldots(2r+3)\,a^r\sqrt{(-a\pi)}}{2^{r+2}(ax+b)^{r+\frac{5}{2}}}. \end{cases}$$

Die Formeln in diesem Paragraphen sind, wie man sieht, allgemeiner als die in den beiden vorhergehenden. Aus ihnen lassen sich die früher gegebenen ableiten.

§. 6.

Differentiale von $\log x$ und $\log(ax+b)$.

Für die Darstellung der höhern Differentiale der Logarithmen findet sich leicht:

$$(1.)\quad \frac{\partial^r \log x}{(\partial x)^r} = (-1)^{r-1}\frac{1^{r-1|1}}{x^r}, \qquad (2.)\quad \frac{\partial^r \log(ax+b)}{(\partial x)^r} = (-1)^{r+1}\frac{1^{r-1|1}\,a^r}{(ax+b)^r},$$

$$(3.)\quad \frac{\partial^r \log(ax)}{(\partial x)^r} = (-1)^{r-1}\frac{1^{r-1|1}}{x^r}.$$

Zwischen (1. und 3.) ist im Resultat kein Unterschied. Ferner ist

$$(4.)\qquad \frac{\partial^r \log x^n}{(\partial x)^r} = (-1)^{r-1}\frac{n.1^{r-1|1}}{x^r},$$

$$(5.)\qquad \frac{\partial^r \log x^r}{(\partial x)^r} = (-1)^{r-1}\frac{1^{r|1}}{x^r},$$

$$(6.)\qquad \frac{\partial^r \log (ax+b)^n}{(\partial x)^r} = (-1)^{r-1}\frac{n.1^{r-1|1}a^r}{(ax+b)^r},$$

$$(7.)\qquad \frac{\partial^r \log (ax+b)^r}{(\partial x)^r} = (-1)^{r-1}\frac{1^{r|1}a^r}{(ax+b)^r},$$

$$(8.)\qquad \frac{\partial^r \log \frac{1}{x}}{(\partial x)^r} = (-1)^r\frac{1^{r-1|1}}{x^r},$$

$$(9.)\qquad \frac{\partial^r \log \frac{1}{ax+b}}{(\partial x)^r} = (-1)^r\frac{1^{r-1|1}a^r}{(ax+b)^r},$$

für ein ganzes und gebrochenes r. Demnach ist

$$(10.)\qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} \log x}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = (-1)^{\frac{p}{q}-1}\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}}{\sqrt[q]{x^p}},$$

$$(11.)\qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} \log \frac{1}{x}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = (-1)^{\frac{p}{q}}\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}}{\sqrt[q]{x^p}},$$

$$(12.)\qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} \log (ax+b)}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = (-1)^{\frac{p}{q}}\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}},$$

$$(13.)\qquad \frac{\partial^{\frac{p}{q}} \log \frac{1}{ax+b}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}} = (-1)^{\frac{p}{q}}\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}}.$$

Ferner ist

$$(14.)\qquad \frac{\partial^{r+s} \log x}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{\partial^{s+r} \log x}{(\partial x)^{s+r}} = (-1)^{r+s-1}\frac{1^{r+s-1|1}}{x^{r+s}},$$

$$(15.)\qquad \frac{\partial^{r+s} \log (ax+b)}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{\partial^{s+r} \log (ax+b)}{(\partial x)^{s+r}} = (-1)^{r+s-1|1}\frac{1^{r+s-1|1}a^{r+s}}{(ax+b)^{r+s}},$$

$$(16.)\qquad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}} \log x}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = (-1)^{r+\frac{p}{q}-1}\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}p^{r|q}}{q^r x^r \sqrt[q]{x^p}},$$

$$(17.)\qquad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}\log\frac{1}{x}}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = (-1)^{r+\frac{p}{q}}\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}\,p^{r|q}}{q^r x^r \sqrt[q]{x^p}},$$

$$(18.)\qquad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}\log(ax+b)}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = (-1)^{r+\frac{p}{q}-1}\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}\,p^{r|q}\,a^r\sqrt[q]{a^p}}{q^r(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}},$$

$$(19.)\qquad \frac{\partial^{r+\frac{p}{q}}\log\frac{1}{ax+b}}{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = (-1)^{r+\frac{p}{q}}\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}\,p^{r|q}\,a^r\sqrt[q]{a^p}}{q^r(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}}.$$

Aus (10, 12, 16 und 18.) erhält man, für $r = 0, 1, 2, \ldots$ und $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, folgende besonderen Fälle:

$$(20.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}}\log x}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(-x)}}, \\ \frac{\partial^{\frac{3}{2}}\log x}{(\partial x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{(-\pi)}}{2x\sqrt{x}}, \\ \frac{\partial^{\frac{5}{2}}\log x}{(\partial x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1\,.\,3\,.\sqrt{(-\pi)}}{2\,.\,2\,.\,x^2\sqrt{x}}, \\ \quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ \frac{\partial^{r+\frac{1}{2}}\log x}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} = (-1)^{r-1}\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots(2r-1)\sqrt{(-\pi)}}{2^r x^r\sqrt{x}}; \end{cases}$$

$$(21.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}}\log(ax+b)}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\sqrt{(-\pi a)}}{\sqrt{(ax+b)}}, \\ \frac{\partial^{\frac{3}{2}}\log(ax+b)}{(\partial x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\sqrt{(-\pi a)}}{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial^{\frac{5}{2}}\log(ax+b)}{(\partial x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-1\,.\,3\,a^2\sqrt{(-\pi a)}}{2\,.\,2(ax+b)^{\frac{5}{2}}}, \\ \quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ \frac{\partial^{r+\frac{1}{2}}\log(ax+b)}{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}} = (-1)^{r-1}\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots(2r-1)\,a^r\sqrt{(-\pi a)}}{2^r(ax+b)^{r+\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Die Differentiale von $\log\frac{1}{x}$ und $\log\frac{1}{ax+b}$ unterscheiden sich von den vorstehenden nur durch die Ordnung der Zeichen. Für alle vorstehenden Gleichungen ist die Ordnung im Differentiiren gleichgültig.

§. 7.

Differentiale von a^x.

Es ergiebt sich leicht:

(1.) $\frac{\partial^r a^x}{(\partial x)^r} = a^x (\log a)^r$,

(2.) $\frac{\partial^r e^x}{(\partial x)^r} = e^x$,

(3.) $\frac{\partial^r a^{bx}}{(\partial x)^r} = b^r (\log a)^r a^{bx}$,

(4.) $\frac{\partial^r e^{bx}}{(\partial x)^r} = b^r e^{bx}$,

(5.) $\frac{\partial^{r+s} a^x}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{\partial^{s+r} a^x}{(\partial x)^{s+r}} = a^x (\log a)^{r+s}$,

(6.) $\frac{\partial^r a^{-x}}{(\partial x)^r} = (-1)^r a^{-x} (\log a)^r$,

(7.) $\frac{\partial^r a^{-bx}}{(\partial x)^r} = (-1)^r b^r (\log a)^r a^{-bx}$.

r und s unterliegen keiner Beschränkung und gelten für ganze und gebrochene Zahlen. Die Ordnung im Differentiiren ist gleichgültig.

§. 8.

Differentiale des Sinus und Cosinus.

Die Entwicklung der höhern Differentiale dieser Functionen giebt

(1.) $\frac{\partial^{2r} \sin mx}{(\partial x)^{2r}} = (-1)^r m^{2r} \sin mx$,

(2.) $\frac{\partial^{2r+1} \sin mx}{(\partial x)^{2r+1}} = (-1)^{r+1} m^{2r+1} \cos mx$.

Soll der Zeichenwechsel in die Function übergetragen werden, so vereinigen sich (1. und 2.) in folgender Form:

(3.) $\partial^r \sin mx = m^r \sin (mx + r \cdot \frac{1}{2}\pi)$.

Eben so erhält man

(4.) $\frac{\partial^{2r} \cos mx}{(\partial x)^{2r}} = (-1)^r m^{2r} \cos mx$,

(5.) $\frac{\partial^{2r+1} \cos mx}{(\partial x)^{2r+1}} = (-1)^{r+1} m^{2r+1} \sin mx$,

(6.) $\frac{\partial^r \cos mx}{(\partial x)^r} = m^r \cos (mx + r \cdot \frac{1}{2}\pi)$,

(7.) $\frac{\partial^{r+s} \sin mx}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{\partial^{s+r} \sin mx}{(\partial x)^{s+r}} = m^{r+s} \sin (mx + (r+s) \cdot \frac{1}{2}\pi)$,

(8.) $\frac{\partial^{r+s} \cos mx}{(\partial x)^{r+s}} = \frac{\partial^{s+r} \cos mx}{(\partial x)^{s+r}} = m^{r+s} \cos (mx + (r+s) \cdot \frac{1}{2}\pi)$,

für ganze und gebrochene r und s. Beide Werthe gelten ohne Beschränkung. Die Ordnung im Differentiiren ist gleichgültig.

§. 9.

Integrale von x^n.

Die höhern Integrale der bisher behandelten Functionen können entweder durch allmäligen Übergang von den niedern zu den höhern Integralen, oder durch Verbindung der in (§. 3 bis 8.) entwickelten Resultate mit dem entsprechenden Integrale gefunden werden; wobei zu bemerken ist, dafs

$$\int^r \left(\frac{\partial^r fx}{(\partial x)^r}\right)(\partial x)^r = fx$$

wird: oder auch dadurch, dafs man in den entwickelten Resultaten von (§. 3 bis 8.) $-r$ statt $+r$ setzt, weil

$$\int^r fx(\partial x)^r = \frac{\partial^{-r} fx}{(\partial x)^{-r}}$$

ist; wie gezeigt wurde.

Hier sollen hauptsächlich nur die zwei ersten Wege benutzt werden; woraus sich zugleich der Vortheil ergeben wird, dafs man einen Schlufs auf den Zusammenhang und die Harmonie zwischen den Differentialen und Integralen ziehen kann. Bei Darstellung der Integrale wird, wie bisher, auf die zur Anwendung zweckmäfsigste Form Rücksicht genommen werden. Die Constante wird nur da beachtet werden, wo sie eine besondere Aufmerksamkeit erfordert.

Man erhält anf den oben angedeuteten Wegen:

$$(1.)\quad \int^r x^n(\partial x)^r = \frac{x^{n+r}}{(n+r)^{r|-1}} = \frac{x^{n+r}}{(n+r)^{r|1}} = \frac{1^{n|1}x^{n+r}}{1^{n+r|1}}.$$

Die besondern Formen sind:

$$(2.)\quad \int^r x^{\frac{n}{m}}(\partial x)^r = \frac{m^r x^r \sqrt[m]{x^n}}{(n+m)^{r|m}} = \frac{m^r x^r \sqrt[m]{x^n}}{(m+n)(2m+n)\dots(n+rm)},$$

$$(3.)\quad \int^{\frac{p}{q}} x^n(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{q^{n|q}x^n\sqrt[q]{x^p}}{1^{\frac{p}{q}|1}(p+q)^{n|q}} = \frac{q.2q.3q\dots nq.x^n\sqrt[q]{x^p}}{1^{\frac{p}{q}|1}(p+q)(p+2q)\dots(p+nq)},$$

$$(4.)\quad \int^{\frac{p}{q}} x^{\frac{n}{m}}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}\sqrt[m]{x^n}\sqrt[q]{x^p}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}}.$$

In diesen Ausdrücken unterliegen r und n keiner Beschränkung. Man erhält immer darstellbare Werthe. Für ein negatives n erhält man

$$(5.)\quad \int^r x^{-n}(\partial x)^r = \frac{x^{-n+r}}{(-1)^r(n-r)^{r|1}} = \frac{x^{-n+r}}{(-n+r)^{r|-1}} = \frac{x^{-n+r}}{(-n+1)^{r|1}}$$
$$= \frac{1^{n-r-1|1}x^{-n+r}}{(-1)^r 1^{n-1|1}} = \frac{1^{-n|1}x^{-n+r}}{1^{-n+r|1}}.$$

Diese Gleichung liefert für ein ganzes n und r so lange darstellbare Werthe, als $n > r$ ist. Für $n = r$ wird sie unbrauchbar, denn sie geht dann in

$$(6.)\quad \int^r x^{-r}(\partial x)^r = \frac{x^0}{(-1)^r 0^{r|1}} = r^{-r|1}$$

über und weiset auf Logarithmen hin. Die gleiche Bemerkung gilt auch, wenn $r > n$ ist. Die besondern Formen von (5.) sind:

$$(7.)\quad \int^r x^{-\frac{n}{m}}(\partial x)^r = \frac{x^r m^r}{(m-n)^{r|m}\sqrt[m]{x^n}} = \frac{m^r x^r}{(m-n)(2m-n)\ldots(rm-n)\sqrt[m]{x^n}},$$

$$(8.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{1}{x^n}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)^{n-1|q}\sqrt[q]{x^p}}{(-1)^{\frac{p}{q}}q^{n-1|q}x^n}$$
$$= \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)(2q-p)\ldots((n-1)q-p)\sqrt[q]{x^p}}{(-1)^{\frac{p}{q}}q.2q.3q\ldots(n-1)qx^n},$$

$$(9.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{-\frac{n}{m}|1}\sqrt[q]{x^p}}{1^{-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}\sqrt[m]{x^n}} = \frac{1^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{x^p}}{(-1)^{\frac{p}{q}}1^{\frac{n}{m}-1|1}\sqrt[m]{x^n}}.$$

In (7 bis 9.) unterliegen, wie man sieht, die Exponenten keiner Beschränkung. Ist $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$, so wird aus (9.)

$$(10.)\quad \int^{\frac{p}{q}} x^{-\frac{p}{q}}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = 1^{-\frac{p}{q}|1}.$$

Es lassen sich die hier erhaltenen Resultate auch dadurch finden, dafs man nach (13 bis 19. §. 2.) verfährt; wodurch sich zugleich ein Beweis für ihre Richtigkeit ergiebt. Wir wählen zu dem Ende die Darstellung des etwas schwierigeren Falles $\int^{\frac{p}{q}} x^n(\partial x)^{\frac{p}{q}}$ und führen ihn auf eine Integration mit ganzem und auf eine Differentiation mit gebrochenem Exponenten zurück. Es ist

$$(11.)\quad \int^{\frac{p}{q}} x^n (\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{\partial^{1-\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{1-\frac{p}{q}}}\left(\int x^n \partial x\right) = \frac{\partial^{1-\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{1-\frac{p}{q}}}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)^{1-\frac{p}{q}|1}\, x^{n+\frac{p}{q}}}{n+1}$$

$$= n^{-\frac{p}{q}|-1}\, x^{n+\frac{p}{q}} = \frac{x^n \sqrt[q]{x^p}}{\left(n+\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}|-1}} = \frac{1^{n|1} q^n x^n \sqrt[q]{x^p}}{1^{\frac{p}{q}|1}(p+q)^{n|q}},$$

$$(12.)\quad \int^{\frac{p}{q}} x^n (\partial x)^{\frac{p}{q}} = \int\left(\frac{1^{1-\frac{p}{q}}\, x^n}{(\partial x)^{1-\frac{p}{q}}}\right)\partial x = \int n^{1-\frac{p}{q}|-1}\, x^{n-1+\frac{p}{q}}\,\partial x = \frac{n^{1-\frac{p}{q}|-1}\, x^n \sqrt[q]{x^p}}{n+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1^{n|1} x^n \sqrt[q]{x^p}}{1^{n-1+\frac{p}{q}|1}\left(n+\frac{p}{q}\right)} = \frac{1^{n|1} x^n \sqrt[q]{x^p}}{1^{n+\frac{p}{q}|1}} = \frac{1^{n|1} q^n x^n \sqrt[q]{x^p}}{1^{\frac{p}{q}|1}(p+q)^{n|q}}.$$

(Nr. 3, 11 und 12.) stimmen überein. Setzt man $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$, so ergiebt sich aus (3. und 8.)

$$(13.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{1}{2}} x^0 (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}, \\ \int^{\frac{1}{2}} x (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2.2x\sqrt{x}}{1.3\sqrt{\pi}}, \\ \int^{\frac{1}{2}} x^2 (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2.2.4x^2\sqrt{x}}{1.3.5\sqrt{\pi}}, \\ \int^{\frac{1}{2}} x^3 (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2.2.4.6x^3\sqrt{x}}{1.3.5.7\sqrt{\pi}}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int^{\frac{1}{2}} x^n (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2.2.4.6\ldots 2nx^n\sqrt{x}}{1.3.5\ldots(2n+1)\sqrt{\pi}}, \end{cases} \qquad (14.)\quad \begin{cases} \int \dfrac{^{\frac{1}{2}}(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{x^0} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}, \\ \int \dfrac{^{\frac{1}{2}}(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{x} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(-x)}}, \\ \int \dfrac{^{\frac{1}{2}}(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{(-x)}}, \\ \int \dfrac{^{\frac{1}{2}}(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{x^3} = \dfrac{1.3\sqrt{\pi}}{2.2.x^2\sqrt{(-x)}}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int \dfrac{^{\frac{1}{2}}(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{x^n} = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}x^{n-1}\sqrt{(-x)}}. \end{cases}$$

Aus (4. und 10.) ergiebt sich, wenn $\frac{p}{q} = \frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ gesetzt wird:

$$(15.)\quad \int^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{\pi}, \qquad (16.)\quad \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}.$$

Auf (Nr. 16.), wofür sich noch ein zweites Resultat ergiebt, werden wir später zurückkommen. Vorläufig ist hier zu bemerken, dafs *Liouville*, welcher dieses Integral (Journal d. l'éc. polyt. T. XIII. p. 161) des weitern behandelt hat, diese Darstellung, so wie die vorstehenden, nicht kannte.

Hieran schliefst sich die Integration der Function

$$fx = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots A_1 x + A_0$$

und man erhält

$$(17.)\quad \int^r fx\,(\partial x)^r = \frac{A^n 1^{n|1} x^{n+r}}{1^{n+r|1}} + \frac{A_{n-1} 1^{n-1|1} x^{n+r-1}}{1^{n+r-1|1}} + \frac{A_{n-2} 1^{n-2|1} x^{n+r-2}}{1^{n+r-2|1}} + \cdots$$
$$\cdots \frac{A_2 1^{2|1} x^{r+2}}{1^{r+2|1}} + \frac{A_1 x^{r+1}}{1^{r+1|1}} + \frac{A_0 x^r}{1^{r|1}},$$

$$(18.)\quad \int^{\frac{p}{q}} fx\,(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[q]{x^p}}{1^{\frac{p}{q}|1}}\Big(\frac{A_n q^{n|q} x^n}{(q+p)^{n|q}} + \frac{A_{n-1} q^{n-1|q} x^{n-1}}{(q+p)^{n-1|q}} + \frac{A_{n-2} q^{n-2|q} x^{n-2}}{(q+p)^{n-2|q}} + \cdots$$
$$\cdots \frac{A_2 q^{2|q} x^2}{(q+p)^{2|q}} + \frac{A q x}{q+p} + A_0\Big).$$

Vergleicht man die hier erhaltenen Resultate mit den in (§. 3.) gefundenen, so ergiebt sich, dafs im Allgemeinen

$$\partial^{-r} x^n (\partial x)^r = \int^r x^n (\partial x)^r \quad \text{und} \quad \frac{\partial^r x^n}{(\partial x)^r} = \int^{-r} x^n (\partial x)^{-r}$$

für alle Werthe von n und r ist; mit Ausnahme des in (6.) angegebenen Falles

$$\int^n x^{-r} (\partial x)^r,$$

wenn die Exponenten des Integralzeichens und der Gröfse x gleich und ganze Zahlen sind. Man kann daher unmittelbar von dem Differential-Ausdruck auf das Integral und umgekehrt (mit Ausnahme des eben genannten Falles) übergehen, wenn man $-r$ statt $+r$ setzt; wie Dies von dem besondern Fall $\left(\int \frac{\partial x}{x}\right)$, wenn $r = 1$, bekannt ist.

§. 10.

Entwicklung von $\int^{r+s} a^n (\partial x)^{r+s}$.

Man erhält durch die im vorigen Paragraph angegebenen Verfahren:

$$(1.)\quad \int^{r+s} x^n (\partial x)^{r+s} = \frac{x^{n+r+s}}{(n+r+s)^{r+s|-1}} = \frac{x^{n+r+s}}{(n+r)^{r+s|1}} = \frac{1^{n|1} x^{n+r+s}}{1^{n+r+s|1}}.$$

Ferner ist:

$$(2.)\quad \int^{r+s} x^n (\partial x)^{r+s} = \int^r \Big(\frac{x^{n+s}(\partial x)^s}{(n+s)^{s|-1}}\Big)(\partial x)^r = \frac{x^{n+s+r}}{(n+s+r)^{r|-1}(n+s)^{s|-1}}$$
$$= \frac{x^{n+s+r}}{(n+s+r)^{s+r|-1}} = \frac{1^{n|1} x^{n+s+r}}{1^{n+s+r|1}}.$$

Aus (1. und 2.) ist

$$(3.)\quad \int^{r+s} x^n(\partial x)^{r+s} = \int^{s+r} x^n(\partial x)^{s+r}.$$

Die Ordnung im Differentiiren ist gleichgültig; r, s und n unterliegen gegenseitig keiner Beschränkung. Die besondern Fälle sind aus (1. oder 2.):

$$(4.)\quad \int^{r+s} x^{\frac{n}{m}}(\partial x)^{r+s} = \frac{m^{r+s}x^{r+s}\sqrt[m]{x^n}}{(n+m)^{r+s|m}} = \frac{m^{r+s}x^{r+s}\sqrt[m]{x^n}}{(n+m)(n+2m)\dots(n+(r+s)m)},$$

$$(5.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} x^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{n|1}q^{n+r}x^{n+r}\sqrt[q]{x^p}}{1^{\frac{p}{q}|1}(p+q^{n+r|q}} = \frac{1^{n|1}q^{n+r}x^{n+r}\sqrt[q]{x^p}}{1^{\frac{p}{q}|1}(p+q)(p+2q)\cdots(p+(r+s)q)},$$

$$(6.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} x^{\frac{n}{m}}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}x^r\sqrt[m]{x^n}\sqrt[q]{x^p}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}\left(1+\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)^{r|1}}.$$

Auch in (4 bis 6.) findet keine Beschränkung in den Exponenten Statt. Die Ordnung im Integriren ist auch hier, wie leicht zu sehen, gleichgültig, während die Ordnung im Differentiiren bei (6. §. 4.) (der correspondirenden Formel von 5. §. 10.) nicht gleichgültig ist. Die Ausführung der in (1 bis 6.) angezeigten Rechnungen liefert daher immer die gleichen Resultate.

Für ein negatives n ergiebt sich

$$(7.)\quad \int^{r+s} x^{-n}(\partial x)^{r+s} = \frac{x^{-n+r+s}}{(-1)^{r+s}(n-r-s)^{r+s|1}} = \frac{x^{-n+r+s}}{(-n+r+s)^{r+s|-1}}$$
$$= \frac{1^{n-r-s-1|1}x^{-n+r+s}}{(-1)^{r+s}1^{n-1|1}} = \frac{1^{-n|1}x^{-n+r+s}}{1^{-n+r+s|1}}.$$

Ferner ist:

$$(8.)\quad \int^{r+s} x^{-n}(\partial x)^{r+s} = \int^{r}\left(\frac{x^{-n+s}}{(-1)^s(n-s)^{s|1}}\right)(\partial x)^r = \frac{x^{-n+s+r}}{(-1)^{r+s}(n-s-r)^{r|1}(n-s)^{s|1}}$$
$$= \frac{x^{-n+s+r}}{(-1)^{s+r}(n-s-r)^{s+r|1}} = \frac{1^{n-s-r-1|1}x^{-n+r+s}}{(-1)^{s+r}1^{n-1|1}} = \frac{1^{-n|1}x^{-n+s+r}}{1^{-n+s+r|1}}.$$

Die Gleichungen (7. und 8.) führen immer auf darstellbare Werthe, so lange $n > r+s$ ist. Unter dieser Bedingung ist auch die Ordnung im Differentiiren gleichgültig und man erhält

$$(9.)\quad \int^{r+s} \frac{(\partial x)^{r+s}}{x^n} = \int^{s+r} \frac{1}{x^n}(\partial x)^{s+r}.$$

Ist aber $r+s \gtreqless n$, so werden (7. und 8.) unbrauchbar und weisen auf Logarithmen. Die besonderen Formen von (7.) sind:

$$(10.)\quad \int^{r+s}\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}(\partial x)^{r+s} = \frac{m^{r+s}x^{r+s}}{(m-n)^{r+s|m}\sqrt[m]{x^n}} = \frac{m^{r+s}x^{r+s}}{(m-n)(2m-n)\cdots((r+s)m-n)\sqrt[m]{x^n}},$$

$$(11.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}\frac{1}{x^n}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)^{n-r-1|q}x^r\sqrt[q]{x^p}}{(-1)^{r+\frac{p}{q}}1^{n-1|1}q^{n-r-1}x^n}$$

$$= \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)(2q-p)\ldots[(n-r-1)q-p]\sqrt[q]{x^p}}{(-1)^{r+\frac{p}{q}}1^{n-1|1}q^{n-r-1}x^{n-r}}$$

für $n > r$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1^{-\frac{p}{q}|1}q^{r-n+1}x^{r-n}\sqrt[q]{x^p}}{(-1)^{\frac{p}{q}}1^{n-1|1}p^{r-n+1|q}}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1^{-\frac{p}{q}|1}q^{r-n+1}x^{r-n}\sqrt[q]{x^p}}{(-1)^{\frac{p}{q}}1^{n-1|1}p(p+q)\ldots(p+(r-n)q)}$$

für $r > n$

$$(12.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}x^{-\frac{n}{m}}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{-\frac{n}{m}|1}x^r\sqrt[q]{x^p}}{1^{-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}\left(1-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)^{r|1}\sqrt[m]{x^n}}.$$

In (10. und 12.) unterliegen die Exponenten keiner Beschränkung. Die Ordnung im Integriren ist gleichgültig und die Resultate bleiben dieselben. Bei (11.) ist Dies aber nicht der Fall. Wird nämlich zuerst nach r integrirt, so ist

$$\int^{r+\frac{p}{q}}x^{-n}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \int^{\frac{p}{q}}\left(\frac{x^{-n+r}}{(-1)^r(n-r)^{r|1}}\right)(\partial x)^{\frac{p}{q}}$$

und es gelten für diesen Ausdruck die zu (5. §. 9.) gemachten Bemerkungen Wird dagegen zuerst nach $\frac{p}{q}$ und dann nach r integrirt, so erhält man

$$\int^{r+\frac{p}{q}}x^{-n}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \int^{r}\left(\frac{x^{-n+\frac{p}{q}}}{(-1)^{\frac{p}{q}}\left(n-\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}|+1}}\right)(\partial x)^r$$

$$= \frac{x^{-n+\frac{p}{q}+r}}{(-1)^{\frac{p}{q}+r}\left(n-\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}|1}\left(n-\frac{p}{q}-r\right)^{r|1}}.$$

Die Facultäten im Nenner geben nämlich immer darstellbare Werthe. Der hier gefundene Ausdruck fällt aber mit (11.) zusammen. Es ist nemlich nach (No. 86.) des ersten Nachtrages:

$$\left(n-\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}}\left(n-\frac{p}{q}-r\right)^{r|1}=\frac{1^{n-1|1}}{1^{n-\frac{p}{q}-1|1}}\cdot\frac{1^{n-\frac{p}{q}-1|1}}{1^{n-\frac{p}{q}-r-1|1}}=\frac{1^{n-1|1}}{1^{n-\frac{p}{q}-r-1|1}}.$$

Wird dieser Werth eingeführt, so erhält man

$$\int^{r+\frac{p}{q}}x^{-n}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}=\frac{1^{n-\frac{p}{q}-r-1|1}\,x^{-n+\frac{p}{q}+r}}{(-1)^{\frac{p}{q}+r}\,1^{n-1|1}};$$

woraus sich die zwei Formen von (11.) ableiten lassen. Hieraus ergeben sich folgende Sätze.

Es ist immer

$$(13.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}x^{-n}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}=\int^{\frac{p}{q}+r}x^{-n}(\partial x)^{\frac{p}{q}+r},$$

so lange $n>r$ ist, und in diesem Falle ist die Ordnung im Integriren gleichgültig. Wird aber r gleich oder gröfser als n, so entstehen durch verschiedene Ordnung im Integriren verschiedene Resultate. Man erhält daher auf dem hier angezeigten Wege immer darstellbare Werthe, wenn in der Ordnung

$$\int^{\frac{p}{q}+r}x^{-n}(\partial x)^{\frac{p}{q}+r},$$

also zuerst nach $\frac{p}{q}$ und dann nach r integrirt wird. Die umgekehrte Ordnung im Integriren giebt unbrauchbare Formen und weiset auf Logarithmen.

Aufser den obigen Ausdrücken heben wir noch folgende hervor:

$$(14.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}}=\frac{1^{-\frac{p}{q}|1}\,x^r}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r},$$

$$(15.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{x^r\sqrt[q]{x^p}}=\frac{1^{-\frac{p}{q}|1}\,q^r}{(-1)^r p^{r|q}}=\frac{1^{-\frac{p}{q}|1}\,q^r}{(-1)^r p\,(p+q)\ldots(p+(r-1)\,q)}.$$

Setzt man $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$ und $r=1, 2, 3\ldots$, $n=0, 1, 2\ldots$ in (5. und 11.), so ergeben sich folgende specielle Fälle:

$$(16.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{3}{2}} x_0(\partial x)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2.2x\sqrt{x}}{1.3\sqrt{\pi}}, \\ \int^{\frac{5}{2}} x^0(\partial x)^{\frac{5}{2}} = \dfrac{2.2.2x^2\sqrt{x}}{1.3.5\sqrt{\pi}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int^{r+\frac{1}{2}} x^0(\partial x)^{r+\frac{1}{2}} = \dfrac{2^{r+1}x^r\sqrt{x}}{1.3.5\ldots(2r+1)\sqrt{\pi}}, \end{cases}$$

$$(17.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{3}{2}} x(\partial x)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2.2.2x^2\sqrt{x}}{1.3.5\sqrt{\pi}}, \\ \int^{\frac{5}{2}} x(\partial x)^{\frac{5}{2}} = \dfrac{2.2.2.2x^3\sqrt{x}}{1.3.5.7\sqrt{\pi}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int^{r+\frac{1}{2}} x(\partial x)^{r+\frac{1}{2}} = \dfrac{2^{r+2}x^{r+1}\sqrt{x}}{1.3.5\ldots(2r+3)\sqrt{\pi}}, \end{cases}$$

$$(18.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{3}{2}} \dfrac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{x} = \dfrac{2\sqrt{(x\pi)}}{\sqrt{-1}}, \\ \int^{\frac{5}{2}} \dfrac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{x} = \dfrac{2.2x\sqrt{(x\pi)}}{1.3\sqrt{-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int^{r+\frac{1}{2}} \dfrac{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}}{x} = \dfrac{2^r x^{r-1}\sqrt{(x\pi)}}{1.3\ldots(2r-1)\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

$$(19.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{3}{2}} \dfrac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{-\sqrt{-x}}, \\ \int^{\frac{5}{2}} \dfrac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\partial x^2} = \dfrac{-2\sqrt{(\pi x)}}{\sqrt{-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int^{r+\frac{1}{2}} \dfrac{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}}{x^2} = \dfrac{-2^{r-1}x^{r-2}\sqrt{(\pi x)}}{1.3.5\ldots(2r-3)\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

$$(20.)\quad \int^{r+\frac{1}{2}} \frac{(\partial x^{r+\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{x^r\sqrt{\pi}}{1.2.3\ldots r},$$

$$(21.)\quad \int^{r+\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{1}{2}}}{x^r\sqrt{x}} = \frac{2^r\sqrt{\pi}}{(-1)^r 1.3.5\ldots(2r-1)}.$$

Von den hier zusammengestellten Resultaten entwickelt ***Liouville*** (Journ. de l'éc. polyt. T. XIII. p. 151) den einzelnen Fall $\int^{\frac{3}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{x}$, aber sehr weitläufig und unter Zuziehung der von ihm benannten „Fonction complémentaire." Man sieht auch hier den Zusammenhang zwischen den Differentialen und Integralen. Die am Ende des vorigen Paragraphs gemachten Bemerkungen gelten auch hier.

(Der Schluſs folgt.)

3.

Vereinfachung des Beweises von *Cauchy*, dafs jede Gleichung *n*ten Grades wenigstens *eine* Wurzel hat.

(Von Herrn *J. Sufsmann*, Assistent im Königlichen Gewerbe-Institut zu Berlin.)

Cauchy beweiset in seinem „Cours d'analyse ch. X." diesen Satz in der Weise, dafs er für x den Ausdruck $u+v\sqrt{-1}$ einführt und die Function $F(u,v)=[\varphi(u,v)]^2+[\psi(u,v)]^2$ aufstellt. Dann zeigt er auf eine sehr umständliche Art, dafs diese Function ein Minimum habe, und dafs dieses Minimum gleich Null sein müsse. Daraus folgt dann, dafs auch $f(u+v\sqrt{-1})=f(x)$ für denselben Werth von u und v verschwindet.

Wie es scheint, läfst es sich leichter zeigen, dafs die Function $F(u,v)$ ein Minimum habe, wenn man den Gang der Function beobachtet, während u und v sich stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ ändern. Es ergiebt sich dann sehr einfach, dafs dieses Minimum gleich Null ist, wenn man ein bekanntes Gesetz aus der Differentialrechnung heranzieht.

Der Beweis gestaltet sich folgendermaafsen.

Es sei die geordnete Gleichung

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots+gx+k=0$$

gegeben, wo n eine positive ganze Zahl ist und $a, b, \ldots g, k$ beliebige reelle oder imaginäre bekannte Gröfsen sind.

Es werde x veränderlich angenommen und der gegebene Ausdruck gleich $f(x)$ gesetzt. Für w werde $u+v\sqrt{-1}$ gesetzt; was, wenn man sich die Substitution ausgeführt vorstellt, einen Ausdruck von der Form

$$\varphi(u,v)+\sqrt{-1}\,\psi(u,v)=f(x)$$

giebt.

Man bilde noch die Function

$$F(u,v)=[\varphi(u,v)]^2+[\psi(u,v)]^2.$$

Diese Function kann nie negativ werden. Setzt man nun $u=-\infty$, während v einen beliebigen endlichen Werth hat, so wird $F(u,v)=+\infty$. Denselben Werth erhält die Function für $u=+\infty$ und für einen beliebigen Werth von v. Eben so wird $F(u,v)=+\infty$ für beliebige endliche Werthe von u, wenn v

gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist. Haben dagegen u und v gleichzeitig endliche Werthe, so hat auch $F(u, v)$, weil es eine ganze Function von u und v ist, einen endlichen Werth. Läfst man nun u und v gleichzeitig sich stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ ändern, so wird $F(u, v)$, ***welche Werthe von u und v auch zusammengehören mögen,*** von $+\infty$ bis ins Endliche ***fallen,*** und dann wieder aus dem Endlichen bis zu $+\infty$ ***aufsteigen. Daraus folgt, dafs nothwendig die Function ein Minimum hat.***

Setzt man

$$u+v\sqrt{-1} = r(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$$

und die sich hieraus ergebenden Werthe von u und v in $F(u, v)$, so erhält man eine Function von r und y. Die Substitution wird ausgeführt, wenn man $x = r(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$ in $f(x)$ setzt. Es ergiebt sich:

$$\left\{\begin{array}{l} r^n\cos[ny] \\ +ar^{n-1}\cos[(n-1)y] \\ +br^{n-2}\cos[(n-2)y] \\ \cdots\cdots\cdots \\ +gr\cos y \\ +k \end{array}\right\} +\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} r^n\sin[ny] \\ +ar^{n-1}\sin[(n-1)y] \\ +br^{n-2}\sin[(n-2)y] \\ \cdots\cdots\cdots \\ +gr\sin y \end{array}\right\} = f(x) = f(u+v\sqrt{-1}).$$

Der Kürze wegen werde der Ausdruck in den ersten Klammern durch A, der in den zweiten durch B bezeichnet; dann ist

$$\varphi(u, v) = A; \quad \psi(u, v) = B \quad \text{und}$$
$$F(u, v) = A^2+B^2.$$

Es wurde nachgewiesen, dafs diese Function ein ***Minimum*** hat. Für dieses Minimum mufs, nach bekannten Gesetzen, die ***Ableitung*** von A^2+B^2, sowohl nach y als nach r, gleich Null sein, wenn man in die Ableitung diejenigen Werthe von r und y setzt, welche die Function zu einem Minimum machen.

Die Ableitung nach y ist

$$\left\{\begin{array}{l} -A(r^n n\sin[ny]+ar^{n-1}(n-1)\sin[(n-1)y]+\cdots gr\sin y) \\ +B(r^n n\cos[ny]+ar^{n-1}(n-1)\cos[(n-1)y]+\cdots gr\cos y) \end{array}\right\} = 0$$

oder, durch r dividirt:

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{l} -A(nr^{n-1}\sin[ny]+a(n-1)r^{n-2}\sin[(n-1)y]+\cdots g\sin y) \\ +B(nr^{n-1}\cos[ny]+a(n-1)r^{n-2}\cos[(n-1)y]+\cdots g\cos y) \end{array}\right\} = 0.$$

Die Ableitung nach r ist:

$$(2.)\quad \left\{\begin{array}{l} A(nr^{n-1}\cos[ny]+a(n-1)r^{n-2}\cos[(n-1)y]+\cdots g\cos y) \\ +B(nr^{n-1}\sin[ny]+a(n-1)r^{n-2}\sin[(n-1)y]+\cdots g\sin y) \end{array}\right\} = 0.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen den Factor von A in (1.) und den von B in (2.) durch C; ferner den Factor von B in (1.) und den von A in (2.) durch D, so nehmen die Gleichungen (1.) und (2.) die Gestalt:

$$AC = +BD,$$
$$AD = -BC$$

an. Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so erhält man

$$A^2 + B^2 = 0.$$

D. h. die Werthe von u und v, welche die Function $F(u, v)$ zu einem Minimum machen, machen dieses Minimum zu *Null*. Es kann aber $F(u, v)$ nur dann zu Null werden, wenn gleichzeitig $\varphi(u, v) = 0$ und $\psi(u, v) = 0$ ist, also ist auch

$$\varphi(u, v) + \sqrt{-1}\,\psi(u, v) = f(x) = 0,$$

folglich der Satz bewiesen.

Berlin, im Januar 1852.

4.

Eine neue Lösung des Problems der Rotation eines festen Körpers um einen Punct.

(Von Herrn Dr. *F. J. Richelot,* ordentl. Prof. der Math. an der Universität zu Königsberg.)

(Auszug einer in der Ferd. Dümmler'schen Buchhandlung zu Berlin 1851 erchienenen Schrift.)

In dieser Abhandlung werden die Grundgleichungen der Lösung des Problems der Rotation eines Körpers aus einer neuen Quelle abgeleitet; unter der Voraussetzung, dafs die Beschaffenheit der auf denselben wirkenden Kräfte überhaupt die Anwendung der Methode der Variation der Constanten zuläfst. Zu der Gattung solcher Bewegungen gehört bekanntlich die Drehung eines Weltkörpers um seinen Schwerpunct, indem der seine Bahnbewegung bedingende Centralkörper, eben so wie seine Trabanten, auf jene Drehung nur einen Einflufs von der genannten Art ausüben. Es lassen sich daher aus den Grundgleichungen des allgemeinen Problems der Rotation: z. B. bei unserer Erde, die Formeln für die Nutation der Erd-Axe und für die Präcession der Nachtgleichen ableiten, deren Aufstellung dem vorigen Jahrhundert zur unsterblichen Zierde gereicht.

Nachdem *Lagrange* seine allgemeine Theorie der Variation der Constanten der Elemente eines Planeten, welche er in den Acten der Akademie für die Jahre 1781 uud 1782 niedergelegt hatte und wodurch die früheren Arbeiten *Euler*'s über diesen Gegenstand vervollständigt waren, fast zu gleicher Zeit mit *Laplace,* durch eine neue Methode ersetzt hatte, worin die sogenannte Störungsfunction nicht nach den Coordinaten des gestörten Planeten, sondern nach den Elementen seiner ungestörten Bahn partiell differentiirt wird; und nachdem darauf derselbe grofse Geometer dieselbe Methode auf alle Probleme der Dynamik übertragen hatte, ist sie bisher im Wesentlichen nicht vervollkommnet worden. Jedoch gelang es *Poisson,* bald nachdem *Lagrange* sein Mémoire dem Institut vorgelegt hatte, dieselben allgemeinen Störungsgleichungen, in schon aufgelöseter Form, aus einer völlig neuen und versteckten Quelle abzuleiten und dadurch einen, wenn gleich erst bedeutend später ge-

hörig verstandenen und genügend gewürdigten Fortschritt, nicht nur in der Behandlung aller derartigen dynamischen Aufgaben, sondern auch in der Integration der Differential-Gleichungen überhaupt, zu veranlassen. In seiner hierauf bezüglichen berühmten Abhandlung über die Variation der Constanten in den Problemen der Dynamik, welche er dem Institut schon im Jahre 1809 vorlegte, wendet er seine Art der Ableitung der Störungsgleichungen auf zwei Beispiele an: auf die elliptische Bewegung eines Planeten, und auf die der Rotation eines Körpers; mit welcher ich mich hier beschäftigen werde. ***Poisson*** legt darin die von ***Euler*** in seiner ***Theoria motus corporum solidorum*** gegebene Lösung der Differentialgleichungen der Rotation eines Körpers, auf welchen gar keine äufsern Kräfte wirken, zum Grunde, variirt die sechs darin vorkommenden willkürlichen Constanten, und findet dann eine merkwürdige Analogie zwischen den Störungsgleichungen dieses und des vorher behandelten Problems der elliptischen Bewegung eines Planeten, welche auf einer correspondirend analogen Bedeutung der sechs willkürlichen Constanten in den Integralgleichungen beider Probleme beruht. Diese Constanten sind in der dort benutzten Bezeichnung folgende:

h ist die in der Gleichung der lebendigen Kräfte vorkommende Constante:

l die der Zeit hinzuzufügende Constante;

k ist die Summe der in Bezug auf die Principal-Ebene der Projection genommenen Projectionen derjenigen Flächenräume, welche von den aus dem festen Centrum bei dem ersten Problem nach dem sich bewegenden Centrum, und bei dem letztern nach allen Molecülen des Körpers gezogenen Radienvectoren bestrichen werden, multiplicirt respective in die Massen dieser Molecüle; wobei zu merken, dafs diese Summe gerade für ***diese*** Ebene, welche im erstern Problem ***Ebene der Bahn***, im letztern invariable Ebene genannt wird, einen gröfsern Werth erhält, als für alle andern;

γ ist die Neigung der Principal-Ebene der Projection gegen eine feste Ebene,

α ist die Länge des Knotens beider Ebenen, auf der festen Ebene von einer angenommenen Linie an gezählt;

g ist die zu einem in der Principal-Ebene der Projection gezählten Winkel (welcher im ersten Problem die wahre Anomalie des Planeten ist und im letztern zwischen dem Knoten jener Ebene mit einer sogenannten Haupt-Ebene des Körpers und einer angenommenen Linie gebildet wird) hinzutretende Constante.

In seiner schönen Abhandlung über die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunct hat ***Poisson*** die Correlation der sechs Constanten beider Probleme noch weiter verfolgt. Jedoch giebt es einen andern Gesichtspunct für eine gleichartige Behandlung beider Probleme, auf welchen man geführt wird, wenn man die, bei hinzutretenden äufsern Kräften, aus der Theorie der Variation der Constanten sich ergebenden Störungsgleichungen auf die einfachste Form bringt.

Schon ***Lagrange*** hat in der fünften Section des zweiten Theils seiner analytischen Mechanik die wichtige Bemerkung gemacht, dafs bei einem System von materiellen Puncten, auf welche nach drei auf einander senkrechten Coordinaten-Axen (eben so wie bei den Problemen, in denen eine sogenannte Störungsfunction existirt) solche Kräfte wirken, welche die partiellen Differentialquotienten einer und derselben Function (Kräftefunction genannt) nach den respectiven Coordinaten der Puncte sind, die dem Anfangswerthe der Zeit entsprechenden Werthe der Coordinaten und der nach den drei Axen zerlegten Geschwindigkeiten, die Eigenschaft besitzen, als willkürliche Constanten der Integralgleichungen des Problems betrachtet, besonders einfache Störungsgleichungen mit sich zu führen. In der That wird dafür das Differential eines jeden Anfangswerths der Coordinaten nach der Zeit, dem partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction nach dem entsprechenden Anfangwerthe der Geschwindigkeitscomponente, gleich, und das Differential eines jeden Anfangswerths dieser Componenten nach der Zeit, stimmt mit dem entgegengesetzten Werthe des partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction nach dem entsprechenden Anfangswerthe der Coordinaten, überein.

In den Monatsberichten der Akademie vom Jahre 1838 hat ***Jacobi*** zuerst dieselbe einfache Form der Störungsgleichungen, nicht allein auf den Fall ausgedehnt, wo die Kräftefunction die Zeit explicite enthält, sondern auch namentlich gezeigt, dafs für die Bewegung eines nicht mehr freien, sondern gegebenen Bedingungsgleichungen unterworfenen Systems von materiellen Puncten, statt der Anfangswerthe der Variabeln, die Anfangswerthe der diesen Bedingungsgleichungen identisch genügenden Variabeln in diese Form der Störungsgleichungen eingeführt werden können; endlich aber auch für den Fall der Planetenbewegung sechs andere Elemente als die gewöhnlichen angegeben, welche jedoch von diesen wenig abweichen und welche dieselben und damit zusammenhängende Eigenschaften mit den Anfangswerthen der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten gemein haben. An einem andern Orte, im fünften

Bande der *Comptes rendus*, hat derselbe grofse Geometer auch die Quelle angegeben, aus welcher dieses und ähnliche Systeme von Elementen bei den übrigen Problemen der Dynamik fliefsen, indem er daselbst folgendes Theorem aufstellt:

Wenn die n Bewegungsgleichungen eines freien Systems materieller Puncte, deren Coordinaten x, y, z, x_1, y_1, z_1, etc. sind, die folgenden sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \text{ etc.},$$

so dafs m, m_1, etc. die Massen der respectiven Puncte, t die Zeit, U die Kräftefunction, und Ω die Störungsfunction bezeichnen, und es ist V die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Sigma\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\} - U - h = 0$$

(wo das Summenzeichen auf alle Puncte des Systems ausgedehnt wird) mit den $n-1$ willkürlichen Constanten

$$\alpha_1, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1},$$

während

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, \tau$$

beliebige constante Gröfsen bezeichnen: so sind nicht nur

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau$$

die endlichen Integralgleichungen des ungestörten Problems, dessen Differentialgleichungen aus den obern dadurch folgen, dafs man $\Omega = 0$ setzt, mit den $2n$ willkürlichen Constanten,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}, h,$$
$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, \tau,$$

sondern es besitzen diese Constanten auch aufserdem die Eigenschaft, dafs sie, als Variabeln in das gestörte Problem eingeführt, auf folgende Differentialgleichungen führen:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2}, \ldots\ldots \frac{d\alpha_{n-1}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_{n-1}}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau},$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial \beta_2}{dt} = -\frac{d\Omega}{\partial \alpha_2}, \ldots \frac{d\beta_{n-1}}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{n-1}}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial h};$$

welches die obenerwähnte canonische Form der Störungsgleichungen ist.

Während *Jacobi* selbst keinen seiner Beweise dieses Theorems, welches mit der in seiner berühmten Abhandlung im 17. Bande dieses Journals auseinandergesetzten *Hamilton-Jacobi*'schen Theorie der Integration der dynamischen Gleichungen und der partiellen Differentialgleichungen aufs innigste zusammenhangt, bisher bekannt gemacht hat, findet man im 13. Bande des Journals von *Liouville* eine kurze Ableitung desselben von Hrn. *Desboves,* nebst einer Anwendung auf die elliptische Bewegung des Planeten; wobei sich die von *Jacobi* oben erwähnten sechs Elemente ergeben.

Nach dem bisher Vorgetragenen bietet sich das Problem: auf die Rotation eines festen Körpers um einen Punct diese eben auseinandergesetzte Theorie anzuwenden, von selbst dar. Ich habe mir daher die Aufgabe gestellt, auf diesem Wege ein ähnliches, und analoge Systeme von Elementen bei dem Problem der Rotation, durch Anwendung des angeführten Theorems auf diesen Fall der nicht freien Bewegung aufzufinden und dadurch ein neues und wichtiges Beispiel dieser Theorie auszuführen. Es geht aus dem Vorigen ebenfalls hervor, dafs dieser Zweck durch die Integration derjenigen partiellen Differentialgleichung erreicht wird, auf welche die *Hamilton*'sche Theorie in diesem Probleme führt.

Wenn es übrigens nur darauf ankäme, ein System von Elementen zu finden, welches die obige Eigenschaft besitzt, so kann man dasselbe aus den von *Poisson* am angeführten Orte aufgestellten Störungsgleichungen auch ohne Weiteres ableiten. Die dazu nöthige leichte Modification der oben angeführten sechs Constanten besteht darin, dafs man an Stelle der Constante h, $-2t_1$ setzt und statt des Elements γ die Gröfse $\psi_1 = -\varkappa\cos\gamma$ einführt. Bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction nach den sechs Elementen

$$t_1,\ \varkappa,\ \psi_1,\ l,\ \alpha,\ g$$

durch hinzugefügte Klammern, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial h} &= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t_1}\right),\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa}\right)-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_1}\right)\cos\gamma,\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma} &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_1}\right)\varkappa\sin\gamma,\\
\frac{\partial\Omega}{\partial l} &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right),\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right),\\
\frac{\partial\Omega}{\partial g} &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right).
\end{aligned}$$

Da aufserdem die Gleichungen:

$$\frac{dh}{dt} = -2\frac{dt_1}{dt},$$

$$\varkappa \sin\gamma \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\psi_1}{dt} + \cos\gamma \frac{d\varkappa}{dt}$$

aus der Definition von t_1 und ψ_1 von selbst sich ergeben, so gehen die von ***Poisson*** gegebenen sechs Gleichungen:

$$\frac{dh}{dt} = -2\frac{\partial\Omega}{\partial l},$$

$$\frac{dl}{dt} = +2\frac{\partial\Omega}{\partial h},$$

$$\frac{d\varkappa}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial g},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{\varkappa\sin\gamma}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma},$$

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} - \frac{\cos\gamma}{\varkappa\sin\gamma}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = +\frac{\cos\gamma}{\varkappa\sin\gamma}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial g} + \frac{1}{\varkappa\sin\gamma}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha},$$

sofort in folgende über:

$$\frac{dt_1}{dt} = +\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right), \quad \frac{d\varkappa}{dt} = +\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right), \quad \frac{d\psi_1}{dt} = +\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\right),$$

$$\frac{dl}{dt} = -\left(\frac{\partial\Omega}{dt_1}\right), \quad \frac{dg}{dt} = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa}\right), \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_1}\right),$$

welche die oben erwähnte Form haben.

5.

Über einige Grundformeln der Geodäsie.

(Von Herrn *Ferd. Minding*, Prof. der Mathematik an der Universität zu Dorpat.)

(Nach dem „Bulletin phys. mathém." T. VIII. No. 6.)

Im ersten Bande der astronomischen Nachrichten, S. 36 und 87, giebt *Bessel* unter Anderem auch Formeln, um aus den auf dem Erdsphäroïd beobachteten Winkeln die wahren Werthe der Winkel geodätischer Dreiecke abzuleiten. Da sich nämlich die Richtung des ersten Elements der doppelt gekrümmten geodätischen Linien nicht unmittelbar beobachten läfst, so mufs man sich begnügen, den Winkel zwischen zwei, durch den Ort des Beobachters gelegten verticalen Ebenen zu messen. Zwar sind für sehr kurze Strecken beiderlei Winkel als völlig gleich anzusehen, nicht blofs auf dem Umdrehungs-Ellipsoïd, sondern auf jeder krummen Fläche; bei den heutigen Messungen aber, wo Dreieckseiten vorkommen, welche einen vollen Grad sogar noch überschreiten, bedarf es der analytischen Entwickelung, um sich ein sicheres Urtheil über den Betrag des begangenen Fehlers zu verschaffen.

Bessels Formel beruht auf den von ihm im vierten Bande d. astr. N. (St. 86) entwickelten Ausdrücken für die kürzeste Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoïd. Da jedoch an genanntem Orte ihre Herleitung nicht gegeben ist, so gedenke ich zuerst auf diese einzugehen, dann aber den Gegenstand allgemeiner zu betrachten. Man nenne α das Azimuth der geodätischen Linie AB bei A, u' und u die reducirten Breiten der Puncte A und B, ω ihren Längen-Unterschied, und führe noch mit *Bessel* die Hülfsgröfsen Ω und σ ein, welche einem sphärischen Dreiecke abc angehören, in welchen $ab = \sigma$, $ac = \frac{1}{2}\pi - u'$, $bc = \frac{1}{2}\pi - u$, $\angle cab = \alpha$, $\angle cab = \Omega$ ist; so gelten folgende Gleichungen:

$$(1.) \qquad \sin u = \sin u' \cos\sigma + \cos u' \sin\sigma \cos\alpha,$$

$$(2.) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\cos u \sin\Omega}{\cos u' \sin u - \sin u' \cos u \cos\Omega},$$

$$\omega = \int_0^{\Omega} \sqrt{(1 - e\cos u^2)} \, . \, d\Omega,$$

oder, weil hier nur die erste Annäherung gebraucht wird:

$$(3.) \qquad \omega = \Omega - \tfrac{1}{2} e^2 \sigma \cos u' \sin\alpha.$$

Werden ferner die Coordinaten von A und B in bekannter Weise ausgedrückt durch

$$(A.) \quad x' = a\cos u'; \qquad y' = b\sin u'; \qquad z' = 0.$$

$$(B.) \quad x = a\cos u\cos\omega; \qquad y = b\sin u; \qquad z = a\cos u\sin\omega,$$

wo $b = a\sqrt{(1-e^2)}$ die halbe Umdrehungsaxe bezeichnet, so ergiebt sich für die Neigung i einer durch die Normale in A und durch B gelegten Ebene gegen den Meridian in A:

$$(4.) \quad \operatorname{tang} i = \frac{\cos u\sin\omega\sqrt{(1-e^2\cos u^2)}}{\sin u\cos u' - \cos u\sin u'\cos\omega - e^2\cos u'(\sin u - \sin u')}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck anstatt ω seinen genäherten Werth aus (3.), entwickelt ihn nach e^2, mit Vernachläfsigung der zweiten und höheren Potenzen dieser Gröfse, schafft mittels der Gleichungen

$$\cos u\sin\Omega = \sin\alpha\sin\sigma,$$
$$\cos u'\cos u\cos\Omega = \cos\sigma - \sin u\sin u'$$

und der obigen unter (1.) Ω und u hinweg, so dafs nur noch u', α und σ zurückbleiben, und geht von den Tangenten auf die Winkel über; so erhält man

$$(5.) \quad \alpha = i - \tfrac{1}{2}e^2\cos u'\sin\alpha\left\{\left(1-\frac{\sigma}{\operatorname{tang}\sigma}\right)\cos u'\cos\alpha - \left(2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma - \sigma\right)\sin u'\right\},$$

oder, nach σ entwickelt, wobei das erste Glied in der Anwendung schon allein ausreicht:

$$\alpha = i - \tfrac{1}{12}e^2\sigma^2\cos u'^2\sin 2\alpha - \cdots$$

Obgleich hiernach die Verbesserung des beobachteten Winkels i in wirklich vorkommenden Fällen nur die Hundertel der Secunde treffen kann, so würde doch eine störende Dunkelheit in den Grundlagen der Rechnung bleiben, wenn man ihre Entwickelung überginge. Diese wird aber beträchtlich abgekürzt, wenn man sie allgemein für jede krumme Fläche ausführt. Bringt man nämlich die Gleichung der Fläche, oder vielmehr ihres zunächst um einen Punct A liegenden Theiles, auf die bekannte Reihenform

$$z = \alpha\tfrac{1}{2}x^2 + \beta\tfrac{1}{2}y^2 + \cdots$$

und benutzt die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + p\frac{d^2z}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} + q\frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

wo $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$ ist, so ergeben sich für eine von A ausgehende kürzeste Linie, deren erstes Element mit x den Winkel φ macht und deren Bogen s ist, Reihen nach Potenzen von s, von welchen ich hier nur die ersten Glieder

hersetze, nämlich:

$$x = s\cos\varphi - \alpha\varrho\cos\varphi\tfrac{1}{6}s^3 \ldots \quad y = s\sin\varphi - \beta\varrho\sin\varphi\tfrac{1}{6}s^3 \ldots \quad z = \varrho\tfrac{1}{2}s^2 \ldots$$

$\varrho = \alpha\cos\varphi^2 + \beta\sin\varphi^2$ ist die Krümmung der Fläche in der Richtung des ersten Elements der kürzesten Linie. Bezieht man nun x, y, z und s auf einen bestimmten Punct B dieser Linie, und setzt $y = x\,\mathrm{tang}\,i$, so ergiebt sich:

$$\mathrm{tang}\,i = \mathrm{tang}\,\varphi\left\{\frac{1-\beta\varrho\frac{1}{8}s^2\ldots}{1-\alpha\varrho\frac{1}{6}s^2\ldots}\right\},$$

oder

$$i = \varphi + (\alpha-\beta)\varrho\sin\varphi\cos\varphi\tfrac{1}{6}s^2\cdots$$

Allgemein hangt daher die Abweichung der Anfangsrichtung eines kleinen Bogens der kürzesten Linie von der nach dem Endpuncte desselben gerichteten, durch den Anfangspunct gelegten verticalen Ebene, hauptsächlich von dem Unterschiede der gröfsten und kleinsten Krümmung der Fläche im Anfange der kürzesten Linie ab.

Auf dem Umdrehungs-Ellipsoïd hat man für den Punct, wo $x = a\cos u$, $y = a\sqrt{(1-e^2)}\sin u$, $z = 0$, die Krümmung im ***Meridiane:***

$$\alpha = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{a(1-e^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und im ***Breitenkreise:***

$$\beta = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{a(1-e^2\cos u^2)^{\frac{1}{2}}};$$

mithin

$$\alpha-\beta = \frac{\sqrt{(1-e^2)}\,.\,e^2\cos u^2}{a(1-e^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn man sich mit der ersten Potenz von e^2 begnügt:

$$\varphi = i - \tfrac{1}{12}e^2\cos u^2\sin 2\varphi\frac{s^2}{a^2}\cdots;$$

wie vorhin, da φ dem obigen α entspricht und näherungsweise $a\sigma = s$ ist.

Im Allgemeinen dürfte es für die Darstellung der Geodäsie erspriefslich sein, die Rechnung, wenigstens in ihren Grundlagen, von jeder bestimmten Voraussetzung über die Gestalt der Erde frei zu halten. Diese Absicht, welche mich auch im Vorstehenden leitete, veranlafst mich noch zu den folgenden Entwickelungen; an welche sich einige in rein geometrischer Hinsicht vielleicht bemerkenswerthe Folgerungen anknüpfen. Dabei werde ich mich der Buchstaben p, q, r, s, t stets in der Bedeutung bedienen, dafs

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy \text{ ist.}$$

Dreht sich ein Körper von ***beliebiger*** Gestalt um eine in ihm und im

Raume feste Axe, welche die der z sei, so ist bekanntlich $q = kp$ die Gleichung einer Meridiancurve auf seiner Oberfläche. Z. B. für $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ist $y = \frac{kb^2}{a^2} x$ diese Gleichung. Dieselbe umfafst nämlich alle Puncte der Fläche, deren Normalen der Meridian-Ebene $y = kx$ parallel sind, oder deren Zenithpuncte an der Himmelskugel in einerlei Meridian liegen. Für ein im Puncte xyz anfangendes Element der Meridiancurve hat man daher $dq = kdp$, oder $pdq = qdp$, mithin:

$$dx : dy : dz = A : B : C,$$

wo

$$A = pt - qs, \quad B = qr - ps, \quad C = Ap + Bq \text{ ist.}$$

Bezeichnet nun $d\sigma$ das Bogen-Element einer kürzesten Linie im Puncte xyz, und dx, dy, dz seine Projectionen auf die Axen, so erhält man das Azimuth α desselben aus der Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{Adx + Bdy + Cdz}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)} \cdot d\sigma}$$

und die Polhöhe P aus

$$\sin P = \frac{1}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \quad \text{oder} \quad \text{cotang } P = \sqrt{(p^2 + q^2)}.$$

Sind daher die Coordinaten einer kürzesten Linie nach Potenzen ihres Bogens σ entwickelt, deren Coëfficienten von dem Anfangspuncte der Linie und der Richtung ihres ersten Elements abhängen werden, so lassen sich mittels vorstehender Ausdrücke auch Azimuth und Polhöhe in Reihen nach Potenzen von σ darstellen.

Für die Curven gleicher Polhöhe ist nach Obigem:

$$p^2 + q^2 = \text{Const.}, \quad \text{oder} \quad pdp + qdq = 0;$$

daher:

$$dx : dy : dz = A' : B' : C',$$

wo

$$A' = ps + qt, \quad B' = -(pr + qs), \quad C' = A'p + B'q.$$

Nur auf den abwickelbaren Flächen findet die Unterscheidung der Curven gleicher Zeit (wie man die Meridiancurven auch nennen könnte) und der Curven gleicher Polhöhe nicht Statt, da auf diesen, wegen $p = \text{funct. } q$, beide Arten von Curven in den geraden Linien der Fläche zusammenfallen, oder in leicht erkennbaren besonderen Fällen eine von ihnen unbestimmt wird. Ohne hierbei zu verweilen, schliefse ich die *abwickelbaren* Flächen, sammt der Ebene, von der folgenden Untersuchung aus.

Im Allgemeinen ist in Betreff dieser beiden Arten von Curven zu erinnern, dafs sie stets in Beziehung auf eine Axe gedacht werden müssen, welche die der z sein soll; dafs aber parallele Axen völlig gleichgeltend sind. Die zu einer Axe gehörigen Meridiane durchkreuzen sich da, wo die Normale der Axe parallel oder die Polhöhe ein rechter Winkel ist.

Die obigen Werthe von $ABA'B'$ geben:

$$AA' + BB' = (r+t)\{(p^2-q^2)s + pq(t-r)\} = (r+t)C',$$

so wie auch:

$$AB' - A'B = (p^2+q^2)(s^2-rt).$$

Sucht man nun den Winkel λ, unter welchem auf einer beliebigen Fläche die Meridiancurven von den Curven gleicher Polhöhe geschnitten werden, so erhält man

$$\pm\cos\lambda = \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}\,.\,\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}},$$

und es ist:

$$AA' + BB' + CC' = (r+t+C)C',$$

also

$$\cos\lambda = 0 \text{ für } r+t+C = 0 \text{ und für } C' = 0.$$

Es giebt also zwei Arten von Flächen, auf welchen die Meridiancurven die Curven gleicher Polhöhe überall senkrecht schneiden. Betrachten wir sie einzeln.

Nach Einsetzung des Werths von C verwandelt sich die Gleichung $r+t+C=0$ in

$$(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs = 0.$$

Diese Gleichung ist längst bekannt; sie ist die der kleinsten Fläche innerhalb eines gegebenen Umfanges, und wir sind daher zu folgender Eigenschaft dieser Fläche gelangt:

Wird eine solche Fläche auf eine beliebige Axe als auf ihre Drehungsaxe bezogen, so schneiden die Meridiancurven die Curven gleicher Polhöhe überall rechtwinklig.

Die Axe, auf welche die Fläche bezogen wird, kann jede beliebige sein, da die Form der obigen Differentialgleichung der Fläche von der Richtung der rechtwinkligen Coordinaten unabhängig ist.

Werden in einer Ebene mehrere Axen angenommen, so giebt es eine Meridiancurve M, welche allen diesen Axen zugleich angehört; nämlich die-

jenige, in deren Puncten die Normalen jener Ebene parallel sind. Zieht man nun durch einen Punct von M die diesen Axen entsprechenden Curven gleicher Polhöhe, so folgt, dafs diese einander in jenem Puncte sämmtlich berühren, da sie alle die Curve M senkrecht schneiden.

Die zweite Art von Flächen, auf welchen überall $\cos\lambda = 0$ ist, wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$C' = 0 \quad \text{oder} \quad pq(r-t) = (p^2-q^2)s.$$

Das Integral dieser Gleichung folgt, durch Wegschaffung von ε, aus:

$$fz = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon + \psi\varepsilon,$$
$$0 = y\cos\varepsilon - x\sin\varepsilon + \psi'\varepsilon;$$

wo f und ψ willkürliche Functionen sind. Die geometrische Deutung dieser Formeln ist folgende.

Legt man an einen Cylinder, dessen Seiten der Axe z parallel sind, eine Berührungs-Ebene, zeichnet auf derselben eine beliebige krumme Linie C, und wickelt hierauf die Ebene vom Cylinder ab: so beschreibt die Curve C die verlangte Fläche. Auf dieser sind die Querschnitte von gleichem z die Curven gleicher Polhöhe, und die darauf senkrechten Curven von constantem ε, welche nichts anderes sind als die Curve C in ihren verschiedenen Lagen, stellen die Meridiane dar; beiderlei Curven sind also eben; auch sind sie die Krümmungslinien der Fläche, deren Verwandtschaft mit den Umdrehungsflächen nicht zu verkennen ist, in welche sie für $\psi\varepsilon + \psi''\varepsilon = \text{const.}$ übergeht.

Wenn die willkürliche Linie C eine gerade ist, so wird die Fläche abwickelbar, und die Polhöhe in allen ihren Puncten ist dieselbe.

Auf einer beliebigen Fläche lassen sich, neben den astronomischen, noch andere Arten von Meridiancurven unterscheiden, namentlich diejenigen Curven, welche die Curven gleicher Polhöhe überall senkrecht schneiden; sie werden vielleicht am schicklichsten *geodätische Meridiane* genannt; und die Curven, welche die auf der Drehungsaxe z senkrechten ebenen Querschnitte überall unter rechten Winkeln schneiden, mögen hier Meridiane dritter Art heifsen, insofern die astronomischen und die geodätischen die erste und zweite Art bilden. Die Differentialgleichung der dritten Art ist allgemein $qdx = pdy$. Für $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ folgt hieraus $\frac{ydx}{b^2} = \frac{xdy}{a^2}$, also $y^{b^2} = kx^{a^2}$.

Sucht man die Flächen, auf welchen die Meridiane dritter Art die Curven gleicher Polhöhe überall senkrecht schneiden, so folgt, dafs letztere

mit den Querschnitten von gleichem z zusammenfallen, also der Gleichung $p^2+q^2 =$ funct. z unterworfen sein müssen. Diese Gleichung ist aber ein erstes Integral der obigen Differentialgleichung $C' = 0$, auf welche man mithin durch diese Aufgabe wieder zurückgeführt wird. In der That fallen auf der oben betrachteten zweiten Art von Flächen, und auf ihr allein, die Curven gleicher Polhöhe mit den Curven von constantem z zusammen, und zugleich, nach dem Früheren, die astronomischen Meridiane mit den geodätischen.

Dorpat, den 30sten Januar 1849.

6.

Über den Umlauf des Springers auf dem Schachbrette (den sogenannten Rösselsprung).

(Von Herrn *Ferdl. Minding,* Prof. der Math. an der Universität zu Dorpat.)

(Aus dem „Bulletin de la classe phys. math. de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg.")

Diese allgemein bekannte Aufgabe ist zuerst in den Schriften der Berliner Akademie vom Jahre 1759 wissenschaftlich bearbeitet worden, wo ***Euler*** nachweiset, wie sich auf leichte Weise eine grofse Menge von Lösungen derselben, namentlich von wiederkehrenden Umläufen des Springers, finden läfst. Sein Verfahren besteht im Wesentlichen darin, dafs zuerst eine Reihe von Feldern besetzt wird, bis der Springer nicht weiter gehen kann, ohne auf ein schon betretenes Feld zurückzukommen; worauf man die schon besetzte Felderreihe in solche Abtheilungen zu bringen sucht, welche sich in veränderter Ordnung, sowohl an einander, als an die noch offen gebliebenen Felder knüpfen lassen. Die Darstellung der ***Euler***'schen Behandlungsweise liegt jedoch nicht in meiner Absicht, und ist auch um so mehr entbehrlich, als jene in ***Legendre's Théorie des nombres,*** Bd. 2. S. 151 u. f. der zweiten Ausgabe, und in dem Artikel: „***Springer auf dem Schachbrette***" des Wörterbuchs von ***Klügel*** und ***Mollweide,*** mitgetheilt wird.

In den Abhandlungen der Pariser Akademie vom Jahre 1771 macht ***Vandermonde*** (***Remarques sur les problèmes de situation***) mit Recht auf die Wichtigkeit der Untersuchungen aus der Geometrie der Lage im Allgemeinen aufmerksam. Er vergleicht den Umlauf des Springers mit dem Zuge eines Fadens, welcher in der Mitte jedes Feldes um eine daselbst aufgesteckte Nadel geschlungen, alle Felder nach dem hier vorgeschriebenen Gesetze verbindet; aber er beschränkt sich auf die Untersuchung besonderer symmetrischer Anordnungen. Noch wird in oben genanntem Wörterbuche eine mir nicht bekannte Schrift von ***Colini*** angeführt (***Solution du problème du cavalier au jeu des échecs,*** Mannheim, 1773), welche ebenfalls verschiedene Beispiele des Rösselsprunges enthält.

Legendre berührt (S. 165 a. a. O.) die Frage nach der Anzahl aller

möglichen Lösungen; und sie ist in der That hier die Hauptfrage, welche der Analysis zu beantworten obliegt. Da aber dieser ausgezeichnete Geometer sie als sehr schwierig bezeichnet und nur zu einem vorläufigen, von ihm selbst offenbar nicht für genügend erachteten Auskunftsmittel seine Zuflucht nimmt, so ergab sich die Nothwendigkeit, genauer nach den Ursachen dieser Schwierigkeit zu forschen, und ich erlaube mir, was ich darüber gefunden, hier vorzulegen. Zu einer wirklichen Zahlenbestimmung, oder vielmehr zur Kenntnifs der Mittel, durch welche eine solche in allen Fällen erreichbar wäre, wenn es darauf ankäme, bin ich zwar nicht gelangt; wenigstens aber wird das Folgende zeigen, dafs nur der allerdings fast unübersehbare Umfang einer auf sehr viele und sehr grofse Zahlen führenden Rechnung der Ausführung derselben entgegensteht. Es würde ein schöner Fortschritt der Analysis sein, wenn man dahin gelangte, dieses Hindernifs durch treffende Näherungen zu überwinden; wie es in andern Fällen, die mir jedoch weniger verwickelt scheinen als der vorliegende, gelungen ist.

Ich bezeichne die Felder des Schachbretts durch Zahlen, welche man als die Coordinaten ihrer Mittelpuncte ansehen kann, und setze den Anfang der Coordinaten in ein Eckfeld. Für dieses ist also $x=0$, $y=0$; für das ihm schräg gegenüberstehende Eckfeld $x=7$, $y=7$. Das Feld, für welches $x=a$, $y=b$, werde durch (a, b) bezeichnet; wobei die Ordnung der Buchstaben zu beachten ist. Von (a, b) kann der Springer mit einem Schritte auf alle diejenigen Felder gelangen, welche durch $(a\pm2, b\pm1)$ und durch $(a\pm1, b\pm2)$ angedeutet werden, wofern ihre Coordinaten die Grenzen 0 und 7 nicht überschreiten. Ferner belege ich jedes Feld mit einem Zeiger, d. h. mit einer der Zahlen von 1 bis 64, in ganz beliebiger Ordnung, so dafs jedem Zeiger nur ein Feld entspricht.

Es sei α der Zeiger irgend eines Feldes und $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ seien die Zeiger aller derjenigen Felder, welche der Springer von α aus in einem Sprunge erreichen kann, und welche ich deshalb die dem α ***benachbarte*** Felder nennen will, worunter also die anliegenden ***nicht*** zu verstehen sind. Wird nun der Springer auf ein beliebiges Feld A gesetzt, so entsteht die Frage, auf wie viele verschiedene Arten er in n Sprüngen das Feld α erreichen kann, wenn die wiederholte Besetzung jedes Feldes gestattet ist; es sei $\overset{\alpha}{w}_n$ die Anzahl dieser Arten. (Wenn man die Felder in gerade und ungerade (schwarze und weifse) eintheilt, so mufs α mit A gleichartig oder ungleich-

artig sein, je nachdem die Anzahl n der Sprünge gerade oder ungerade ist; wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so ist $\overset{\alpha}{w}_n = 0$.)

Da der Springer nur unmittelbar von β, γ, δ, ... aus auf α gelangen kann, so erhält man zur Bestimmung von $\overset{\alpha}{w}_n$ sofort die Gleichung

$$(A.) \qquad \overset{\alpha}{w}_n = \overset{\beta}{w}_{n-1} + \overset{\gamma}{w}_{n-1} + \overset{\delta}{w}_{n-1} + \cdots,$$

welche den $n$ten Sprung auf den $n-1$ten zurückführt. Solcher Gleichungen erhält man für jedes Feld eine, indem man dem Zeiger α nach und nach alle Werthe 1, 2, 3, ... bis 64 beilegt, und da man die Werthe von $\overset{\alpha}{w}_n$ für den ersten Sprung oder $n = 1$ sämmtlich kennt, indem sie für alle dem A benachbarten Felder $= 1$, für die übrigen $= 0$ sind, so kann man, mit Hülfe des Systems der 64 Gleichungen, A, $\overset{\alpha}{w}_n$ für jedes Feld und jede Anzahl von Sprüngen berechnen; wodurch die Aufgabe gelöset wird.

Dieselbe Aufgabe läfst sich auch mit der Bedingung verbinden, dafs irgend ein Feld in allen Sprüngen unbesetzt bleiben soll. Ist β ein solches ausgeschlossenes Feld, so ist $\overset{\beta}{w}_n$ (für alle n) $= 0$, und zugleich fällt aus A diejenige Gleichung weg, welche den Übergang von den benachbarten auf das Feld β ausdrückt; man hat also in A eine Gleichung und eine Unbekannte weniger als vorher. Überhaupt fallen aus dem Systeme A so viele Gleichungen und so viele Unbekannte hinweg, als Felder ausgeschlossen werden, und die Anzahl der Gleichungen A und der daraus zu bestimmenden Gröfsen ist in jedem Falle der Anzahl der noch übrigen (offenen) Felder gleich, und heifse i. Man belege die offenen Felder mit den Zeigern 1, 2, 3 bis i. Es sei α einer derselben und (a, b) das ihm zugehörige Feld; man bilde das Product $\overset{\alpha}{w}_n x^a y^b$ für dieses, und eben so für alle übrigen offenen Felder, und bezeichne die Summe aller dieser Producte durch U_n. Es ist dann das Polynom $U_n = \Sigma \overset{\alpha}{w}_n x^a y^b$, in welchem das Summenzeichen sich auf alle Zeiger von $\alpha = 1$ bis $\alpha = i$ erstreckt, ein alle beim $n$ten Sprunge möglichen Fälle zugleich umfassender Ausdruck. Um nun auf den $n+1$ten Sprung überzugehen, mufs man U_n mit einem dem Gange des Springers nachgebildeten Factor U multipliciren, nämlich mit

$$U = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

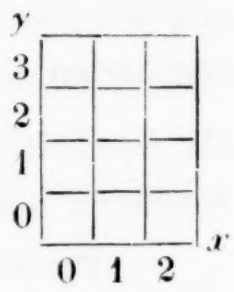
und aus dem Producte alle diejenigen Glieder weglassen, in welchen negative,

oder auch die siebente überschreitende Potenzen von x oder von y vorkommen; so wie alle Glieder, welche sich auf die ausgeschlossenen Felder beziehen. Dieses Weglassen bezeichne ich durch Einschliefsung des Products $U_n . U$ in eckige Klammern und nenne $[U_n . U]$ ein abgekürztes Product. Man erhält also

$$U_{n+1} = \sum^{\alpha} w_{n+1} x^a y^b = [U_n . U];$$

welche Gleichung nur eine für den Ausdruck bequeme Zusammenfassung der Gleichungen (*A.*) ist. Ein Beispiel mag dienen, um einige Mittel zur Abkürzung anzudeuten, welche sich bei dieser Rechnung darbieten.

Auf wie viele verschiedene Arten ist es möglich, auf einem Rechtecke von dreimal vier Feldern in 11 Sprüngen aus einem Eckfelde (0, 0) auf das ihm schräg gegenüberstehende Eckfeld (2, 3) zu gelangen, wenn das Ausgangsfeld (0, 0) gar nicht mehr, und das Endfeld (2, 3) nur erst mit dem 11ten Sprunge besetzt werden darf?



Hier ist also (0, 0) überhaupt und (2, 3) bei den 10 ersten Sprüngen ausgeschlossen. Die abgekürzten Producte sind bis U_6 folgende:

$$U_1 = [U] = x^2y + xy^2,$$
$$U_2 = [U_1 . U] = x^2 + y^2 + xy^3,$$
$$U_3 = x + 2y + 2x^2y + xy^2,$$
$$U_4 = 3x^2 + 3y^2 + 3x^2y^2 + 4xy^3,$$
$$U_5 = 6x + 10y + 7x^2y + 3xy^2 + 3y^3,$$
$$U_6 = 13x^2 + 3xy + 13y^2 + 19x^2y^2 + 17xy^3.$$

Anstatt auf diesem Wege weiter zu rechnen, fange man von (2, 3) an und entwickele eine der vorigen entgegenkommende Reihe von 5 Sprüngen; wobei ich die abgekürzten Producte mit $V_1 . V_2$ u. s. f. bezeichne. Man hat also

$$V_1 = [x^2y^3U] = xy + y^2.$$

Die hier obwaltende Symmetrie macht aber die Berechnung der V überflüssig, denn man erhält V_n dadurch, dafs in U_n, x^a mit x^{2-a}, y^b mit y^{3-b} vertauscht wird. Es folgt daher sofort:

$$V_5 = 3x^2 + 3xy + 7y^2 + 10x^2y^2 + 6xy^3.$$

Da man also in 6 Sprüngen auf 13 Arten von (0, 0) auf (2, 0), und in 5 Sprüngen auf 3 Arten von (2, 3) auf (2, 0) oder von (2, 0) auf (2, 3) gelangt, so giebt es überhaupt, mit Rücksicht auf die Bedingungen der

Aufgabe, 13.3 solche Übergänge in 11 Sprüngen von (0, 0) auf (2, 3), bei welchen mit dem 6ten Sprunge das Feld (2, 0) besetzt wird. Wendet man dieselbe Betrachtung auf alle bei dem 6ten Sprunge erreichbaren oder in U_6 vorkommenden Felder an, so erhält man überhaupt die Anzahl C der mit 11 Sprüngen unter den Bedingungen der Aufgabe möglichen unterschiedenen Übergänge von (0, 0) auf (2, 3), nämlich

$$C = 13.3 + 3.3 + 13.7 + 19.10 + 17.6 = 431.$$

Die nähere Untersuchung der Zahlen $\overset{\alpha}{w}_n$ führt auf gewisse rücklaufende Reihen, deren Glieder sie sind. Es ist nämlich nach *A:*

$$\begin{aligned}
\overset{\alpha}{w}_{n+1} &= \overset{\beta}{w}_n + \overset{\gamma}{w}_n + \overset{\delta}{w}_n + \cdots, \\
\overset{\alpha}{w}_n &= \overset{\beta}{w}_{n-1} + \overset{\gamma}{w}_{n-1} + \overset{\delta}{w}_{n-1} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overset{\alpha}{w}_{n+1-i} &= \overset{\beta}{w}_{n-i} + \overset{\gamma}{w}_{n-i} + \overset{\delta}{w}_{n-i} + \cdots
\end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit unbestimmten Coëfficienten $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_i$ multiplicirt und die Producte addirt, und setzt man

$$\overset{\alpha}{w}_n + \varepsilon_1 \overset{\alpha}{w}_{n-1} + \varepsilon_2 \overset{\alpha}{w}_{n-2} + \cdots + \varepsilon_i \overset{\alpha}{w}_{n-1} = \overset{\alpha}{W}_n,$$

so ergiebt sich die Formel:

$$(B.) \qquad \overset{\alpha}{W}_{n+1} = \overset{\beta}{W}_n + \overset{\gamma}{W}_n + \overset{\delta}{W}_n + \cdots;$$

welche ein System von i Gleichungen vertritt, da sie für $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, ... $\alpha = i$ gilt, wobei auf der rechten Seite für jedes α die Zeiger der ihm benachbarten offenen Felder zu setzen sind. Bestimmt man nun die i Coëfficienten ε durch eben so viele Gleichungen

$$\overset{\alpha}{W}_{i+1} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots i,$$

so folgt aus $(B.)$, $\overset{\alpha}{W}_{i+2} = 0$, und überhaupt $\overset{\alpha}{W}_n = 0$, für jedes n, welches gröfser ist als i, und für jedes α von 1 bis i. Die Werthe von $\overset{\alpha}{w}_n$ bilden also für die verschiedenen n eine rücklaufende Reihe, deren Scale für alle α dieselbe ist. Man kann sie daher auch als die Coëfficienten der Entwicklung von i rationalen algebraischen Brüchen betrachten, welche alle denselben Nenner haben. Es sei t eine unbestimmte Gröfse, so ist $\psi t = t^i + \varepsilon_1 t^{i-1} + \varepsilon_2 t^{i-2} + \cdots + \varepsilon_i$ dieser Nenner; und man hat

$$\frac{\varphi t}{\psi t} = \frac{\overset{\alpha}{w}_1}{t} + \frac{\overset{\alpha}{w}_2}{t^2} + \cdots = \Sigma \frac{\overset{\alpha}{w}_n}{t^n}.$$

Bedient man sich des oben angewandten Zeichens W in einem etwas erweiterten Sinne, indem man

$$\overset{\alpha}{W}_i = \overset{\alpha}{w}_i + \varepsilon_1 \overset{\alpha}{w}_{i-1} + \varepsilon_2 \overset{\alpha}{w}_{i-2} + \cdots + \varepsilon_{i-1} \overset{\alpha}{w}_1$$

und überhaupt

$$\overset{\alpha}{W}_{i-k} = \overset{\alpha}{w}_{i-k} + \varepsilon_1 \overset{\alpha}{w}_{i-k-1} + \cdots + \varepsilon_{i-k-1} \overset{\alpha}{w}_1$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots i-1$, also $\overset{\alpha}{W}_1 = \overset{\alpha}{w}_1$ setzt, so ergiebt sich der Zähler φt wie folgt, nämlich:

$$\varphi t = \overset{\alpha}{W}_i + \overset{\alpha}{W}_{i-1} t + \overset{\alpha}{W}_{i-2} t^2 + \cdots + \overset{\alpha}{W}_1 t^{i-1}.$$

Durch Zerlegung in einfache Brüche erhält man eine unabhängige Darstellung von $\overset{\alpha}{w}_n$. Sind die Wurzeln der Gleichung $\psi t = 0$ alle von einander verschieden und heifsen sie $t_1, t_2, \ldots t_i$, so findet sich

$$\frac{\varphi t}{\psi t} = \frac{a_1}{t-t_1} + \frac{a_2}{t-t_2} + \cdots + \frac{a^i}{t-t_i};$$

folglich

$$\overset{\alpha}{w}_n = \alpha_1 t_1^{n-1} + \alpha_2 t_2^{n-1} + \cdots + \alpha_i t^{n-1}.$$

Die Bestimmung der ε beruhte auf den Gleichungen $\overset{\alpha}{W}_{i+1} = 0$, oder auf den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{w}_{i+1} + \varepsilon_1 \overset{1}{w}_i + \varepsilon_2 \overset{1}{w}_{i-1} + \cdots + \varepsilon_i \overset{1}{w}_1 = 0,\\
&\overset{2}{w}_{i+1} + \varepsilon_1 \overset{2}{w}_i + \varepsilon_2 \overset{2}{w}_{i-1} + \cdots + \varepsilon_i \overset{2}{w}_1 = 0,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\overset{i}{w}_{i+1} + \varepsilon_1 \overset{i}{w}_i + \varepsilon_2 \overset{i}{w}_{i-1} + \cdots + \varepsilon_i \overset{i}{w}_1 = 0.
\end{aligned}$$

Sie wird also dann, und nur dann, nicht ausführbar sein, wenn die Determinante $\Delta_i = \Sigma \pm \overset{1}{w}_1 \overset{2}{w}_2 \overset{3}{w}_3 \ldots \overset{i}{w}_i$, welche den Nenner aller ε bildet, gleich Null ist. In diesem Falle können aber immer folgende i Gleichungen bestehen, nämlich:

$$(C.)\quad \begin{cases}
\Delta_{i-1} \overset{1}{w}_i + \varepsilon_1 \overset{1}{w}_{i-1} + \varepsilon_2 \overset{1}{w}_{i-2} + \cdots + \varepsilon_{i-1} \overset{1}{w}_1 = 0,\\
\Delta_{i-1} \overset{2}{w}_i + \varepsilon_1 \overset{2}{w}_{i-1} + \varepsilon_2 \overset{2}{w}_{i-2} + \cdots + \varepsilon_{i-1} \overset{2}{w}_1 = 0,\\
\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_{i-1} \overset{i-1}{w}_i + \varepsilon_1 \overset{i-1}{w}_{i-1} + \varepsilon_2 \overset{i-1}{w}_{i-2} + \cdots + \varepsilon_{i-1} \overset{i-1}{w}_1 = 0,\\
(\Delta_{i-1} \overset{i}{w}_i + \varepsilon_1 \overset{i}{w}_{i-1} + \varepsilon_2 \overset{i}{w}_{i-2} + \cdots + \varepsilon_{i-1} \overset{i}{w}_1 = 0),
\end{cases}$$

und es mufs also wenigstens eine die Folge aller übrigen sein; sei es die

letzte, welche deshalb eingeklammert ist. Die unbekannten ε erhalten dann alle den Nenner $\Delta_{i-1} = \Sigma \pm \overset{1}{w_1} \overset{2}{w_2} \overset{3}{w_3} \ldots \overset{i-1}{w_{i-1}}$, welcher im Vorstehenden abgesondert ist, so dafs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{i-1}$ nur noch die zugehörigen Zähler bedeuten. Wenn nun Δ_{i-1} nicht Null ist, so gelten hiernach die Gleichungen $\overset{\alpha}{W}_n = 0$ schon von $n = i$ an, und die gemeinschaftliche Scala der rücklaufenden Reihen wird um ein Glied verkürzt. Ist aber auch $\Delta_{i-1} = 0$, so ist von den Gleichungen C aufser der letzten noch eine, es sei die vorletzte, Folge der übrigen, und die Scala nimmt wieder um ein Glied ab. Durch Fortsetzung dieser Schlufsweise scheidet man nach und nach alle diejenigen unter den Gleichungen C aus, welche aus den übrigen folgen. Wäre nun sowohl $\Delta_i = 0$, als auch $\Delta_{i-1} = 0$, $\Delta_{i-2} = 0$ u. s. f. bis $\Delta_1 = 0$, so müfsten alle Gleichungen C identisch, d. h. alle $\overset{\alpha}{w}_1 = 0$ sein; d. h. der Springer hätte für den ersten Sprung gar keinen Ausgang; diesen Fall kann man ausschliefsen.

Hieraus ergiebt sich, dafs es, wenn es unmöglich ist, den Gleichungen $\overset{\alpha}{W}_{i+1} = 0$ zu genügen, weil $\Delta_i = 0$ ist, alsdann immer möglich sein mufs, einem ähnlichen Systeme von Gleichungen $\overset{\alpha}{W}_{j+1} = 0$ für $\alpha = 1, 2, 3, \ldots i$ genugzuthun, in welchem j kleiner ist als i; woraus wieder wie vorhin folgt, dafs alle $\overset{\alpha}{w}_n$ für verschiedene n rücklaufende Reihen bilden, nämlich eine für jedes α, und dafs alle diese Reihen dieselbe Scala von höchstens i Gliedern haben.

In der Anwendung unterscheidet man leicht die Felder, welchen wegen der Symmetrie ihrer Lage fortwährend für dieselben n gleiche w zukommen; und wenn man diese mit einerlei Zeiger belegt, so vermeidet man die unnöthige Häufung der unbekannten Gröfsen und die daraus entspringende Nothwendigkeit, identische Gleichungen auszuscheiden. Wenn aber durch Auslassung einiger Felder die Symmetrie gestört wird, so hören auch diese Vereinfachungen auf, von welchen ich hier noch ein Beispiel gebe.

Auf einem Quadrate von 25 Feldern gehe der Springer vom Mittelfelde aus, ohne dieses Feld wieder betreten zu dürfen: auf wie viele Arten kann er in n Sprüngen auf jedes der übrigen Felder gelangen, deren wiederholte Besetzung unbeschränkt frei steht?

4	3	2	3	4
3	2	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	2	3
4	3	2	3	4

Nach Ausschlufs des Mittelfeldes (0) zerfallen die übrigen 24 Felder in 4 durch die eingeschriebenen Ziffern 1, 2, 3, 4 unterschiedene Gruppen. Den Feldern, die derselben Gruppe angehören, kommen für alle n gleiche w zu,

und so ergeben sich also 4 Unbekannte, nämlich $\overset{1}{w}_n$, $\overset{2}{w}_n$, $\overset{3}{w}_n$, $\overset{4}{w}_n$. Die Betrachtung der Figur liefert sofort die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{w}_{n+1} &= 4\overset{2}{w}_n + 2\overset{4}{w}_n,\\
\overset{2}{w}_{n+1} &= 2\overset{1}{w}_n + 2\overset{3}{w}_n,\\
\overset{3}{w}_{n+1} &= 2\overset{2}{w}_n,\\
\overset{4}{w}_{n+1} &= 2\overset{1}{w}_n.
\end{aligned}$$

Bestimmt man nun ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 aus

$$\overset{\alpha}{w}_5 + \varepsilon_1\overset{\alpha}{w}_4 + \varepsilon_2\overset{\alpha}{w}_3 + \varepsilon_3\overset{\alpha}{w}_2 + \varepsilon_4\overset{\alpha}{w}_1 = 0$$

für $\alpha = 1, 2, 3, 4$, indem man die nöthigen w mit Hülfe der Anfangswerthe $\overset{1}{w}_1 = 0$, $\overset{2}{w}_1 = 0$, $\overset{3}{w}_1 = 1$, $\overset{4}{w}_1 = 0$ aus den vorstehenden Gleichungen herleitet, so erhält man: $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = -16$, $\varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_4 = 16$, mithin $\psi t = t^4 - 16t^2 + 16$. Hieraus findet sich φt für alle 4 Fälle; wie folgende Tafel zeigt:

$$\frac{8t}{\psi t} = \Sigma\frac{\overset{1}{w}_n}{t^n}, \quad \frac{2t^2-8}{\psi t} = \Sigma\frac{\overset{2}{w}_n}{t^n}, \quad \frac{t^3-8t}{\psi t} = \Sigma\frac{\overset{3}{w}_n}{t^n}, \quad \frac{16}{\psi t} = \Sigma\frac{\overset{4}{w}_n}{t^n}.$$

Es sei $\psi t = (t^2-g)(t^2-h)$, nämlich $g = 8+4\sqrt{3}$, $h = 8-4\sqrt{3}$, so wird:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{w}_{2n+1} &= \frac{g^n - h^n}{\sqrt{3}}, & \overset{1}{w}_{2n+2} &= 0,\\
\overset{3}{w}_{2n+1} &= 0, & \overset{2}{w}_{2n+2} &= \frac{(\sqrt{3}+1)g^n + (\sqrt{3}-1)h^n}{\sqrt{3}},\\
\overset{3}{w}_{2n+1} &= \frac{(\sqrt{3}-1)g^n + (\sqrt{3}+1)h^n}{2\sqrt{3}}, & \overset{3}{w}_{2n+2} &= 0,\\
\overset{4}{w}_{2n+1} &= 0, & \overset{4}{w}_{2n+2} &= \frac{2(g^n - h^n)}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Mit diesen Hülfsmitteln, und abgesehen von der wahrhaft unermefslichen Länge der Rechnung, kann man die Beantwortung der Hauptfrage unternehmen. Sie lautet:

Auf wie viele verschiedene Arten kann der Springer in 63 Sprüngen von einem gegebenen Felde (a, b) oder A des Schachbretts auf ein ebenfalls gegebenes (dem A nothwendig ungleichartiges) Feld (a', b') oder B gelangen, ohne eines der übrigen Felder unbesetzt zu lassen?

Ich nenne A und B die Endfelder, die übrigen die Zwischenfelder, und bezeichne diese in beliebiger Ordnung mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... 62.

Noch sei bemerkt, dafs im Folgenden keine andere Art von Übergängen von A auf B, jedesmal in 63 Sprüngen, vorkommt, als solche, bei welchen das Feld A, von dem der Springer ausgeht, gar nicht mehr, und das Feld B nicht eher als mit dem 63ten Sprunge besetzt wird. Diese Bedingung mufs ergänzend hinzugefügt werden, so oft eines Überganges von A und B erwähnt wird, da ihre ausdrückliche Wiederholung lästig sein würde.

Auflösung. Man berechne die Anzahl aller in 63 Sprüngen möglichen unterschiedenen Übergänge von A und B; sie heifse C.

Man berechne die Anzahl aller derjenigen in 63 Sprüngen möglichen unterschiedenen Übergänge von A auf B, bei welchen das Zwischenfeld 1 niemals betreten wird; sie heifse C_1.

Eben so berechne man die Anzahl aller in 63 Sprüngen möglichen unterschiedenen Übergänge von A auf B, bei welchen das Zwischenfeld 2 ausgeschlossen wird; sie heifse C_2.

Auf diese Weise schliefse man nach und nach alle Zwischenfelder, jedes einzeln, aus; so ergeben sich die Zahlen C_1, C_2, C_3, ... C_{62}.

Man schliefse irgend zwei Zwischenfelder α und β zugleich aus; die Anzahl der alsdann in 63 Sprüngen noch möglichen, von einander verschiedenen Übergänge von A auf B heifse $C_{\alpha\beta}$. Diese Rechnung für jede Verbindung der Zwischenfelder zu zweien vollzogen, giebt $61 . 31 = 1891$ Zahlen $C_{1.2}$, $C_{1.3}$, ... $C_{61.62}$.

Man schliefse je drei Zwischenfelder zugleich aus, so ergeben sich $61 . 31 . 20 = 37820$ Zahlen $C_{1.2.3}$ u. s. f. bis $C_{60.61.62}$.

So fortfahrend schliefse man nach und nach alle Verbindungen der Zwischenfelder zu 4, zu 5, u. s. f. aus, wodurch sich noch viel ausgedehntere Zahlenreihen ergeben; bis man zuletzt durch Ausschlufs aller Zwischenfelder zur Zahl $C_{1.2.3...62}$ gelangt, welche, wie schon viele vorhergehende, gleich Null ist. Alsdann ergiebt sich für die gesuchte Anzahl N aller in 63 Sprüngen, ohne Auslassung und mithin auch ohne wiederholte Besetzung eines Feldes, auf dem Schachbrette möglichen unterschiedenen Übergänge von A auf B folgender Werth:

$$N = C - (C_1 + C_2 + C_3 \cdots + C_{62}) + (C_{1.2} + C_{2.3} \cdots + C_{61.62}) - (C_{1.2.3} + \cdots + C_{60.61.62}) + (C_{1.2.3.4} + \cdots + C_{59.60.61.62}) - \cdots + \cdots + {}_{1.2.3.4...62}.$$

Beweis. Man wähle einige Zwischenfelder beliebig aus und untersuche, wie oft die Anzahl $(\varkappa)$ der Übergänge, bei welchen alle diese und nur diese Zwischenfelder leer bleiben, in vorstehender Formel gesetzt ist. Sie ist in C,

der Anzahl aller möglichen Übergänge, einmal gesetzt; in $(C_1 + C_2 + \cdots + C_{62})$ νmal, wenn ν die Anzahl der ausgewählten Felder ist. Sind nämlich $1, 2, 3, \ldots \nu$ die Zeiger dieser Felder, so ist die Zahl z in jeder der Zahlen C_1, C_2, $\ldots C_\nu$ einmal, in den übrigen $C_{\nu+1} \ldots C_{62}$ gar nicht gesetzt. In jeder der Zahlen $C_{1.2}$, $C_{1.3}$, $\ldots C_{\nu-1.\nu}$, in welchen alle Verbindungen von zweien der Zeiger $1, 2, 3, \ldots \nu$ vorkommen, ist z einmal gesetzt, also in $(C_{1.2} + C_{1.3} + \cdots$ $\cdots + C_{61.62})$, $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$mal, da es in den übrigen Zahlen dieser Reihe gar nicht gesetzt ist. Auf diese Weise fortschliefsend findet man, z in der Formel für N gesetzt:

$$1 - \nu + \tfrac{1}{2}\nu(\nu-1) - \cdots = (1-1)^\nu = 0\text{mal};$$

folglich wird in dieser Formel nur die Anzahl der kein Feld ausschliefsenden Übergänge von A auf B einmal gesetzt; w. z. b. w.

7.

Über die Wirkung des durch eine Drathspirale gehenden elektrischen Stroms auf eine in der Spirale befindliche weiche Eisenmasse.

(Von Herrn Dr. *Hädenkamp* zu Hamm.)

Im 77ten Bande der Annalen für Physik und Chemie von *Poggendorf* habe ich die Formeln entwickelt, welche im Allgemeinen die Anziehungen ausdrücken, die ein, durch eine Drathspirale gehender elektrischer lineärer Strom auf ein magnetisches Theilchen in jeder beliebigen Lage gegen einen solchen Strom ausübt. Bezeichnet man nemlich die Coordinaten eines lineären Strom-Elements ∂s durch x, y, z; die des magnetischen Theilchens durch α, β, γ; die Entfernung beider durch r, und den Halbmesser der cylindrisch angenommenen Spirale durch b: so habe ich am angeführten Orte gezeigt, dafs man für die Wirkungen, welche Strom und Magnetismus nach den drei Coordinaten-Axen auf einander ausüben, folgende Ausdrücke erhält:

$$X = \frac{i\mu}{b}\int \frac{x(z-\gamma)\partial s}{r^3},$$

$$Y = \frac{i\mu}{b}\int \frac{y(z-\gamma)\partial s}{r^3},$$

$$Z = \frac{i\mu}{b}\int \frac{x(x-\alpha)+y(y-\beta)}{r^3}\cdot \partial s.$$

μ bezeichnet in diesen Formeln die Intensität des Magnetismus im angenommenen magnetischen Massentheilchen, und i die des elektrischen Stroms; die Axe der z ist die Axe der Spirale. Diese Formeln sind aus den beiden, als allgemein gültig zu betrachtenden Sätzen abgeleitet, dafs, einmal, die bewegenden Kräfte, welche Strom und Magnetismus auf einander ausüben, sich direct verhalten, wie die Producte der Intensitäten dieser Kräfte, und umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von einander, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, den die Entfernung r mit der Richtung des Strom-Elements ∂s macht; und dafs ferner die Richtung dieser bewegenden Kräfte senkrecht auf der durch ∂s und r gelegten Ebene ist.

Ich will jetzt hier von diesen Formeln keine Anwendung auf die Wir-

kungen desjenigen Magnetismus machen, der durch die Einwirkung eines durch die Drathspirale gehenden elektrischen Stromes in weichem Eisen hervorgerufen wird. Ich nehme hierbei an, dafs in jedem Massentheilchen ∂m des weichen Eisens, die Intensität der magnetischen Kraft, welche der Strom darin hervorruft, der Strom-Intensität selbst proportional sei. Unter dieser Voraussetzung gehen die obigen Formeln in folgende über:

$$(1.)\quad \begin{cases} X = \frac{i^2}{b}\iint \frac{x(z-\gamma)\,\partial s\,\partial m}{r^3}, \\ Y = \frac{i^2}{b}\iint \frac{y(z-\gamma)\,\partial s\,\partial m}{r^3}, \\ Z = \frac{i^2}{b}\iint \frac{x(x-\alpha)+y(y-\beta)}{r^3}\,\partial s\,\partial m. \end{cases}$$

Diese Integrale sind auf die ganze Spirale, durch welche der Strom geht, und auf die ganze Eisenmasse, die der Einwirkung des Stroms ausgesetzt ist, auszudehnen.

Es sollen von diesen allgemeinen Formeln auf einige specielle Fälle Anwendungen folgen. Es sei zuerst die weiche Eisenmasse ein Cylinder, dessen Axe mit der Axe der cylindrischen Spirale zusammenfällt und dessen Durchmesser gegen die Länge unbedeutend ist. Für diesen Fall verschwinden die Anziehungen nach den Axen der x und y, und da auch $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ ist, so erhält man für die Wirkungen nach der Axe der z folgenden Ausdruck:

$$Z = i^2 b \iint \frac{\partial s\,\partial m}{r^3}.$$

Setzt man den Halbmesser der Grundfläche der Spirale $= b$, dessen Länge l und die Länge des Eisencylinders l', so wird, wenn die Drathwindungen mit der Axe der Spirale den Winkel ν machen:

$$\partial s \sin\nu = \partial z, \quad r^2 = b^2 + (z-\gamma)^2,$$

also

$$Z = \frac{i^2 b}{\sin\nu}\iint \frac{\partial z\,\partial m}{[b^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Der Anfangspunct der Coordinaten ist in der Mitte des Eisencylinders. Für die Wirkung der ganzen Spirale auf das Element ∂m des Eisencylinders hat man den Ausdruck

$$Z = \frac{i^2 b}{\sin\nu}\left(\frac{(\gamma+l')\,\partial m}{\sqrt{(b^2+(l'-\gamma)^2)}} - \frac{\gamma\,\partial m}{\sqrt{(b^2+\gamma^2)}}\right).$$

Um die ganze Wirkung der Spirale auf den ganzen Eisencylinder zu finden,

setze man den Halbmesser des Cylinders $= \varrho$. Dann ist $\partial m = \varrho^2 \pi \partial\gamma$, folglich

$$Z = \frac{i^2 b \varrho^2 \pi}{\sin \nu} [\sqrt{(b^2 + (\gamma - \tfrac{1}{2}l'))} + \sqrt{(b^2 + (\gamma + l + \tfrac{1}{2}l')^2} - \sqrt{(b^2 + (l - \tfrac{1}{2}l' + \gamma)^2)} - \sqrt{(b^2 + (\gamma + \tfrac{1}{2}l')^2)}].$$

Legt man durch die Axe der Spirale einen Schnitt, und zieht von den Endpuncten des Eisencylinders nach dem Umfange der Drathspirale *in diesem* Schnitte Linien, so bilden dieselben mit l und l' ein Trapez, dessen parallele Seiten l und l' sind. Nennt man die Diagonalen dieses Trapezes ∂ und ∂', die nicht parallelen Seiten δ und δ', so kann man die Wirkungen der Spirale auf den weichen Eisencylinder wie folgt ausdrücken:

$$Z = \frac{i^2 b \varrho^2 \pi}{\sin \nu} (\partial + \partial' - \delta - \delta').$$

Bedeutet s die ganze Länge der Spirale, so wird s hier $= l'$ und daher

$$Z = \frac{i^2 \varrho^2 b s \pi}{l'} (\partial + \partial' - \delta - \delta') = \frac{i^2 b s m}{l l'} (\partial + \partial' - \delta - \delta').$$

Es wird jetzt weiter angenommen, dafs die weiche Eisenmasse, auf welche die Spirale wirkt, ein längliches Ellipsoïd bilde, dessen längste Axe mit der Axe der Spirale zusammenfällt. Die Cosinusse der Winkel, welche die Linie r mit den drei Axen des Ellipsoïds bildet, seien p, q, t; dann gehen die Gleichungen (1.) in folgende über:

$$X = \frac{i^2}{b} \int x \partial s \int \frac{t \partial m}{r^2},$$

$$Y = \frac{i^2}{b} \int y \partial s \int \frac{t \partial m}{r^2},$$

$$Z = \frac{i^2}{b} \left[\int x \partial s \int \frac{p \partial m}{r^2} + \int y \partial s \int \frac{q \partial m}{r^2} \right].$$

Nun sind $\int \frac{p \partial m}{r^2}$, $\int \frac{q \partial m}{r^2}$, $\int \frac{t \partial m}{r^2}$ die Anziehungen des Ellipsoïds auf den Punct (x, y, z), zerlegt nach den drei Axen des Ellipsoïds, wenn das *Newton*sche Anziehungsgesetz gilt. Nennt man diese Anziehungen xA, yB, zC, so werden die vorhergehenden Gleichungen zu folgenden:

$$X = \frac{i^2}{b} \int x z C \partial s,$$

$$Y = \frac{i^2}{b} \int y z C \partial s,$$

$$Z = \frac{i^2}{b} \left(\int x^2 A \partial s + \int y^2 B \partial s \right).$$

Man nehme an, das Ellipsoïd sei ein Rotations-Ellipsoïd: eine Form, die man dem Eisen zu Versuchen am leichtesten geben kann; die kleinen Axen seien einander gleich. Dann ist $A = B$, und da immer $x^2 + y^2 = b^2$ ist, so erhält man

$$(2.) \quad \begin{cases} X = \frac{i^2}{b} \int xz C \partial s, \\ Y = \frac{i^2}{b} \int yz C \partial s, \\ Z = i^2 b \int A \partial s. \end{cases}$$

Die Gröfsen A, C, ∂s sind nur von den Coordinaten x, y, z abhängig. X und Y verschwinden für die Wirkung der ganzen Spirale auf das Ellipsoïd, und es bleibt mithin nur die Wirkung nach der Axe der Spirale zu betrachten und zu suchen.

Bekanntlich ist der Werth von A:

$$= \frac{3m}{(c^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2} - \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) \right),$$

wenn a die halbe kleine und c die halbe grofse Axe des Ellipsoïds bezeichnet. Wenn ferner die halbe kleine und die halbe grofse Axe des durch den Punct (x, y, z) gelegten verticalen Ellipsoïds durch a_1 und c_1 bezeichnet werden, so ist

$$\lambda^2 = \frac{c_1^2 - a_1^2}{c_1^2} = \frac{c^2 - a^2}{c_1^2} = \frac{\alpha^2}{c_1^2}.$$

Da $\partial s = \frac{\partial z}{\sin \nu}$ ist, so mufs man, um den Werth von Z zu finden, auch z durch ν ausdrücken; und dies geschieht durch die Gleichung des durch den Punct (x, y, z) gelegten confocalen Ellipsoïds:

$$1 = \frac{b^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = \frac{\lambda^2 z^2}{\alpha^2} + \frac{\lambda^2 b^2}{\alpha^2 (1-\lambda^2)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$z^2 = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} - \frac{b^2}{1-\lambda^2}.$$

Nun ist

$$Z = \frac{3 i^2 b m}{\alpha^3 \sin \nu} \int \left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2} - \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) \right) \partial z,$$

und da $\int \partial z \log \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) = z \log \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) + \frac{2z \partial \lambda}{1-\lambda^2}$ ist, so findet sich

$$\int \partial z \left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2} - \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) \right) = \int \left(\frac{\lambda \partial z - z \partial \lambda}{1-\lambda^2} \right) - \tfrac{1}{2} z \log \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right).$$

Setzt man $x = \lambda z$, so läfst sich die Integration dieses Differentials leicht ausführen. Es ist nemlich dann:

$$\frac{\lambda\partial z - z\partial\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{\partial x - 2z\partial\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{\partial x}{1-\lambda^2} - \frac{x\partial\lambda^2}{\lambda^2(1-\lambda^2)}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{1-\lambda^2} = \frac{b^2+\alpha^2-x^2}{b^2}, \quad \frac{\partial\lambda^2}{\lambda^2(1-\lambda^2)} = -\frac{\partial x^2}{a^2-x^2};$$

daher:

$$\int\frac{\lambda\partial z - z\partial\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{\alpha^2-b^2}{b^2}x - \frac{x^3}{3b^2} + \alpha\log\left(\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right).$$

Um die Grenzen des Integrals zu finden, sei die Entfernung des dem Mittelpuncte des Ellipsoïds zunächst liegenden Endes der Spirale z_1, und die Entfernung des andern Endes z_2; werden dann die den z_1 und z_2 entsprechenden Werthe von λ und x durch λ_1 und λ_2, x_1 und x_2 bezeichnet, so erhält man für die ganze Wirkung der Spirale auf das Ellipsoïd den Ausdruck:

$$Z = \frac{3i^2bm}{\alpha^3\sin\nu}\Big[\frac{\alpha^2-b^2}{b^2}x_1 - \frac{x_1^3}{3b^2} + \alpha\log\left(\frac{\alpha+x_1}{\alpha-x_1}\right) - \tfrac{1}{2}z_1\log\left(\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)$$
$$-\left(\frac{\alpha^2-b^2}{b^2}x_2 - \frac{x_2^3}{3b^2} + \alpha\log\left(\frac{\alpha+x_2}{\alpha-x_2}\right) - \tfrac{1}{2}z_2\log\left(\frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2}\right)\right)\Big].$$

Zur Bestimmung von λ_1 und λ_2 aus z_1 und z_2 dienen die besondern Gleichungen

$$z_1^2 = \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2} - \frac{b^2}{1-\lambda_1^2},$$

$$z_1^2 = \frac{\alpha^2}{\lambda_2^2} - \frac{b^2}{1-\lambda_2^2},$$

aus welchen man für λ_1 und λ_2 folgende Werthe erhält:

$$2x_1^2 = 2\lambda_1^2z_1^2 = z_1^2 + b^2 + \alpha^2 + \sqrt{((\alpha^2+b^2+z_1^2)^2 - 4\alpha^2z_1^2)},$$

$$2x_2^2 = 2\lambda_2^2z_2^2 = z_2^2 + b^2 + \alpha^2 + \sqrt{((\alpha^2+b^2+z_2^2)^2 - 4\alpha^2z_2^2)}.$$

Ich bemerke noch, dafs die gegenseitigen Anziehungen der magnetischen Theilchen in dem Ellipsoïd in den gegebenen Formeln nicht berücksichtigt sind.

Hamm, den 11ten August 1851.

8.

Aufgabe, nebst Auflösung.

(Vom Herausgeber.)

Nachdem man die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... p, wo p eine ***Stammzahl*** (Primzahl) > 3 ist, in eine wagerechte Reihe geschrieben hat, sollen alle ***dieselben*** Zahlen in $p-1$ andern wagerechten Reihen gerade darunter und in stets veränderter Ordnung so geschrieben werden, dafs, eben wie in keiner der wagerechten Reihen, auch in keiner lothrechten und in keiner der beiden diagonalen Reihen, desgleichen in keiner der Reihen, die mit den Diagonalen parallel laufen, ***eine und dieselbe Zahl mehr als einmal vorkommt.***

Man erreicht dies, wenn man jede zunächst gerade unter einer Zahl stehenden Zahl um eine der Zahlen $k = 2, 3, 4, \ldots p-2$ ***gröfser*** macht, als die darüber stehende Zahl und, falls die Summe gröfser als p ist, p davon abzieht und statt der Summe den Rest schreibt.

Dies giebt z. B. für $p = 7$:

für $k = 2$

1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	1	2
5	6	7	1	2	3	4
7	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3
6	7	1	2	3	4	5

für $k = 3$

1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	1	2	3
7	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	1	2
6	7	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	1
5	6	7	1	2	3	4

für $k = 4$

1	2	3	4	5	6	7
5	6	7	1	2	3	4
2	3	4	5	6	7	1
6	7	1	2	3	4	5
3	4	5	6	7	1	2
7	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	1	2	3

für $k = 5$

1	2	3	4	5	6	7
6	7	1	2	3	4	5
4	5	6	7	1	2	3
2	3	4	5	6	7	1
7	1	2	3	4	5	6
5	6	7	1	2	3	4
3	4	5	6	7	1	2

Der ***Beweis*** ist folgender. Die in dem Durchschnitts-Ort der $n$ten wagerechten und der $m$ten senkrechten Reihe stehenden Zahl, welche durch z bezeichnet werden mag, wird durch

$$(1.) \qquad m+k(n-1)-\mu p = z$$

ausgedrückt. Eben so irgend eine andere, im Durchschnitts-Ort der $n$ten wagerechten und der $m$ten senkrechten Reihe stehende Zahl z_1 durch

$$(2.) \qquad m_1+k(n_1-1)-\mu_1 p = z_1.$$

Sollen nun die beiden Zahlen z und z_1 ***nicht*** dieselben sein können, so mufs ***nicht*** $z_1 = z$, das heifst ***nicht*** $m+k(n-1)-\mu p = m_1+k(n_1-1)-\mu_1 p$, mithin ***nicht***

$$(3.) \qquad m-m_1+k(n-n_1) = (\mu-\mu_1)p$$

sein.

Stehen z und z_1 in einer und derselben ***wagerechten*** Reihe, so ist $n_1 = n$, also giebt dann (3.)

$$(4.) \qquad m-m_1 = (\mu-\mu_1)p;$$

und dies ist wirklich ***nicht*** der Fall, denn m oder m_1 ist nicht gröfser als p und keines von beiden ist Null, also ist $m-m_1$ ***immer*** kleiner als p, mithin ***nicht*** durch p ***theilbar;*** wie es nach (4.) sein müfste.

Stehen z und z_1 in einer und derselben ***lothrechten*** Reihe, so ist $m_1 = m$ und (3.)

$$(5.) \qquad k(n-n_1) = (\mu-\mu_1)p.$$

Hier ist wieder $n-n_1$, eben wie vorhin $m-m_1$, ***immer*** kleiner als p, und k soll es nach der Voraussetzung ebenfalls sein, also ist $k(n-n_1)$ wieder ***nicht*** durch p theilbar; wie es nach (5.) sein müfste

Steht z_1 in einer Reihe, die durch z mit einer der Diagonalen ***parallel*** läuft, so ist $\pm(m-m_1) = n-n_1$ und (3.) giebt

$$(6.) \qquad (k\pm 1)(n-n_1) = (\mu-\mu_1)p.$$

Hier ist abermals $n-n_1$, wie vorhin, ***immer*** kleiner als p, und $k\pm 1$ ist es ebenfalls, wenn $k > 2$ und $< p-1$ und $p > 3$ ist. Also können unter dieser Bedingung, wie sie auch vorausgesetzt wurde, auch keine zwei Zahlen, die in einer der Diagonalen, oder in einer mit der einen oder der andern Diagonale parallel laufenden Reihe stehen, einander gleich sein.

Die Aufgabe ist nicht die von den sogenannten ***magischen Quadraten***, aber sie steht damit, wie bekannt, in Verbindung.

Berlin, im Januar 1852.

9.

Die Brennlinie für den elliptischen Quadranten,

wenn die einfallenden Strahlen vom Mittelpunct der Ellipse ausgehen und jeder zurückgeworfene Strahl denselben Winkel mit der zugehörigen Normale bildet, wie der entsprechende einfallende.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.)

Bezeichnet a die halbe gröfsere, b die halbe kleinere Achse, ϱ den Radiusvector unter dem Winkel φ mit a; α den Winkel der entsprechenden Tangente mit a, so ist die Gleichung zwischen rechtwinkligen, mit a und b parallel laufenden Coordinaten x, y, für den zurückgeworfenen Strahl:

$$(1.) \quad y\cos(2\alpha+\varphi)+x\sin(2\alpha+\varphi)-\varrho\sin(2\alpha+2\varphi) = 0,$$

und die für den nächstfolgenden Strahl:

$$(2.) \quad y\partial\cos(2\alpha+\varphi)_\varphi+x\partial\sin(2\alpha+\varphi)_\varphi-\partial[\varrho\sin(2\alpha+2\varphi)]_\varphi = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn

$$(3.) \quad \frac{2\varrho\cos(2\alpha+2\varphi)[1+\partial\alpha_\varphi]+\sin(2\alpha+2\varphi)\partial\varrho_\varphi}{1+2\partial\alpha_\varphi} = \boldsymbol{P}$$

gesetzt wird, für die gemeinschaftlichen Coordinaten, d. h. für die ***Brennlinie:***

$$(4.) \quad x = \varrho\sin(2\alpha+\varphi)\sin(2\alpha+2\varphi)+\boldsymbol{P}\cos(2\alpha+\varphi)$$

und

$$(5.) \quad y = \varrho\cos(2\alpha+\varphi)\sin(2\alpha+2\varphi)-\boldsymbol{P}\sin(2\alpha+\varphi).$$

Vermöge der bekannten Eigenschaften der Ellipse ist aber

$$(6.) \quad \partial\alpha_\varphi = -\frac{a^2b^2}{a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi}$$

aus

$$(7.) \quad a^2\tan\alpha\tan\varphi = b^2.$$

Sodann

$$(8.) \quad \partial\varrho_\varphi = -\frac{(a^2-b^2)\varrho^3\sin\varphi\cos\varphi}{a^2b^2}$$

aus

$$(9.) \quad \varrho^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}.$$

Ferner ist

$$(10.)\quad \sin(2\alpha+2\varphi) = \frac{a^2b^2(a^2-b^2)}{\varrho^2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi};$$

$$(11.)\quad \cos(2\alpha+2\varphi) = 1-\frac{2a^4b^4}{\varrho^4[a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi]};$$

$$(12.)\quad \sin(2\alpha+\varphi) = \frac{2a^4b^2\sin\varphi}{\varrho^2(a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi)}-\sin\varphi;$$

$$(13.)\quad \cos(2\alpha+\varphi) = \frac{(a^2-b^2)^2\sin^2\varphi-b^4}{a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi}\cdot\cos\varphi,$$

und werden diese Ausdrücke zuerst in (3.) und dann, nebst dem für P gefundenen Ausdruck, in (4. und 5.) substituirt, so ergeben sich, $\frac{a}{b}=n$ gesetzt, so dafs

$$(14.)\quad \varrho^2 = \frac{n^2b^2}{1+(n^2-1)\sin^2\varphi}$$

ist, für x und y, als Functionen von φ, folgende Formeln:

$$(15.)\quad x = \frac{(n^2-1)\cos^3\varphi}{2n^2-1-(n^4-1)\sin^2\varphi}\cdot 2\varrho,$$

$$(16.)\quad y = -\frac{n^2(n^2-1)\sin^3\varphi}{2n^2-1-(n^4-1)\sin^2\varphi}\cdot 2\varrho,$$

aus welchen auch noch

$$(17.)\quad y+n^2x\,\mathrm{tang}^3\varphi = 0$$

hervorgeht.

Es folgt hieraus unter andern:

I. Dafs, so lange $\sin^2\varphi < \frac{2n^2-1}{n^4-1}$ ist, x positiv und y negativ wird.

II. Dafs für $\sin^2\varphi = \frac{2n^2-1}{n^4-1}$ beide Coordinaten unendlich werden, also zunächst liegende zurückgeworfene Strahlen an der diesen Werth von φ entsprechenden Stelle parallel laufen.

III. Dafs für $\sin^2\varphi > \frac{2n^2-1}{n^4-1}$ sich immer für x negative, für y positive Werthe ergeben müssen.

IV. Dafs, wenn $n^2 <$ höchstens $= 2$ ist, nur positive Werthe für x existiren, also nur ein Zweig der Curve Statt findet.

V. Dafs für $\varphi = 0$, also für den Anfangspunct der Brennlinie, $y=0$ und $x = \frac{2n^2-2}{2n^2-1}a$, also kleiner als a, und zwar desto näher $= a$

ist, je gröfser n ist; in welchen Fällen dieser Zweig die Gestalt eines Kometenschweifes annimmt.

VI. Dafs, für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, also für den Endpunct dieser Brennlinie, $x = 0$ und $y = \frac{2n^2-2}{n^2-2} b$ also gröfser als b ist.

VII. Dafs x für $\sin\varphi = \frac{1}{n^2-1}$ ein Minimum und dafs dieser kleinste Werth von x gleich $a \cdot \sqrt[4]{\frac{n^2-2}{n^2-1}}$ ist, seine Verschiedenheit von der Abscisse des Anfangspuncts (V.) also um so geringer, je gröfser n ist.

Berlin, den 8ten April 1847.

10.

Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen.

(Von Herrn *E. E. Kummer,* Professor an der Universität zu Breslau.)

Das Reciprocitätsgesetz für die quadratischen Reste erstreckt sich bekanntlich nicht auf die Primzahl 2, für welche ein besonderer Satz lehrt, ob sie quadratischer Rest einer gegebenen Primzahl sei, oder Nichtrest. Eben so ist von dem Reciprocitätsgesetze für die cubischen Reste die Primzahl 3 ausgenommen; nebst den beiden complexen Primfactoren derselben $1-\alpha$, $1-\alpha^2$, wo α eine dritte Wurzel der Einheit bezeichnet. Für die höheren Potenzreste, welche hier nur für den Fall in Betracht kommen sollen, wo der Potenz-Exponent λ eine ***Primzahl*** ist, sind ebenfalls, aufser dem allgemeinen Reciprocitätsgesetze, Ergänzungssätze nöthig, welche entscheiden, ob der Potenz-Exponent λ und die aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten Primfactoren desselben, $1-\alpha$, $1-\alpha^2$, ... $1-\alpha^{\lambda-1}$, für eine gegebene complexe Primzahl λte Potenzreste sind, oder zu welcher Classe der Nichtreste sie gehören. Auch kommen für diese höheren Potenzreste noch die complexen Einheiten hinzu, für welche die Untersuchung noch besonders anzustellen ist. Die Aufgabe, deren vollständige Lösung ich in dem Folgenden geben werde, besteht also darin, die Werthe der auf λte Potenzreste sich beziehenden Symbole

$$\left(\frac{\lambda}{f(\alpha)}\right), \quad \left(\frac{1-\alpha^k}{f(\alpha)}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\varepsilon(\alpha)}{f(\alpha)}\right)$$

zu finden, wo α eine λte Wurzel der Einheit, $\varepsilon(\alpha)$ eine beliebige complexe Einheit und $f(\alpha)$ eine complexe Primzahl bedeutet; welche eine wirkliche oder eine ideale sein kann. Die Bedeutung des Symbols $\left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}\right)$ ist durch die Congruenz

$$\left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}\right) \equiv \varphi(\alpha)^{\frac{Nf(\alpha)-1}{\lambda}} \equiv \alpha^i, \qquad \text{Mod. } f(\alpha),$$

definirt, in welcher $Nf(\alpha)$ die ***Norm*** von $f(\alpha)$ bedeutet. Für den Fall, dafs $\varphi(\alpha)$ ***ideal*** ist, welcher jedoch vorläufig, da $\varphi(\alpha)$ nur einen der drei Werthe λ, $1-\alpha^k$ oder $\varepsilon(\alpha)$ haben soll, nicht in Betracht kommt, wird diese Definition

dahin erweitert, dafs man statt $\varphi(\alpha)$ diejenige Potenz von $\varphi(\alpha)$ nimmt, welche zu einer wirklichen complexen Zahl wird, wenn die Hte Potenz es ist. So hat das Symbol $\left(\frac{\varphi(\alpha)^H}{f(\alpha)}\right)$ nach der obigen Definition einen ganz bestimmten Sinn, und es ist sodann $\left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}\right)$ nach der Gleichung

$$\left(\frac{\varphi(\alpha)^H}{f(\alpha)}\right) = \left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}\right)^H$$

zu definiren; welche immer einen bestimmten Werth dafür giebt, wenn H nicht durch λ theilbar ist. Für diesen Fall aber, welcher, wie ich anderweit gezeigt habe, nur dann vorkommen kann, wenn λ eine von den Ausnahmszahlen ist, für welche eine der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen in ihrem Zähler λ selbst als Factor enthält, ist die gegebene Definition unzureichend. Der Exponent derjenigen Potenz von α, welcher $\left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}\right)$ gleich ist, heifst der *Index* von $\varphi(\alpha)$ für den Mod. $f(\alpha)$ und soll in dem Folgenden durch Ind. $\varphi(\alpha)$ bezeichnet werden, so dafs die vorliegende Aufgabe auch so ausgedrückt werden kann: Die Werthe von

$$\text{Ind. } \lambda, \quad \text{Ind. } (1-\alpha^k) \quad \text{und} \quad \text{Ind. } \varepsilon(\alpha)$$

zu finden, für den Mod. $f(\alpha)$.

Es werden hierbei zwei Fälle zu unterscheiden und besonders zu behandeln sein; nämlich *erstens* der Fall, wo $f(\alpha)$ eine complexe Primzahl ist, deren Norm $Nf(\alpha) = p$ eine Primzahl von der Form $\nu\lambda + 1 = p$ ist, in welchem Falle ich $f(\alpha)$ eine zum Exponenten *Eins* gehörende *complexe* Primzahl nenne; und *zweitens* der Fall, wo $f(\alpha)$ eine zu einem beliebigen andern Exponenten gehörende complexe Primzahl ist, d. h., wo $Nf(\alpha) = q^t$ und q eine für den Modul λ zum Exponenten t gehörende *nichtcomplexe* Primzahl ist. In dem ersten Falle, für welchen ich eine einfache Methode und die Hauptresultate im vorigen Jahre der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin mitgetheilt habe (M. s. die Monatsberichte vom Mai 1850), ist die Lehre von der *Kreistheilung* allein ausreichend, um die vorliegende Aufgabe zu lösen; in dem zweiten Falle aber ist noch eine, auch in anderer Beziehung nicht unwichtige Erweiterung oder Verallgemeinerung der Theorie der Kreistheilung nöthig; welche in dem Folgenden ebenfalls entwickelt werden soll. Endlich gedenke ich hier auch noch eine Anwendung der gefundenen Resultate anf das *allgemeine* Reciprocitätsgesetz zu geben, bestehend in der Lösung der Aufgabe: Wenn das Reciprocitätsgesetz zwischen zwei complexen

Primzahlen gegeben ist, für besondere Bedingungen, welche die Einheiten bestimmen, die als Factoren dieser complexen Zahlen vorhanden sein können: daraus das Reciprocitätsgesetz für dieselben complexen Primfactoren zu finden. welche jenen Bedingungen nicht weiter unterliegen.

§. 1.

Entwickelung der Indices von λ, $1-\alpha^k$ und $\varepsilon(\alpha)$ für den Fall, dafs der Modul, auf welchen sich die Indices beziehen, ein zum Exponenten *Eins* gehörender complexer Primfactor ist.

Es sei $f(\alpha)$ ein complexer, idealer oder wirklicher Primfactor der realen Primzahl p, von der Form $\nu\lambda+1$; λ sei eine ***ungerade*** Primzahl; g eine primitive Wurzel der Congruenz $g^{p-1}\equiv 1$, Mod. p; γ eine primitive Wurzel der Congruenz $\gamma^{\lambda-1}\equiv 1$, Mod. λ; x eine imaginäre Wurzel der Gleichung $x^p=1$, und α eine imaginäre Wurzel der Gleichung $\alpha^\lambda=1$. Ferner seien $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{\lambda-1}$ die λ Perioden, welche aus je $\nu=\frac{p-1}{\lambda}$ Wurzeln der Gleichung $x^p=1$ gebildet werden können, so dafs

$$\eta = x + x^{g^\lambda} + x^{g^{2\lambda}} + \cdots + x^{g^{(\nu-1)\lambda}},$$
$$\eta_1 = x^g + x^{g^{\lambda+1}} + x^{g^{2\lambda+1}} + \cdots + x^{g^{(\nu-1)\lambda+1}} \text{ ist,}$$

u. s. w.

Die Producte je zweier Perioden lassen sich bekanntlich immer als lineäre Functionen aller ähnlichen Perioden darstellen. Diese Ausdrücke nehmen in dem gegenwärtigen Falle, wo λ ***ungrade*** ist, folgende Gestalt an:

$$\eta^2 = \nu + m\eta + m_1\eta_1 + m_2\eta_2 + \cdots + m_{\lambda-1}\eta_{\lambda-1},$$
$$\eta\eta_1 = \overset{1}{m}\eta + \overset{1}{m}_1\eta_1 + \overset{1}{m}_2\eta_2 + \cdots + \overset{1}{m}_{\lambda-1}\eta_{\lambda-1},$$
$$\eta\eta_2 = \overset{2}{m}\eta + \overset{2}{m}_1\eta_1 + \overset{2}{m}_2\eta_2 + \cdots + \overset{2}{m}_{\lambda-1}\eta_{\lambda-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta\eta_{\lambda-1} = \overset{\lambda-1}{m}\eta + \overset{\lambda-1}{m}_1\eta_1 + \overset{\lambda-1}{m}_2\eta_2 + \cdots + \overset{\lambda-1}{m}_{\lambda-1}\eta_{\lambda-1},$$

in welchen allgemein der Coëfficient $\overset{k}{m}_h$ gleich ist der Anzahl der Werth-Verbindungen des r und s, aus den Zahlen $r=0, 1, 2, \ldots r-1$ und $s=0, 1, 2, \ldots s-1$, welche der Congruenz

$$g^{k+r\lambda}+1 \equiv g^{h+s\lambda}, \quad \text{Mod. } p,$$

genügen, oder, was Dasselbe ist, gleich der Anzahl der Werthe des r aus

der Reihe $r = 0, 1, 2, \ldots r-1$, welche der Congruenz

$$\text{Ind.}\,(g^{k+r\lambda}+1) \equiv h, \quad \text{Mod.}\,\lambda,$$

genügen, wenn das Zeichen des Index (Ind.) sich auf die Primzahl p und deren primitive Wurzel g bezieht. Ich stelle hier, wegen des in dem Folgenden davon zu machenden Gebrauchs, die Haupt-Eigenschaften dieser Zahlen $\overset{k}{m}_h$, welche ich in der Abhandlung über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren (Bd. 35, S. 327 dieses Journals) hergeleitet habe, für den vorliegenden Fall, wo λ, die Anzahl der Perioden, *ungerade* ist, noch einmal zusammen, nämlich:

$$\overset{k+r\lambda}{m}_h = \overset{k}{m}_h, \qquad \overset{k}{m}_{h+s\lambda} = \overset{k}{m}_h,$$

$$\overset{k}{m}_h = \overset{h}{m}_k, \qquad \overset{k}{m}_h = \overset{k}{m}_{\lambda-k},$$

$$\overset{k}{m} + \overset{k}{m}_1 + \overset{k}{m}_2 + \cdots + \overset{k}{m}_{\lambda-1} = \nu;$$

aber für $k = 0$,

$$m + m_1 + m_2 + \cdots + m_{\lambda-1} = \nu - 1.$$

Betrachtet man nun die Summe

$$\Sigma\,\text{Ind.}\,(g^{k+r\lambda}+1)$$

für alle Werthe $0, 1, 2, \ldots r-1$ des r, so finden sich in derselben $\overset{k}{m}_0$ Glieder, welche congruent Null werden für den Modul λ; ferner giebt es $\overset{k}{m}_1$ Glieder, welche congruent 1 werden, $\overset{k}{m}_2$ Glieder, welche congruent 2 werden u. s. w.; woraus

$$\Sigma\,\text{Ind.}\,(g^{k+r\lambda}+1) \equiv 1\overset{k}{m}_1 + 2\overset{k}{m}_2 + 3\overset{k}{m}_3 + \cdots + (\lambda-1)\overset{k}{m}_{\lambda-1}, \quad \text{Mod.}\,\lambda,$$

folgt. Nun wird aber, wie leicht zu zeigen, für $\nu = \frac{p-1}{\lambda}$ die Congruenz

$$z^\nu - 1 \equiv (z-1)(z-g^\lambda)(z-g^{2\lambda}) \ldots (z-g^{(\nu-1)\lambda}), \quad \text{Mod.}\,p,$$

für alle beliebigen Werthe des z identisch erfüllt. Setzt man daher in derselben $z \equiv -g^{p-1-k}$, Mod. p, und multiplicirt auf beiden Seiten mit $g^{\nu k}$, so wird

$$1 - g^{\nu k} \equiv (g^k+1)(g^{k+\lambda}+1)(g^{k+2\lambda}+1) \ldots (g^{k+(\nu-1)\lambda}+1), \quad \text{Mod.}\,p,$$

also, wenn auf beiden Seiten die Indices genommen werden:

$$\text{Ind.}\,(1-g^{\nu k}) \equiv \Sigma\,\text{Ind.}\,(g^{k+r\lambda}+1), \quad \text{Mod.}\,\lambda,$$

und diese Congruenz, mit der obigen Congruenz verglichen, giebt:

$$\text{Ind.}\,(1-g^{\nu k}) \equiv 1\overset{k}{m}_1 + 2\overset{k}{m}_2 + 3\overset{k}{m}_3 + \cdots + (\lambda-1)\overset{k}{m}_{\lambda-1}, \quad \text{Mod.}\,\lambda.$$

Ist nun $f(\alpha)$ ein complexer Primfactor des p, und zwar der zu $\alpha = g^\nu$ gehörige, so ist $g^\nu \equiv \alpha$, Mod. $f(\alpha)$. Ferner ist nach der oben gegebenen

Definition des Zeichens Ind., welches sich auf den Mod. $f(\alpha)$ bezieht,

$$\varphi(\alpha)^{\frac{Nf(\alpha)-1}{\lambda}} \equiv \alpha^{\text{Ind. }\varphi(\alpha)}, \quad \text{Mod. } f(\alpha),$$

oder weil $Nf(\alpha) = p$, $\frac{p-1}{\lambda} = \nu$ und $\alpha \equiv g^\nu$, Mod. $f(\alpha)$, ist:

$$\varphi(g^\nu)^\nu \equiv g^{\nu \text{ Ind. } \varphi(\alpha)},$$

für den Modul $f(\alpha)$ und, da diese Congruenz nur nichtcomplexe Zahlen enthält, auch für den Mod. p. Hieraus folgt, wenn $\varphi(\alpha) = 1-\alpha^k$ gesetzt wird:

$$\nu \text{ Ind.}(1-g^{\nu k}) \equiv \nu \text{ Ind.}(1-\alpha^k), \quad \text{Mod. } p-1,$$

also, wenn man durch ν dividirt,

$$\text{Ind.}(1-g^{\nu k}) \equiv \text{Ind.}(1-\alpha^k), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Demnach hat man auch

$$\text{Ind.}(1-\alpha^k) \equiv 1^k m_1 + 2^k m_2 + 3^k m_3 + \cdots + (\lambda-1)^k m_{\lambda-1}, \quad \text{Mod. } \lambda;$$

welche Congruenz eine sehr einfache Lösung einer der obigen Aufgaben darstellt. Aus diesem Ausdrucke läfst sich sehr leicht der entsprechende Ausdruck des Ind. (λ) ableiten, indem man nach einander $k = 1, 2, 3, \ldots \lambda-1$ setzt; wobei zu beachten ist, dafs

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\ldots(1-\alpha^{\lambda-1}) = \lambda$$

und

$$m_h + {}^1m_h + {}^2m_h + \cdots\cdots + {}^{\lambda-1}m_h = \nu.$$

So erhält man

$$\text{Ind.}(\lambda) \equiv -(m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \cdots + (\lambda-1)m_{\lambda-1}), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Endlich ergeben sich aus derselben Quelle auch die Indices der complexen Einheiten. Nimmt man nämlich die Einheit

$$e(\alpha) = \sqrt[2]{\left(\frac{(1-\alpha^\gamma)(1-\alpha^{-\gamma})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{-1})}\right)} = \pm\frac{\alpha^{\frac{1}{2}k(1-\gamma)}(1-\alpha^{\gamma k})}{1-\alpha},$$

welche ich ***Kreistheilungs-Einheit*** nenne, so hat man

$$\text{Ind. } e(\alpha^k) \equiv \tfrac{1}{2}k(1-\gamma)\,\text{Ind. }\alpha + \text{Ind.}(1-\alpha^{k\gamma}) - \text{Ind.}(1-\alpha^k), \quad \text{Mod. } \lambda,$$

also

$$\begin{aligned}\text{Ind. } e(\alpha^k) \equiv \tfrac{1}{2}k(1-\gamma)\nu &+ 1^{k\gamma}m_1 + 2^{k\gamma}m_2 + 3^{k\gamma}m_3 + \cdots + (\lambda-1)^{k\gamma}m_{\lambda-1} \\ &- 1^k m_1 - 2^k m_2 - 3^k m_3 - \cdots - (\lambda-)^k m_{\lambda-1},\end{aligned} \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Ein System conjugirter Kreistheilungs-Einheiten ist ein unabhängiges System von Einheiten, welches die Eigenschaft hat, dafs überhaupt jede Einheit ohne Ausnahme sich als ein Product von Potenzen der conjugirten Kreistheilungs-Einheiten darstellen läfst, und zwar so, dafs die Potenz-Exponenten

nur rationale Brüche sind; d. h., wenn $\varepsilon(\alpha)$ eine beliebige complexe Einheit ist, so hat man immer

$$\varepsilon(\alpha) = \pm\alpha^k e(\alpha)^n . e(\alpha^\gamma)^{n_1} . e(\alpha^{\gamma^2})^{n_2} \ \ldots \ e(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})^{n_{\mu-1}},$$

wo zur Abkürzung $\frac{1}{2}(\lambda-1)=\mu$ gesetzt ist, und wo $n, n_1, n_2, \ldots n_{\mu-1}$ rationale Brüche sind. Man erhält daher auch den Index jeder beliebigen Einheit $\varepsilon(\alpha)$ durch die Indices der Kreistheilungs-Einheiten ausgedrückt, nämlich:

$$\text{Ind. } \varepsilon(\alpha) \equiv k\nu + n \text{ Ind. } e(\alpha) + n_1 \text{ Ind. } e(\alpha^\gamma) + \cdots + n_{\mu-1} \text{ Ind. } e(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}), \text{ Mod. } \lambda.$$

In den Nennern der rationalen Brüche $n, n_1, \ldots n_{\mu-1}$ kann, wie ich in der Abhandlung (Bd. 40. S. 117 dieses Journals) gezeigt habe, der Factor λ nur dann vorkommen, wenn die Classen-Anzahl aller idealen complexen Zahlen durch λ theilbar ist, also nur dann, wenn λ in einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factor des Zählers auftritt. Schliefst man diese Ausnahmszahlen λ auch hier aus, so sind mit den Indices der Kreistheilungs-Einheiten $e(\alpha^k)$ zugleich auch die Indices aller möglichen Einheiten gegeben; denn man kann alle in dem Ausdrucke des Ind. $\varepsilon(\alpha)$ vorkommenden Brüche $n, n_1, \ldots n_{\mu-1}$ durch die ganzen Zahlen ersetzen, denen sie congruent sind für den Modul λ.

Hiermit ist also die erste Lösung der Aufgabe, die Indices der Zahlen $1-\alpha^k$ und λ, und der complexen Einheiten zu finden, in sehr einfacher Weise gegeben; für den Fall, dafs die complexe Primzahl, auf welche die Indices sich beziehen, eine solche ist, die für den Modul λ zum Exponenten ***Eins*** gehört. Die Zahlen $\overset{k}{m}_h$, mittels welcher die Lösung dieser Aufgabe gegeben ist, lassen sich auf mannichfache Weise auf andere in der Lehre von der Kreistheilung vorkommende Zahlen reduciren, namentlich auf die Coëfficienten der complexen Zahlen $\psi_r(\alpha)$, welche, wenn man

$$F(\alpha, x) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \cdots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}}$$

setzt, durch die Gleichung

$$\frac{F(\alpha, x) F(\alpha^r, x)}{F(\alpha^{r+1}, x)} = \psi_r(\alpha) = \overset{r}{a} + \overset{r}{a}_1\alpha + \overset{r}{a}_2\alpha^2 + \cdots + \overset{r}{a}_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$$

bestimmt werden. Durch dieselben können die Zahlen $\overset{k}{m}_h$ in folgender Art ausgedrückt werden:

$$\lambda \overset{k}{m}_h = \overset{\lambda-2}{\Sigma}_r \overset{r}{a}_{h+kr} - (\lambda-3)\nu + 1;$$

wo in den besondern Fällen $h=k$, $h=0$ oder $k=0$ die ***Eins*** auf der rechten Seite wegfallen mufs. Da ferner, wie ich in früheren Abhandlungen

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

gezeigt habe, alle in der Kreistheilung vorkommenden Zahlen durch die Coëfficienten eines complexen Primfactors von p sich ausdrücken lassen, so wird man auch die Indices von λ, $1-\alpha^k$ und $\varepsilon(\alpha)$ durch die Coëfficienten von $f(\alpha)$ selbst ausdrücken können. Ich will jedoch nicht alle diese Umformungen der gefundenen Formeln hier wirklich ausführen. Für Ind. λ und Ind. $(1-\alpha^k)$ sind auch die gefundenen Ausdrücke so einfach uud elegant, dafs sie vollständig genügen können; für die Indices der Einheiten dagegen giebt es noch einige merkwürdige und einfache Ausdrücke, welche ich entwickeln will, weil sie auch für andere Untersuchungen wichtig sind. Sie gestalten sich am einfachsten für die zusammengesetzte Kreistheilungs-Einheit

$$\boldsymbol{E}_n(\alpha) = \boldsymbol{e}(\alpha)\boldsymbol{e}(\alpha^\gamma)^{\gamma^{-2n}}.\boldsymbol{e}(\alpha^{\gamma^2})^{\gamma^{-4n}} \ \ldots \ \boldsymbol{e}\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right)^{\gamma^{-2(\mu-1)n}},$$

welche überhaupt in mehrfacher Beziehung vor den übrigen Einheiten bevorzugt ist. Für diese Einheit hat man

$$\text{Ind.}\,\boldsymbol{E}_n(\alpha) \equiv \text{Ind.}\,\boldsymbol{e}(\alpha) + \gamma^{-2n}\,\text{Ind.}\,\boldsymbol{e}(\alpha^\gamma) + \cdots + \gamma^{-2(\mu-1)n}\,\text{Ind.}\,\boldsymbol{e}(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}), \ \text{Mod.}\,\lambda,$$

und man kann umgekehrt Ind. $\boldsymbol{e}\left(\alpha^{\gamma^h}\right)$ mittels der aus jener leicht abzuleitenden Formel

$$\text{Ind.}\,\boldsymbol{e}(\alpha^{\gamma^h}) \equiv -2\,(\gamma^{2h}\,\text{Ind.}\,\boldsymbol{E}_1(\alpha) + \gamma^{4h}\,\text{Ind.}\,\boldsymbol{E}_2(\alpha) + \cdots \\ \cdots + \gamma^{2(\mu-1)h}\,\text{Ind.}\,\boldsymbol{E}_{\mu-1}(\alpha)), \ \text{Mod.}\,\lambda,$$

durch die Indices von $\boldsymbol{E}_1(\alpha)$, $\boldsymbol{E}_2(\alpha)$, $\ldots$ $\boldsymbol{E}_{\mu-1}(\alpha)$ ausdrücken.

Substituirt man in diesem Ausdrucke des Ind. $\boldsymbol{E}_n(\alpha)$ für $\boldsymbol{e}(\alpha)$, für $\boldsymbol{e}(\alpha^\gamma)$ u. s. w. ihre Werthe nach dem oben gegebenen Ausdrucke dieser Kreistheilungs-Einheiten, so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$2\,\text{Ind.}\,\boldsymbol{E}_n(\alpha) \equiv (\gamma^{2n})(\text{Ind.}\,(1-\alpha) + \gamma^{-2n}\,\text{Ind.}\,(1-\alpha^\gamma) + \cdots + \gamma^{-(\lambda-2)2n}\,\text{Ind.}\,(1-\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})),$$

und wenn $\gamma^h \equiv \boldsymbol{k}$, Mod. λ, gesetzt wird, was $\gamma^{-2hn} \equiv \boldsymbol{k}^{\lambda-1-2n}$ giebt, so erhält man, mit Anwendung des Summenzeichens:

$$2\,\text{Ind.}\,\boldsymbol{E}_n(\alpha) \equiv (\gamma^{2n}-1)\,\Sigma \boldsymbol{k}^{\lambda-2n-1}\,\text{Ind.}\,(1-\alpha^k),$$

für $\boldsymbol{k} = 1, 2, 3, \ldots \lambda-1$; wozu, wenn $\lambda - 2n - 1$, wie hier angenommen werden soll, *positiv* ist, auch der Werth $\boldsymbol{k} = 0$ hinzugethan werden kann. Da nun oben

$$\text{Ind.}\,(1-\alpha^k) \equiv 1\overset{k}{\boldsymbol{m}}_1 + 2\overset{k}{\boldsymbol{m}}_2 + \cdots + (\lambda-1)\overset{k}{\boldsymbol{m}}_{\lambda-1} \equiv \sum_0^{\lambda-1} h\overset{k}{\boldsymbol{m}}_h$$

gefunden wurde, so hat man

$$2\,\text{Ind.}\,\boldsymbol{E}_n(\alpha) \equiv (\gamma^{2n}-1)\sum_0^{\lambda-1}\sum_0^{\lambda-1} h\boldsymbol{k}^{\lambda-2n-1}\overset{k}{\boldsymbol{m}}_h.$$

In diesen Ausdruck sollen nun statt der Zahlen $\overset{k}{m}_h$ die ***Perioden*** η_l, η_{l_1}, η_{l_2}, $\ldots$ $\eta_{\lambda-1}$ eingeführt werden. Dies geschieht mit Hülfe der Gleichung

$$\eta\eta_k = \overset{k}{m}\eta + \overset{k}{m}_1\eta_1 + \overset{k}{m}_2\eta_2 + \cdots + \overset{k}{m}_{\lambda-1}\eta_{\lambda-1} = \sum_0^{\lambda-1}{}_h \overset{k}{m}_h\eta_h,$$

aus welcher

$$\eta_i\eta_{i+k} = \sum_0^{\lambda-1}{}_h \overset{k}{m}_h\eta_{i+h}$$

folgt. Multiplicirt man mit i und nimmt die Summe für $i = 0, 1, 2, 3, \ldots \lambda-1$, so ergiebt sich

$$\sum_0^{\lambda-1}{}_i i\eta_i\eta_{i+k} = \sum_0^{\lambda-1}{}_i \sum_0^{\lambda-1}{}_h i\overset{k}{m}_h\eta_{i+h},$$

oder, was Dasselbe ist,

$$\sum_0^{\lambda-1}{}_i i\eta_i\eta_{i+k} = \sum_0^{\lambda-1}{}_i \sum_0^{\lambda-1}{}_h (i+h)\overset{k}{m}_h\eta_{i+h} - \sum_0^{\lambda-1}{}_i \sum_0^{\lambda-1}{}_h h\overset{k}{m}_h\eta_{i+h}$$

und, da $\Sigma_i\eta_{i+h} = -1$, $\sum_0^{\lambda-1}{}_i (i+h)\eta_{i+h} \equiv \sum_0^{\lambda-1}{}_i i\eta_i$, Mod. λ, und $\sum_0^{\lambda-1}{}_h \overset{k}{m}_h = \nu$ ist, so erhält man

$$\sum_0^{\lambda-1}{}_i i\eta_i\eta_{i+k} \equiv \nu\sum_0^{\lambda-1}{}_i i\eta_i + \sum_0^{\lambda-1}{}_h h\overset{k}{m}_h, \text{ Mod. } \lambda.$$

Multiplicirt man jetzt mit $k^{\lambda-2n-1}$, nimmt die Summe für $k = 0, 1, 2, \ldots \lambda-1$, und beachtet, dafs $\Sigma k^{\lambda-2n-1} \equiv 0$, Mod. λ ist, für $k = 0, 1, 2, \ldots \lambda-1$, so erhält man

$$\sum_0^{\lambda-1}{}_k \sum_0^{\lambda-1}{}_i ik^{\lambda-2n-1}.\eta_i\eta_{i+k} \equiv \sum_0^{\lambda-1}{}_k \sum_0^{\lambda-1}{}_h hk^{\lambda-2n-1}.\overset{k}{m}_h, \text{ Mod. } \lambda.$$

Der Ausdruck des zweiten Ind. $E_n(\alpha)$ verwandelt sich demnach in den folgenden:

$$2\,\text{Ind.}\, E_n(\alpha) \equiv (\gamma^{2n}-1)\sum_0^{\lambda-1}{}_k \sum_0^{\lambda-1}{}_i ik^{\lambda-2n-1}\eta_i\eta_{i+k}, \text{ Mod. } \lambda.$$

Anstatt dem k in dieser Doppelsumme die Werthe $0, 1, 2, \ldots \lambda-1$ zu geben, kann man ihm auch die Werthe $-i$, $-i+1$, $-i+2$, $\ldots$ $-i+\lambda-1$ zutheilen, ohne dafs in Beziehung auf den Modul λ diese Summe ihren Werth ändert. Setzt man also $k-i$ statt i, so erhält man

$$2\,\text{Ind.}\, E_n(\alpha) \equiv (\gamma^{2n}-1)\sum_0^{\lambda-1}{}_k \sum_0^{\lambda-1}{}_i i(k-i)^{\lambda-2n-1}.\eta_i\eta_k.$$

Wird jetzt $(k-i)^{\lambda-2n-1} = (i-k)^{\lambda-2n-1}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, so trennen sich in den einzelnen Gliedern die in Beziehung auf i zu nehmenden Summen von den in Beziehung auf k zu nehmenden, und wenn

der Kürze wegen

$$\sum_{0}^{\lambda-1}{}_{k} k^r \eta_k = \sum_{0}^{\lambda-2}{}_{i} i^r \eta_i = D_r$$

gesetzt und für einen Augenblick $\lambda - 2n - 1$ einfach durch m bezeichnet wird, so erhält man

$$2 \operatorname{Ind.} E_n(\alpha) \equiv (\gamma^{2n} - 1)\left(D_{m+1} D_0 - \frac{m}{1} D_m D_1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} D_{m-1} D_2 - \cdots\right).$$

Um die durch D_0, D_1, D_2, ... bezeichneten Gröfsen noch auf andere Weise zu bestimmen, gebe ich dem Ausdruck der Kreistheilung

$$F(\alpha, x) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \cdots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}}$$

die Form

$$F(\alpha, x) = \eta + \alpha \eta_1 + \alpha^2 \eta_2 + \cdots + \alpha^{\lambda-1} \eta_{\lambda-1}$$

und verwandle α in ε^v, wo v eine ***continuirliche Variable*** bedeutet. Hiernach wird

$$\frac{d_0^r F(e^v, x)}{dv^r} \equiv 1^r \eta_2 + 2^r \eta_2 + 3^r \eta_3 + \cdots + (\lambda-1)^r \eta_{\lambda-1} \equiv D_r;$$

wo die dem Zeichen des Differentials d zugefügte Null bedeutet, dafs nach der Differentiation $v = 0$ zu setzen ist. Verwandelt man v in $-v$, so erhält man eben so:

$$\frac{d_0^r F(e^{-v}, x)}{dv^r} \equiv (-1)^r D^r.$$

Aus diesen Werthen der Gröfsen D_r, als Differentialquotienten, folgt nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung über die Differentiation eines Products zweier Factoren:

$$D_{m+1} D_0 - \frac{m}{1} D_m D_1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} D_{m-1} D_2 - \cdots = \frac{d_0^m \left(\frac{dF(e^v, x)}{dv} \cdot F(e^{-v}, x)\right)}{dv^m}.$$

Aus der bekannten Gleichung der Kreistheilung

$$F(\alpha, x) F(\alpha^{-1}, x) = p$$

erhält man aber nach bekannten Principien die für jeden Werth der Variabeln v geltende Gleichung

$$F(e^v, x) F(e^{-v}, x) = p + V.W,$$

in welcher $V = 1 + e^v + e^{2v} + \cdots + e^{(\lambda-1)v}$ und W irgend eine ganze rationale Function von e^v ist, deren Coëfficienten ganze, die Wurzel x enthaltende complexe Zahlen sind; folglich ist auch

$$F(e^{-v}, x) = \frac{p}{F(e^v, x)} + \frac{VW}{F(e^v, x)}$$

und

$$\frac{dF(e^v, x)}{dv} F(e^{-v}, x) \equiv \frac{dlF(e^v, x)}{dx}(p + VW).$$

Differentiirt man diesen Ausdruck $m$mal nach einander und setzt $v = 0$, indem man bemerkt, dafs für $v = 0$, V und alle Differentialquotienten davon, bis zum $\lambda - 2$ten einschliefslich, durch λ theilbar sind, da $1^r + 2^r + 3^r + \cdots + (\lambda-1)^r \equiv 0$, Mod. λ, für $r = 1, 2, 3, \ldots \lambda - 2$ ist, und indem man ferner bemerkt, dafs $p \equiv 1$, Mod. λ ist, so erhält man:

$$\frac{d_0^m\left(\frac{dF(e^v, x)}{dx} F(e^{-v}, x)\right)}{dv^m} \equiv \frac{d_0^{m+1} lF(e^v, x)}{dv^{m+1}}, \text{ Mod. } \lambda,$$

also

$$D_{m+1} D_0 - \frac{m}{1} D_m D_1 + \frac{m(m-1)}{1.2} D_{m-1} D_2 - \cdots \equiv \frac{d_0^{m+1} lF(e^v, x)}{dv^{m+1}}, \text{ Mod. } \lambda.$$

Macht man von diesem einfachen Ausdrucke Gebrauch, und setzt zugleich für m wieder seinen Werth $\lambda - 2n - 1$, so erhält man folgenden merkwürdigen Ausdruck des Index von $E_n(\alpha)$:

$$\text{Ind. } E_n(\alpha) \equiv \tfrac{1}{2}(\gamma^{2n} - 1) \frac{d_0^{\lambda-2n} lF(e^v, x)}{dv^{\lambda-2n}}, \text{ Mod. } \lambda.$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommende Wurzel x ist in demselben nur scheinbar enthalten, weil sie, wenn nach Ausführung der Differentiation $v = 0$ gesetzt wird, und alle Glieder, die den Factor λ haben, weggelassen werden, von selbst mit herausfällt.

Aus dieser Darstellung des Ind. $E_n(\alpha)$ läfst sich sehr leicht eine andere, ebenfalls sehr bemerkenswerthe Darstellung desselben erlangen, in welcher der von α und x abhängige Ausdruck $F(\alpha, x)$ durch die nur von α allein abhängige, oben definirte complexe Zahl $\psi_r(\alpha)$ ersetzt wird. Aus der Gleichung

$$F(\alpha, x) F(\alpha^r, x) \equiv \psi_r(\alpha) F(\alpha^{r+1}, x)$$

folgt nämlich, wenn α in e^v verwandelt wird, nach denselben Principien wie oben, die für jeden beliebigen Werth der Variabel v geltende Gleichung

$$F(e^v, x) F(e^{rv}, x) \equiv \psi_r(e^v) F(e^{(r+1)v}, x) + V.W.$$

Und vermöge der Eigenschaft des $V = 1 + e^v + e^{2v} + \cdots + e^{(\lambda-1)v}$, dafs V selbst, so wie seine Differentialquotienten, bis zum $(\lambda-2)$ten einschliefslich, für den Werth $v = 0$ congruent Null sind, nach dem Modul λ, erhält man aus dieser Gleichung

$$\frac{d_0^{\lambda-2n} lF(e^v, x)}{dv^{\lambda-2n}} + \frac{d_0^{\lambda-2n} lF(e^{rv}, x)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv \frac{d_0^{\lambda-2n} lF(e^{(r+1)v}, x)}{dv^{\lambda-2n}} + \frac{d_0^{\lambda-2n} l\psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}},$$

oder, vereinfacht:

$$(1+r^{\lambda-2n}-(r+1)^{\lambda-2n})\frac{d_0^{\lambda-2n}lF(e^v,x)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv \frac{d_0^{\lambda-2n}l\psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}}, \text{ Mod. } \lambda.$$

Durch diese Congruenz verwandelt sich der obige Ausdruck des Ind. $E_n(\alpha)$ in folgenden:

$$\text{Ind. } E_n(\alpha) \equiv \frac{\gamma^{2n}-1}{2(1+r^{\lambda-2n}-(r+1)^{\lambda-2n})}\cdot\frac{d_0^{\lambda-2n}l\psi_r(\alpha)}{dv^{\lambda-2n}}, \text{ Mod. } \lambda.$$

Endlich leite ich hieraus noch einen andern Ausdruck des Ind. $E_n(\alpha)$ ab, welcher deshalb der wichtigste von allen zu sein scheint, weil er diesen Index der Einheit $E_n(\alpha)$ durch die complexe Primzahl $f(\alpha)$ selbst ausdrückt, in Beziehung auf welche das Zeichen Ind. zu nehmen ist. Hierzu wird die Zerfällung der complexen Zahl $\psi_r(\alpha)$ in ihre complexen idealen oder wirklichen Primfactoren gebraucht, welche ich im (35ten Bande dieses Journals, S. 362) gegeben habe und welche sich in folgender Art darstellen läfst:

$$\psi_r(\alpha) = \pm\alpha^k \Pi f(\alpha^{\gamma^h});$$

wo das Productenzeichen Π sich auf alle diejenigen Werthe des h erstreckt, welche nicht negativ, aber kleiner als $\lambda-1$ sind, und dabei der Bedingung genügen, dafs

$$\gamma_{\mu-h}+\gamma_{\mu-h+\text{Ind. }r} > \lambda$$

ist; wo das Zeichen γ_k den kleinsten positiven Werth von γ^k für den Modul λ, Ind. r den Index des r für die primitive Wurzel γ und den Modul λ bezeichnet und $\mu=\frac{1}{2}(\lambda-1)$ ist. Um die in diesem Producte enthaltenen Primfactoren, welche im Allgemeinen ideal sein werden, zu wirklichen complexen Zahlen zu machen, erhebe ich beide Seiten dieser Gleichung zur Hten Potenz und nehme H so an, dafs $f(\alpha)^H$ eine wirkliche complexe Zahl ist. Diese complexe Zahl soll auch durch Multiplication mit einer passenden einfachen Einheit α^m so zubereitet angenommen werden, dafs sie für den Modul $(1-\alpha)^2$ einer nicht complexen ganzen Zahl congruent ist. Alsdann fällt in dem obigen Ausdrucke des $\psi_r(\alpha)$ die einfache Einheit α^k weg, und man hat

$$\psi_r(\alpha)^H = \pm\Pi f(\alpha^{\gamma^h})^H.$$

Diese Gleichung wird wieder, wie oben, in folgende, für alle beliebigen Werthe der Variabel v geltende Gleichung verwandelt:

$$\psi_r(e^v)^H = \Pi f(e^{v\gamma^h})^H + V.W,$$

und giebt alsdann in derselben Weise:

$$H.\frac{d_0^{\lambda-2n}l\psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} = \Sigma_h\frac{d_0^{\lambda-2n}l\left(f(e^{v\gamma^h})^H\right)}{dv^{\lambda-2n}},$$

oder vereinfacht:,

$$H.\frac{d_0^{\lambda-2n}l\psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} = \frac{d_0^{\lambda-2n}l(f(e^v)^H)}{dv^{\lambda-2n}}\Sigma_h\gamma^{(\lambda-2n)h}.$$

Es ist nun die Summe $\Sigma_h\gamma^{(\lambda-2n)h}$ zu suchen, in welcher dem h alle diejenigen Werthe von $h=0$ bis $h=\lambda-2$ zu geben sind, welche der Bedingung genügen, dafs $\gamma_{\mu-h}+\gamma_{\mu-h+\text{Ind.}\,r}>\lambda$ ist. Zu diesem Zwecke bemerke ich, dafs, wie leicht zu beweisen, der Ausdruck

$$\frac{1}{\lambda}(\gamma_{\mu-i}+\gamma_{\mu-i+\text{Ind.}\,r}-\gamma_{\mu-i+\text{Ind.}\,(r+1)})$$

in allen den Fällen, wo i einen der mit h bezeichneten Werthe hat, für welche $\gamma_{\mu-1}+\gamma_{\mu-1+\text{Ind.}\,r}>\lambda$ ist, gleich *Eins* ist; während derselbe für alle andern Werthe des i gleich Null ist. Hieraus folgt

$$\Sigma_h\gamma^{(\lambda-2n)h} = \Sigma_i\frac{1}{\lambda}(\gamma_{\mu-i}+\gamma_{\mu-i+\text{Ind.}\,r}-\gamma_{\mu-i+\text{Ind.}\,(r+1)})\gamma^{(\lambda-2n)i};$$

wo dem h nur die oben angegebenen Werthe, aber dem i alle Werthe $0, 1, 2, \ldots \lambda-2$ zu geben sind. Um bequeme Congruenzen für den Modul λ^2 anwenden zu können, welches wegen des als Divisor hier vorkommenden λ nöthig ist, setze ich $\gamma^{\lambda(\lambda-2n)i}$ statt $\gamma^{(\lambda-2n)i}$; was in Beziehung auf den Modul λ keinen Unterschied macht. Ich bezeichne ferner die zu suchende Summe $\Sigma_h\gamma^{(\lambda-2n)h}$ mit dem Buchstaben T, multiplicire mit λ, und erhalte so folgende Congruenz für den Modul λ^2:

$$\lambda T \equiv \Sigma(\gamma_{\mu-i}+\gamma_{\mu-i+\text{Ind.}\,r}-\gamma_{\mu-i+\text{Ind.}\,(r+1)})\gamma^{\lambda(\lambda-2n)i},\ \text{Mod.}\ \lambda^2,$$

oder

$$\lambda T \equiv \Sigma\gamma_{\mu-i}\gamma^{\lambda(\lambda-2n)i}+\Sigma\gamma_{\mu+i+\text{Ind.}\,r}\gamma^{\lambda(\lambda-2n)i}-\Sigma\gamma_{\mu-i+\text{Ind.}\,(r+1)}\gamma^{\lambda(\lambda-2n)i}.$$

Ich betrachte nun zuerst nur die zweite dieser drei Summen, nämlich die Summe

$$\sum_0^{\lambda-2}{}_i\gamma_{\mu-i+\text{Ind.}\,r}\gamma^{\lambda(\lambda-2n)i},$$

aus welcher die erste hervorgeht, wenn $r=1$ gesetzt, und die dritte, wenn r in $r+1$ verwandelt wird. Ich verwandle i in $i+\mu+\text{Ind.}\,r$ und bemerke, dafs nach dieser Verwandlung dem i in der Summe immer noch dieselben Werthe $0, 1, 2, \ldots \lambda-2$ zukommen; was daraus folgt, dafs in Beziehung auf den Modul λ^2 die Glieder dieser Summe einen Cyclus bilden. Diese Summe ist daher für den Modul λ^2 der folgenden congruent:

$$\sum_0^{\lambda-2}{}_i\gamma_{-i}\gamma^{\lambda(k-2n)(i+\mu+\text{Ind.}\,r)},$$

und da $\gamma^{\lambda(\lambda-2n)\mu}\equiv-1$, $\gamma^{\lambda(\lambda-2n)\,\text{Ind.}\,r}\equiv r^{\lambda(\lambda-2n)}$ für den Modul λ^2 ist, so wird

dieselbe in folgende Form gebracht:

$$-r^{\lambda(\lambda-2n)}\sum_{0}^{\lambda-2}{}_i\gamma_{-i}\gamma^{\lambda(\lambda-2n)i}.$$

Macht man von diesem Werthe Gebrauch, und von den entsprechenden, welche man erhält, wenn $r=1$ und $r+1$ statt r gesetzt wird, so erhält man folgenden Ausdruck der Summe T:

$$\lambda T \equiv -(1+r^{\lambda(\lambda-2n)}-(r+1)^{\lambda(\lambda-2n)})\sum_{0}^{\lambda-2}{}_i\gamma_{-i}\gamma^{\lambda(\lambda-2n)i},\ \text{Mod. } \lambda^2.$$

Man setze jetzt $\gamma_{-i}=k$, so wird $\gamma^{-i}\equiv k$ und $\gamma^i\equiv k^{\lambda-2}$, für den Modul λ; woraus $\gamma^{i\lambda}\equiv k^{\lambda(\lambda-2)}$, Mod. λ^2, also

$$\sum_{0}^{\lambda-2}{}_i\gamma_{-i}\gamma^{\lambda(\lambda-2n)i}\equiv\sum_{0}^{\lambda-1}{}_k k^{\lambda(\lambda-2n)(\lambda-2)+1},\ \text{Mod. } \lambda^2$$

folgt, oder, vereinfacht, mit Hülfe der Congruenz $k^{\lambda(\lambda-1)}\equiv 1$, Mod. λ^2:

$$\sum_{0}^{\lambda-2}{}_i\gamma_{-i}\gamma^{\lambda(\lambda-2n)i}\equiv\sum_{0}^{\lambda-1}{}_k k^{\lambda(2n-1)+1},\ \text{Mod. } \lambda^2.$$

Nun folgt aber aus den bekannten Summen-Ausdrücken der Potenzen der natürlichen Zahlen, dafs

$$\sum_{0}^{\lambda-1}k^{\lambda(2n-1)+1}\equiv(-1)^{m-1}B_m\lambda,\ \text{Mod. } \lambda^2$$

ist; wo B_m die $m$te *Bernoulli*sche Zahl bezeichnet und wo der Kürze wegen auf einen Augenblick für $\frac{1}{2}(\lambda(2n-1)+1)$ das einfache Zeichen m gesetzt ist. Demnach ist

$$\lambda T \equiv (-1)^m(1+r^{\lambda(\lambda-2n)}-(r+1)^{\lambda(\lambda-2n)})B_m\lambda,\ \text{Mod. } \lambda^2.$$

Und wenn durch λ dividirt wird und für $r^{\lambda(\lambda-2n)}$ und $(r+1)^{\lambda(\lambda-2n)}$ die nach dem Modul λ congruenten einfacheren Potenzen $r^{\lambda-2n}$ und $(r+1)^{\lambda-2n}$ gesetzt werden, so ist

$$T\equiv(-1)^m(1+r^{\lambda-2n}-(r+1)^{\lambda-2n})B_m,\ \text{Mod. } \lambda.$$

Die hierin vorkommende *Bernoulli*sche Zahl B_m kann noch durch Reduction auf eine möglichst niedrige *Bernoulli*sche Zahl vereinfacht werden; mittels der von mir in einer kleinen Abhandlung (Bd. 41, S. 371 dieses Journals) bewiesenen Eigenschaft der *Bernoulli*schen Zahlen, dafs

$$\frac{B_n}{n}\equiv\frac{(-1)^\mu B_{n+\mu}}{n+\mu},\ \text{Mod. } \lambda$$

ist, für $\mu=\frac{1}{2}(\lambda-1)$ und für alle Werthe des n, welche nicht Vielfache von μ sind. Diese Congruenz giebt unmittelbar die allgemeinere:

$$\frac{B_n}{n}\equiv\frac{(-1)^{s\mu}B_{n+s\mu}}{n+s\mu},\ \text{Mod. } \lambda,$$

welche für alle ganzzahligen Werthe von s gültig ist. Setzt man in dieser $s = 2n-1$, so erhält man für $m = \frac{1}{2}(\lambda(2n-1)+1)$:

$$B_m \equiv (-1)^\mu \frac{B_n}{2n}, \text{ Mod. } \lambda.$$

Wird dieser einfachere Werth des B_m angewendet und erwogen, dafs $(-1)^{m+u} = (-1)^n$ ist, so erhält man

$$T \equiv (-1)^n (1 + r^{\lambda-2n} - (r+1)^{\lambda-2n}) \frac{B_n}{2n}, \text{ Mod. } \lambda,$$

und demnach

$$H \frac{d_0^{\lambda-2n} l\psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv (-1)^n (1 + r^{\lambda-2n} - (r+1)^{\lambda-2n}) \frac{B_n}{2n} \frac{d_0^{\lambda-2n} l(f(e^v)^H)}{dv^{\lambda-2n}}, \text{ Mod. } \lambda.$$

Vermöge dieser Congruenz verwandelt sich der zuletzt gegebene Ausdruck des Ind. $E_n(\alpha)$ in folgenden:

$$\text{Ind. } E_n(\alpha) \equiv (-1)^n (\gamma^{2n} - 1) \frac{B_n}{4nH} \frac{d_0^{\lambda-2n} l(f(e^v)^H)}{dv^{\lambda-2n}}, \text{ Mod. } \lambda.$$

Dieser Ausdruck, in welchem die Zahlen der Kreistheilung nicht weiter vorkommen, welcher vielmehr den Index der Einheit $E_n(\alpha)$ durch die complexe Primzahl $f(\alpha)$ selbst darstellt, in Beziehung auf welche das Zeichen Index zu nehmen ist, wird in dem Falle, wo H ein Vielfaches von λ ist, nichtssagend. Es sind also auch bei der Anwendung dieser Formel diejenigen Ausnahmewerthe des λ auszuschliefsen, für welche λ ein Factor des Zählers einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen ist. Für den Fall, dafs $f(\alpha)$ eine wirkliche complexe Primzahl ist, hat man einfach $H = 1$ zu setzen. Man kann aber auch für den Fall, dafs $f(\alpha)$ eine ideale complexe Primzahl ist, den Ausdruck des Ind. $E_n(\alpha)$ einfach durch

$$\text{Ind. } E_n(\alpha) \equiv (-1)^n (\gamma^{2n} - 1) \frac{B_n}{4n} \frac{d_0^{\lambda-2n} l f(e^v)}{dv^{\lambda-2n}}, \text{ Mod. } \lambda$$

darstellen, wenn man ein für allemal festsetzt, dafs für $f(\alpha)$, falls es ideal ist, sein Ausdruck als Hte Wurzel aus der wirklichen complexen Zahl $f(\alpha)^H$ genommen werden soll.

§. 2.

Eine Erweiterung der Theorie der Kreistheilung.

Nachdem in dem vorhergehenden Paragraphen die Indices von λ, $1-\alpha^k$ und $e(\alpha)$ oder $E_n(\alpha)$ gefunden worden sind, für welche der Modul $f(\alpha)$ ein Primfactor einer nichtcomplexen ganzen Primzahl p von der Form $\nu\lambda+1$ ist, mufs noch dieselbe Aufgabe für den allgemeinern Fall gelöset werden, dafs

der Modul $f(\alpha)$ eine zu irgend einem Exponenten t (Divisor von $\lambda-1$) gehörende complexe Primzahl ist. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert als Vorarbeit eine Erweiterung der Theorie der *Kreistheilung*, welche ich hier kurz entwickeln will.

Es sei also $f(\alpha)$ ein idealer complexer Primfactor der nichtcomplexen Primzahl q, welche zum Exponenten t (einem Divisor von $\lambda-1$) gehört, für den Modul λ, so dafs $q^t \equiv 1$, Mod. λ, dafs aber keine niedrigere Potenz von q der Einheit congruent ist, für den Modul λ. Wird eine solche complexe Primzahl $f(\alpha)$ zum Modul genommen, so ist ein vollständiges Resten-System dieses Moduls in der Form

$$a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{t-1}\alpha^{t-1}$$

enthalten, in welcher alle die Zahlen a, a_1, a_2, ... a_{t-1} alle ganzzahligen Werthe von 0 bis $q-1$ einschliefslich erhalten können. Die Anzahl aller verschiedenen Reste ist also gleich q^t; nämlich gleich der Anzahl aller Verbindungen der q Zahlen a mit den q Zahlen a_1, mit den q Zahlen a_2, u. s. w. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich daraus, dafs, *erstens*, jeder wirklichen complexen Zahl $F(\alpha)$ die Form

$$F(\alpha) = \varphi(\eta) + \alpha\varphi_1(\eta) + \alpha^2\varphi_2(\eta) + \cdots + \alpha^{t-1}\varphi_{t-1}(\eta)$$

gegeben werden kann, wo $\varphi(\eta)$, $\varphi_1(\eta)$, u. s. w. complexe Zahlen sind, welche nur die aus je t Gliedern bestehenden Perioden der Wurzeln α, α^2, ... $\alpha^{\lambda-1}$ enthalten (M. s. meine Abhandlung Bd. 35. S. 337 dieses Journals); *zweitens* daraus, dafs in Beziehung auf einen solchen Modul $f(\alpha)$ diese Perioden, und also auch die complexen Zahlen $\varphi(\eta)$, $\varphi_1(\eta)$, u. s. w., stets nichtcomplexen ganzen Zahlen congruent sind; und endlich, *drittens*, daraus, dafs eine complexe Zahl von der Form

$$(a-b) + (a_1-b_1)\alpha + (a_2-b_2)\alpha^2 + \cdots + (a_{t-1}-b_{t-1})\alpha^{t-1}$$

nicht durch $f(\alpha)$ theilbar sein kann, ohne dafs zugleich $a \equiv b$, $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$, ... $a_{t-1} \equiv b_{t-1}$ ist, für den Modul q.

Es giebt ferner für den Modul $f(\alpha)$ stets primitive Wurzeln $g(\alpha)$, in der Art, dafs die verschiedenen Potenzen einer solchen primitiven Wurzel

$$(1.) \qquad g(\alpha),\ g(\alpha)^2,\ g(\alpha)^3,\ \ldots\ g(\alpha)^{q^t-2},$$

alle verschiedenen Reste für den Modul $f(\alpha)$, mit alleiniger Ausnahme des Restes 0, vollständig erschöpfen. Der Beweis dieser Behauptung kann eben so leicht und nach derselben Methode gegeben werden, nach welcher man in den Elementen der Zahlentheorie die Existenz der primitiven Wurzeln für die gewöhnlichen Primzahlen beweiset; weshalb ich denselben übergehe.

Wenn $F(\alpha)$ eine beliebige, jedoch nicht durch den Modul $f(\alpha)$ theilbare complexe Zahl bezeichnet, so ist

$$F(\alpha)^{q^t-1} \equiv 1, \text{ Mod. } f(\alpha).$$

Wenn ferner $g(\alpha)$ eine primitive Wurzel ist, so hat man

$$g(\alpha)^{\frac{1}{2}(q^t-1)} \equiv -1, \quad g(\alpha)^{\frac{q^t-1}{\lambda}} \equiv \alpha^k, \text{ Mod. } f(\alpha);$$

wo k niemals congruent Null ist, für den Modul λ. Es kann auch die primitive Wurzel $g(\alpha)$, welche in dem Folgenden einfach durch g bezeichnet werden soll, immer so angenommen werden, dafs $k \equiv 1$ ist und dafs man also

$$g^{\frac{q^t-1}{\lambda}} \equiv \alpha, \text{ Mod. } f(\alpha)$$

hat. Wir wollen ein für allemal festsetzen, dafs die primitive Wurzel g *immer* dieser Bedingung gemäfs angenommen werden soll. Die Beweise der in diesen Congruenzen enthaltenen Sätze, welche nach den in der Theorie der complexen Zahlen gebräuchlichen Methoden leicht sind, glaube ich ebenfalls hier übergehen zu können. Zu bemerken ist noch, dafs die primitive Wurzel g niemals eine nichtcomplexe Zahl sein kann, aufser in dem Falle $t = 1$, für welchen die primitiven Wurzeln des Modul $f(\alpha)$ genau dieselben sind, wie die primitiven Wurzeln der gewöhnlichen Primzahl $p = Nf(\alpha)$.

Ist $g^i \equiv \varphi(\alpha)$, Mod. $f(\alpha)$, so soll i hier ebenfalls der Index von $\varphi(\alpha)$ für den Mod. $f(\alpha)$ heifsen und durch Ind. $\varphi(\alpha)$ bezeichnet werden. Es gelten dann für die Indices ebenfalls die Gleichungen

$$\text{Ind. } \varphi(\alpha) + \text{Ind. } F(\alpha) \equiv \text{Ind. } (\varphi(\alpha) F(\alpha)), \text{ Mod. } q^t - 1 \text{ und}$$
$$n \text{ Ind. } \varphi(\alpha) \equiv \text{Ind. } (\varphi(\alpha)^n), \text{ Mod. } q^t - 1.$$

Nachdem Dieses vorbereitet ist, gehe ich zu dem Hauptgegenstande dieses Paragraphen über, nämlich zu der Erweiterung der Theorie der *Kreistheilung;* und zwar knüpfe ich dieselbe an die complexe Zahl $\psi_r(\alpha)$ der Kreistheilung an. welche schon oben definirt wurde und für welche die Lehre von der Kreistheilung folgende sechs Ausdrücke giebt:

$$\psi_r(\alpha) = \Sigma \alpha^{h-(r+1)\text{ Ind. }(g^h+1)},$$
$$\psi_r(\alpha) = \Sigma \alpha^{h+r\text{ Ind. }(g^h+1)},$$
$$\psi_r(\alpha) = \Sigma \alpha^{rh-(r+1)\text{ Ind. }(g^h+1)},$$
$$\psi_r(\alpha) = \Sigma \alpha^{-(r+1)h+r\text{ Ind. }(g^h+1)},$$
$$\psi_r(\alpha) = \Sigma \alpha^{rh+\text{ Ind. }(g^h+1)},$$
$$\psi_r(\alpha) = \Sigma \alpha^{-(r+1)h+\text{ Ind. }(g^h+1)};$$

wo die Summenzeichen sich auf die Werthe $h = 0, 1, 2, \ldots p-2$ erstrecken, mit Ausschlufs des Werths $h = \frac{1}{2}(p-1)$, für welchen $g^h + 1 \equiv 0$, Mod. p, sein würde.

Die hier auszuführende Erweiterung der Theorie der Kreistheilung soll nun darin bestehen, dafs in diesen Ausdrücken des $\psi_r(\alpha)$ die primitive Wurzel g der Primzahl p als primitive Wurzel für den complexen Modul $f(\alpha)$ aufgefafst und demgemäfs auch das Zeichen Ind. auf denselben Modul $f(\alpha)$ bezogen werden soll. Die Summen werden dann in Beziehung auf die Werthe $h = 0, 1, 2, 3, \ldots q^t - 2$ zu nehmen sein, mit Ausschlufs des Werths $h = \frac{1}{2}(q^t-1)$, für welchen $g^h + 1 \equiv 0$, Mod. $f(\alpha)$ sein und folglich Ind. (g^h+1) keinen Sinn haben würde. Die complexen Zahlen $\psi_r(\alpha)$, in diesem neuen Sinne genommen, sollen zur Unterscheidung von denen der Kreistheilung durch $\Psi_r(\alpha)$ bezeichnet werden. Die obigen sechs verschiedenen Ausdrücke von $\psi_r(\alpha)$ stimmen auch bei dieser neuen Auffassung der Zeichen g und Ind. ganz miteinander überein; in der Art, dafs sie alle nur verschiedene Ausdrücke einer und derselben complexen Zahl sind. Es wird also hinreichen, nur einen dieser Ausdrücke zu untersuchen, zu welchem ich den letzten wähle. Ich setze also

$$\Psi_r(\alpha) = \Sigma \alpha^{-(r+1)h + \text{Ind.}(g^h+1)};$$

wo das Summenzeichen sich auf die Werthe $h = 0, 1, 2, 3, \ldots q^t - 2$ erstreckt; mit Ausschlufs von $h = \frac{1}{2}(q^t-1)$, und wo g eine primitive Wurzel für den Modul $f(\alpha)$ bedeutet, auch das Zeichen Ind. sich auf denselben Modul und dieselbe primitive Wurzel bezieht. Der Modul $f(\alpha)$ selbst ist ein complexer idealer Primfactor der zum Exponenten t gehörenden gewöhnlichen Primzahl q.

Aus dieser Definition der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$ folgt zunächst unmittelbar

$$\Psi_{r+\lambda}(\alpha) = \Psi_r(\alpha), \quad \Psi_v(\alpha) = -1, \quad \Psi_{\lambda-1}(\alpha) = -1.$$

Setzt man ferner α^q statt α, so erhält man

$$\Psi_r(\alpha^q) = \Sigma \alpha^{-(r+1)qh + q\,\text{Ind.}(g^h+1)}.$$

Es ist aber $(g^h+1)^q \equiv g^{hq}+1$, für den Modul q, und also auch für den Modul $f(\alpha)$, welcher ein Factor von q ist; demnach ist auch $q\,\text{Ind.}(g^h+1) \equiv \text{Ind.}(g^{qh}+1)$, Mod. (q^t-1). Setzt man Dieses in den obigen Ausdruck des $\Psi_r(\alpha^q)$ und $k \equiv qh$, Mod. (q^t-1), so entsprechen den Werthen $h = 0, 1, 2, \ldots \ldots q^t-2$, mit Ausschlufs von $h = \frac{1}{2}(q^t-1)$, genau die Werthe $k = 0, 1, 2, 3, \ldots q^t-2$, mit Ausschlufs von $k = \frac{1}{2}(q^t-1)$, wenn auch in anderer Ordnung genommen,

und darum ist

$$\Psi_r(\alpha^q) = \Sigma\alpha^{-(r+1)k+\text{Ind.}(g^k+1)},$$

also

$$\Psi_r(\alpha^q) = \Psi_r(\alpha);$$

aus welcher Gleichung auch sogleich die allgemeinere

$$\Psi_r(\alpha^{q^h}) = \Psi_r(\alpha)$$

für jeden beliebigen Werth des h folgt. Man sieht hieraus, dafs die complexe Zahl $\Psi_r(\alpha)$ nicht die einzelnen Wurzeln α, α^2, α^3, ... $\alpha^{\lambda-1}$ in sich enthält, sondern nur die ***Perioden*** derselben, welche je t Glieder umfassen. Dies ist die ***erste wesentliche Grund-Eigenschaft*** der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$.

Multiplicirt man die beiden reciproken complexen Zahlen $\Psi_r(\alpha)$ und $\Psi_r(\alpha^{-1})$ miteinander, so wird das Product derselben durch die Doppelsumme

$$\Psi_r(\alpha)\Psi_r(\alpha^{-1}) = \Sigma\Sigma\alpha^{-(r+1)(h-k)+\text{Ind.}(g^h+1)-\text{Ind.}(g^k+1)}$$

ausgedrückt, für $h = 0, 1, 2, 3, \ldots q^t-2$, $k = 0, 1, 2, \ldots q^t-2$; mit Ausschlufs von $h = \frac{1}{2}(q^t-1)$ und $k = \frac{1}{2}(q^t-1)$. Ich scheide aus dieser Doppelsumme zunächst alle die Werth-Verbindungen von h und k aus, für welche $h = k$ ist. Ihrer finden offenbar q^t-2 Statt, und es wird für dieselben die Potenz des α unter dem doppelten Summenzeichen nur gleich ***Eins***. Man hat also

$$\Psi_r(\alpha)\Psi_r(\alpha^{-1}) = q^t-2+\Sigma\Sigma\alpha^{-(r+1)(h-k)+\text{Ind.}(g^h+1)-\text{Ind.}(g^k+1)}$$

für alle ganzzahligen Werthe des h und k von 0 bis q^t-2 einschliefslich; mit Ausschlufs der Werthe $\frac{1}{2}(q^t-1)$ und der Werth-Verbindungen, für welche $h = k$ ist. Man transformire nun diese Doppelsumme, indem man

$$g^{k-h} \equiv g^{k'}, \quad \frac{g^k+1}{g^h+1} \equiv g^{h'}, \quad \text{Mod. } f(\alpha),$$

setzt, so erhält man

$$\Psi_r(\alpha)\Psi_r(\alpha^{-1}) = q^l-2+\Sigma\Sigma\alpha^{(r+1)k'-h'}.$$

Die Summenzeichen beziehen sich hier auf die verschiedenen Werthe des k' und h', und es sind denselben alle Werthe von 1 bis q^t-2 einschliefslich zu geben; mit Ausschlufs derjenigen Werth-Verbindungen, für welche $h' = k'$ ist. Vermöge der Congruenzen, welche die neuen Unbestimmten k' und h' durch die alten k und h ausdrücken, entspricht nämlich jeder einzelnen Verbindung der Werthe von h und k eine, und nur eine Werth-Verbindung der angegebenen Werthe von h' und k'; und eben so, umgekehrt: jeder beliebigen Werth-Verbindung des h' und k' entspricht unter den angegebenen Bedingungen eine, und nicht mehr als eine der Werth-Verbindungen des h und k. Ich

nehme jetzt mit dieser Doppelsumme noch die kleine Änderung vor, dafs ich sie mit auf diejenigen Werth-Verbindungen erstrecke, welche $h' = k'$ geben. Dies wird ohne Beeinträchtigung der Richtigkeit der obigen Gleichung geschehen können, wenn die Summe aller, der Werth-Verbindung $h' = k'$ entsprechenden Glieder, nämlich $\Sigma\alpha^{rk'}$, in Abzug gebracht wird. Es ist demnach

$$\Psi_r(\alpha)\Psi_r(\alpha^{-1}) = q^t - 2 - \Sigma\alpha^{rk'} + \Sigma\Sigma\alpha^{(r+1)k'-h'},$$

für $h' = 1, 2, 3, \ldots q^t - 2$, $k' = 1, 2, 3, \ldots q^t - 2$. Die Werthe des h' und k' sind nun gänzlich unabhängig von einander, und man kann die Summation in Beziehung auf beide einzeln ausführen.

Summirt man zuerst in Beziehung auf h', so erhält man

$$\Sigma\alpha^{-h'} = \alpha^{-1} + \alpha^{-2} + \alpha^{-3} + \cdots + \alpha^{-(q^t-2)} = -1,$$

also

$$\Psi_r(\alpha)\Psi_r(\alpha^{-1}) = q^t - 2 - \Sigma\alpha^{rk'} - \Sigma\alpha^{(r+1)k'}.$$

Schliefst man die beiden besonderen Fälle aus, wo $r \equiv 0$, oder $r + 1 \equiv 0$, Mod. λ, so ist wieder jede dieser beiden Summen gleich -1, und man hat als Endresultat:

$$\Psi_r(\alpha)\Psi_r(\alpha^{-1}) = q^t;$$

welches die ***zweite Grund-Eigenschaft*** der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$ ist, deren Analogie mit der entsprechenden Eigenschaft der complexen Zahlen der Kreistheilung $\psi_r(\alpha)$ auf der Hand liegt.

In den beiden besondern Fällen, $r \equiv 0$ oder $r + 1 \equiv 0$, Mod. λ wird allemal eine der beiden Summen $\Sigma\alpha^{k'r}$ oder $\Sigma\alpha^{(r+1)k'}$, weil sie alsdann aus lauter ***Einsen*** besteht, gleich $q^t - 2$, die andere aber gleich -1. Man erhält demnach

$$\Psi_0(\alpha)\Psi_0(\alpha^{-1}) = 1, \quad \Psi_{-1}(\alpha)\Psi_{-1}(\alpha^{-1}) = 1;$$

welches mit den oben angegebenen, aus der Definition unmittelbar folgenden Werthen von $\Psi_0(\alpha) = -1$ und $\Psi_{-1}(\alpha) = -1$ übereinstimmt, aber nichts Neues lehrt.

Nach der ***ersten*** Grund-Eigenschaft der hier behandelten complexen Zahlen ist:

$$\Psi_r(\alpha^{q^h}) = \Psi_r(\alpha).$$

Wenn nun t eine ***gerade*** Zahl ist, so ist, weil q zum Exponenten t gehört, $q^t \equiv 1$ und $q^{\frac{1}{2}t} \equiv -1$, Mod. λ. Es ergiebt sich daher, wenn $h = \frac{1}{2}t$ gesetzt wird:

$$\Psi_r(\alpha^{-1}) = \Psi_r(\alpha);$$

woraus, vermöge der ***zweiten*** Grund-Eigenschaft dieser complexen Zahlen,

$$\Psi_r(\alpha) = q^{\frac{1}{2}t}$$

folgt. Für den Fall, dafs t eine ***gerade*** Zahl ist, ist also die Zahl $\Psi_r(\alpha)$ in Wahrheit nicht eine complexe Zahl, sondern einer Potenz der gewöhnlichen Primzahl q gleich. Das Haupt-Interesse der gegenwärtigen Untersuchung liegt demnach nur in dem Falle, wo t ***ungerade*** ist, in welchem $\Psi_r(\alpha)$ nicht nur scheinbar, sondern auch ***wirklich*** eine complexe Zahl ist.

Zur vollständigen Erkenntnifs der complexen Zahlen $\Psi_r(\alpha)$, namentlich für den Fall wo t ***ungerade*** ist, gehört noch die Zerlegung derselben in ihre complexen, idealen oder wirklichen Primfactoren, welche, weil nach der ***zweiten*** Grund-Eigenschaft derselben das Product zweier reciproker Zahlen einer Potenz von q gleich ist, nur die idealen Primfactoren des q sein können; also nur die Primfactoren $f(\alpha)$, $f(\alpha^\gamma)$, $f(\alpha^{\gamma^2})$, ... u. s. w. Von diesen sind bekanntlich, da q zum Exponenten t gehört, je t einander gleich, so dafs nur $\frac{\lambda-t}{t}$ wesentlich verschiedene Primfactoren vorhanden sind; als welche, wenn $\frac{\lambda-1}{t} = \tau$ gesetzt wird (welche Bedeutung der Buchstabe τ in dem Folgenden überall beibehalten soll), die Primfactoren

$$f(\alpha),\ f(\alpha^\gamma),\ f(\alpha^{\gamma^2}),\ \ldots f(\alpha^{\gamma^{\tau-1}})$$

genommen werden können. Man hat daher

$$\Psi_r(\alpha) = \boldsymbol{E}(\alpha) f(\alpha)^m . f(\alpha^\gamma)^{m_1} \ldots f\left(\alpha^{\gamma^{\tau-1}}\right)^{m_{\tau-1}},$$

wo $\boldsymbol{E}(\alpha)$ eine ***Einheit*** ist und $m,\ m_1, \ldots m_{\tau-1}$ die noch zu bestimmenden Exponenten sind, welche angeben, wievielmal jeder der verschiedenen Primfactoren des q in $\Psi_r(\alpha)$ enthalten ist.

Mittels der zweiten Grund-Eigenschaft der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$ kann nun sogleich die eine Hälfte dieser Exponenten durch die andere Hälfte ausgedrückt werden. Wenn nämlich, wie hier vorausgesetzt wird, t eine ***ungerade*** Zahl ist, so ist τ eine ***gerade*** Zahl, weil $\lambda - 1 = t\tau$ ist. Verwandelt man α in α^{-1} und erwägt, dafs $f(\alpha^{\gamma^h}) = f(\alpha^{\gamma^{h+\tau}}) = f(\alpha^{\gamma^{h+2\tau}})$ u. s. w. ist, so erhält man

$$\Psi_r(\alpha^{-1}) = \boldsymbol{E}(\alpha^{-1}) . f(\alpha)^{m_{\frac{1}{2}\tau}} . f(\alpha^\gamma)^{m_{\frac{1}{2}\tau+1}} \ldots f(\alpha^{\gamma^{\tau-1}})^{m_{\frac{1}{2}\tau-1}}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dem vorigen, so erhält man, vermöge der Gleichung $\Psi_r(\alpha)\Psi_r(\alpha^{-1}) = q^t$, für die Exponenten $m,\ m_1,\ m_2, \ldots m_{\tau-1}$ folgende Gleichungen:

$$m + m_{\frac{1}{2}\tau} = t,\ \ m_1 + m_{\frac{1}{2}\tau+1} = t,\ \ \ldots\ \ m_{\frac{1}{2}\tau-1} + m_{\tau-1} = t.$$

Also ist die Summe je zweier dieser Exponenten, deren Stellenzeiger um $\frac{1}{2}\tau$ unterschieden sind, immer gleich t.

Die vollständige Bestimmung dieser Exponenten ist etwas mühsam, führt aber, wie sich zeigen wird, zu einem ziemlich einfachen und sehr eleganten Resultate. Es müssen dazu Congruenzen angewendet werden, deren Modul eine Potenz der complexen Primzahl $f(\alpha)$ ist, und es kommt dabei hauptsächlich darauf an, die Wurzel α durch eine Potenz der primitiven Wurzel g zu ersetzen, welcher sie in Beziehung auf den Modul $f(\alpha)^n$ congruent ist. Dies geschieht auf folgende Weise. Wenn der Kürze wegen $\nu = \frac{q^t-1}{\lambda}$ gesetzt wird (welche Bedeutung der Buchstabe ν hier überall beibehalten soll), so ist, wie oben gezeigt worden:

$$g^\nu \equiv \alpha, \text{ Mod.} f(\alpha),$$

oder, wenn man diese Congruenz als Gleichung schreibt:

$$g^\nu = \alpha + wf(\alpha).$$

Erhebt man dies zur Potenz q, so ist

$$g^{\nu q} = \alpha^q + q\alpha^{q-1}wf(\alpha) + \frac{q(q-1)}{1.2}\alpha^{q-2}w^2f(\alpha)^2 + \cdots$$

und, da q den Primfactor $f(\alpha)$ einmal enthält:

$$g^{\nu q} \equiv \alpha^q, \text{ Mod. } f(\alpha)^2.$$

Auf dieselbe Weise weiter schliefsend, findet man, dafs allgemein für jeden Werth des k die Congruenz

$$g^{\nu q^k} \equiv \alpha^{q^k}, \text{ Mod. } f(\alpha)^{k+1},$$

Statt hat; und wenn für k ein Vielfaches von t genommen wird, da $q^{nt} \equiv 1$, Mod. λ ist, so ergiebt sich

$$g^{\nu q^{nt}} \equiv \alpha, \text{ Mod. } f(\alpha)^{nt+1};$$

wo n eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Nachdem Dieses vorbereitet worden, verwandle ich in dem ursprünglichen Ausdrucke, durch welchen $\Psi_r(\alpha)$ definirt wurde, α in $\alpha^{\gamma^{-i}}$. Dann ist

$$\Psi_r(\alpha^{\gamma^{-i}}) = \Sigma\alpha^{-(r+1)\gamma^{-i}h+\gamma^{-i}\,\text{Ind.}(g^h+1)}.$$

Man setze ferner $r+1 \equiv \gamma^\varrho$, Mod. λ, so wird $(r+1)\gamma^{-i} \equiv \gamma^{\varrho-i}$, und wenn wieder γ_k den kleinsten positiven Rest von γ^k für den Modul λ bezeichnet, so ist $(r+1)\gamma^{-i} \equiv \gamma_{\varrho-i}$, $\gamma^{-i} \equiv \gamma_{-i}$, Mod. λ. Endlich setze man noch Ind. $(g^{hq^{nt}}+1)$ statt Ind. (g^h+1); welches demselben vollkommen gleichbedeutend ist, indem $g^{q^{nt}} \equiv g$ ist, für den Modul $f(\alpha)$. Dann erhält man

$$\Psi_r(\alpha^{\gamma^{-i}}) = \Sigma\alpha^{-\gamma_{\varrho-i}h+\gamma_{-i}\,\text{Ind.}(g^{hq^{nt}}+1)}.$$

Wird nun die Congruenz $g^{\nu q^{nt}} \equiv \alpha$, Mod. $f(\alpha)^{nt+1}$ angewendet, so verwandelt sich diese Gleichung in folgende Congruenz:

$$\Psi_r(\alpha^{\gamma^{-i}}) \equiv \Sigma g^{-\gamma_{\varrho-i}\nu q^{nt}h} \cdot g^{\gamma_{-i}\nu q^{nt}\,\mathrm{Ind.}(g^{hq^{nt}}+1)}, \text{ Mod. } f(\alpha)^{nt+1}.$$

Es ist aber

$$g^{\mathrm{Ind.}(g^{hq^{nt}}+1)} \equiv g^{hq^{nt}} + 1, \text{ Mod. } f(\alpha),$$

woraus

$$g^{q^{nt}\,\mathrm{Ind.}(g^{hq^{nt}}+1)} \equiv (g^{hq^{nt}}+1)^{q^{nt}}, \text{ Mod. } f(\alpha)^{nt+1}.$$

folgt, also

$$\Psi_r(\alpha^{\gamma^{-i}}) \equiv \Sigma g^{-\gamma_{\varrho-i}\nu q^{nt}h}(g^{hq^{nt}}+1)^{\gamma_{-i}\nu q^{nt}}, \text{ Mod. } f(\alpha)^{nt+1}.$$

Das Summenzeichen erstreckt sich auf die Werthe $0, 1, 2, \ldots q^t-2$ von h und es ist hier nicht weiter nöthig, den Werth $h = \frac{1}{2}(q^t-1)$ auszuschliefsen, weil für denselben der Ausdruck unter dem Summenzeichen congruent Null ist, für den Mod. $f(\alpha)^{nt+1}$.

Nun ist die unter dem Summenzeichen stehende Potenz des Binoms $g^{hq^{nt}}+1$ nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln. Wird dabei durch $\Pi(m)$ das Product der Zahlen $1.2.3.4 \ldots m$ bezeichnet, so erhält man die daraus hervorgehende Doppelsumme in folgender Form:

$$\Psi_1(\alpha^{\gamma^{-i}}) \equiv \Sigma\Sigma \frac{\Pi(\gamma_{-i}\nu q^{nt})}{\Pi(k)\Pi(\gamma_{-i}\nu q^{nt}-k)} g^{(-\gamma_{\varrho-i}\nu+k)hq^{nt}}, \text{ Mod. } f(\alpha)^{nt+1},$$

für $h = 0, 1, 2, 3, \ldots q^t-2$ und $k = 0, 1, 2, 3, \ldots \gamma_{-i}\nu q^{nt}$. Setzt man für einen Augenblick $-\gamma_{\varrho-i}\nu q^{nt}+k = l$ und führt die Summation in Beziehung auf h aus, so ist allgemein

$$\Sigma g^{lhq^{nt}} = \frac{1-g^{l(q^t-1)q^{nt}}}{1-g^{lq^{nt}}},$$

also immer congruent Null für den Modul $f(\alpha)^{nt+1}$; mit Ausnahme der Fälle, wo l ein Vielfaches von q^t-1 ist. Es sei also

$$l = -\gamma_{\varrho-i}\nu q^{nt}+k = s(q^t-1) = s\lambda\nu,$$

so ist

$$\Psi_r(\alpha^{\gamma^{-i}}) \equiv \Sigma \frac{(q^t-1)\,\Pi(\gamma_{-i}\nu q^{nt})}{\Pi(\gamma_{\varrho-i}\nu+s\lambda\nu)\,\Pi(\gamma_{-i}\nu q^{nt}-\gamma_{\varrho-i}\nu-s\lambda\nu)}, \text{ Mod. } f(\alpha)^{\lambda n+1};$$

wo sich das Summenzeichen auf alle ganzzahligen Werthe von s bezieht, für welche weder $\gamma_{\varrho-i}\nu+s\lambda\nu$, noch $\gamma_{-i}\nu q^{nt}-\gamma_{\varrho-i}\nu-s\lambda\nu$ negativ wird. Wird endlich noch $s = \frac{\gamma_{\varrho-i}(q^{nt}-1)}{\lambda} - z$ gesetzt und aufserdem α in α^{γ^i} verwandelt, so ergiebt sich

$$\Psi_r(\alpha) \equiv \Sigma \frac{(q^t-1)\,\Pi(\gamma_{-i}\nu q^{nt})}{\Pi(\gamma_{\varrho-i}\nu q^{nt}-\lambda\nu z)\,\Pi((\gamma_{-i}-\gamma_{\varrho-i})\nu q^{nt}+\lambda\nu z)}$$

für den Modul $f(\alpha^{\gamma^i})^{n\lambda+1}$; wo das Summenzeichen auf alle ganzzahligen Werthe des z sich bezieht, für welche weder $\gamma_{\varrho-i}q^{nt}-\lambda z$, noch $(\gamma_{-i}-\gamma_{\varrho-i})q^{nt}+\lambda z$ negativ wird.

Durch diese Congruenz, in welcher n beliebig grofs angenommen werden kann, wird die Untersuchung, wievielmal $\Psi_r(\alpha)$ den complexen Primfactor $f(\alpha^{\gamma^i})$ enthält, darauf zurückgeführt, zu untersuchen, wievielmal diese Summe, welcher $\Psi_r(\alpha)$ congruent und welche eine nichtcomplexe Zahl ist, den Factor q enthält; denn es ist klar, dafs, wenn n hinreichend grofs angenommen wird, die Summe den Factor q genau ebensovielmal enthalten mufs, als $\Psi_r(\alpha)$ den Factor $f(\alpha^{\gamma^i})$ enthält, welcher ein Primfactor von q und dessen $(n\lambda+1)$te Potenz der Modul dieser Congruenz ist.

Zu diesem Zwecke werde ich zunächst beweisen, dafs, unter der Voraussetzung, $\gamma_{-i}-\gamma_{\varrho-i}$ sei positiv, dasjenige Glied dieser Summe, welches dem Werthe $z=0$ entspricht, von allen die niedrigste Potenz von q als Factor enthält; in der Art, dafs jedes beliebige andere Glied als dieses, eine höhere Potenz von q als Factor enthalten mufs. Demgemäfs wird die Untersuchung, wievielmal die ganze Summe den Factor q enthält, darauf reducirt sein, zu untersuchen, wievielmal das eine dem Werthe $z=0$ entsprechende Glied der Summe den Factor q enthält.

Ich bediene mich hier des folgenden, wenn nicht bekannten, so doch leicht zu beweisenden Satzes:

Lehrsatz: Wenn q eine Primzahl ist und die Zahl A auf die Form

$$A = a+a_1q+a_2q_2+\cdots+a_{k-1}q^{k-1}$$

gebracht wird, in der Art, dafs die Zahlen $a, a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$ nicht negativ und alle kleiner als q sind (welches nichts anderes ist, als die Zahl A nach $q$theiligem Zahlensysteme geschrieben), so ist die Anzahl der in dem Producte

$$1.2.3.4\ldots A = \Pi(A)$$

enthaltenen Factoren q gleich

$$\frac{A-(a+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})}{q-1}.$$

Mittels dieses Satzes läfst sich nun folgendermaafsen untersuchen, wievielmal der Factor q in dem Binomialcoëfficienten $\frac{\Pi(A+B)}{\Pi(A)\Pi(B)}$ enthalten ist. Man giebt beiden Zahlen A und B diese Form, nämlich

$$A = a + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_{k-1} q^{k-1} \quad \text{und}$$
$$B = b + b_1 q + b_2 q^2 + \cdots + b_{k-1} q^{k-1},$$

so dafs die Zahlen a, a_1, a_2, ... a_{k-1}, b, b_1, b_2, ... b_{k-1} alle kleiner als q und nicht negativ sind, und bildet folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned} a + b &= \varepsilon q + c, \\ \varepsilon + a_1 + b_1 &= \varepsilon_1 q + c_1, \\ \varepsilon_1 + a_2 + b_2 &= \varepsilon_2 q + c_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{k-2} + a_{k-1} + b_{k-1} &= \varepsilon_{k-1} q + c_{k-1}, \end{aligned}$$

in welchen die Zahlen c, c_1, c_2, ... c_{k-1} derselben Bedingung unterworfen sein sollen, dafs sie nicht negativ und kleiner als q sind, und in welchen demgemäfs die Zahlen ε, ε_1, ε_2, ... ε_{k-1} nur die Werthe ***Null*** oder ***Eins*** erhalten können. Addirt man alle diese Gleichungen, nachdem die erste mit 1, die zweite mit q, die dritte mit q^2, u. s. w. multiplicirt worden, so erhält man

$$A + B = c + c_1 q + c_2 q^2 + \cdots + c_{k-1} q^{k-1} + \varepsilon_{k-1} q^k.$$

Nennt man N die Anzahl, wievielmal der Factor q in dem Binomialcoëfficienten $\frac{\Pi(A+B)}{\Pi(A)\Pi(B)}$ enthalten ist, so ergiebt sich nach dem obigen Satze:

$$N = \frac{A+B-(c+c_1+\cdots+c_{k-1}+\varepsilon_{k-1})}{q-1} - \frac{(A-(a+a_1+\cdots+a_{k-1}))}{q-1} - \frac{(B-(b+b_1+\cdots+b_{k-1}))}{q-1},$$

oder, vereinfacht,

$$N = \frac{a+a_1+\cdots+a_{k-1}+b+b_1+\cdots+b_{k-1}-c-c_1-\cdots-c_{k-1}}{q-1},$$

und da durch Addition des aufgestellten Systems von Gleichungen

$$a+a_1+\cdots+a_{k-1}+b+b_1+\cdots+b_{k-1}-c-c_1-\cdots-c_{k-1} = (q-1)(\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{k-1})$$

ist, so erhält man

$$N = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{k-1}.$$

Um die Anwendung auf die vorliegende Summe zu machen, welche dem $\Psi_r(\alpha)$ congruent ist und deren einzelne Glieder Binomialcoëfficienten sind, setze man

$$A = \gamma_{\varrho-i} \nu q^{nt} - \lambda\nu z, \qquad B = (\gamma_{-i} - \gamma_{\varrho-i}) \nu q^{nt} + \lambda\nu z,$$
$$A + B = \gamma_{-i} \nu q^{nt},$$

so wird

$$\gamma_{-i} \nu q^{nt} = c + c_1 q + c_2 q^2 + \cdots + c_{k-1} q^{k-1} + \varepsilon_{k-1} q^k,$$

woraus zu sehen, dafs die Zahlen $c, c_1, c_2, \ldots,$ bis c_{nt-1} einschliefslich, gleich ***Null*** sein müssen. Ist nun aufserdem auch $a = a_1 = a_2 = \ldots = a_{nt-1} = 0$ und $b = b_1 = b_2 = \ldots = b_{nt-1} = 0$, so folgt aus dem die Zahlen a, b, c und ε verbindenden Systeme von Gleichungen, dafs auch die Zahlen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{nt-1}$ gleich ***Null*** sind. Auch werden durch diese Bestimmungen die Werthe der übrigen Zahlen $\varepsilon_{nt}, \varepsilon_{nt+1}, \ldots \varepsilon_{k-1}$ im Allgemeinen gar nicht verändert, und nur in dem ganz besondern Falle, wo in der Gleichung

$$\varepsilon_{nt-1} + a_{nt} + b_{nt} = \varepsilon_{nt} q + c_{nt}$$

$a_{nt} + b_{nt} = q - 1$ wäre, würde ε_{nt} von ε_{nt-1} abhängig sein, indem, wenn ε_{nt-1} nicht gleich ***Null***, sondern gleich ***Eins*** wäre, auch ε_{nt} den Werth ***Eins*** statt ***Null*** erhalten würde. Durch andere als die angenommenen Bestimmungen der Werthe $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{nt-1}$ können also die Werthe der folgenden Zahlen in einem besondern Falle zwar ***erhöht***, niemals aber ***erniedrigt*** werden. Für diejenigen Glieder der zu untersuchenden Summe von Binomialcoëfficienten, für welche die Bedingungen $a = a_1 = a_2 = \cdots = a_{nt-1} = 0$ und $b = b_1 = b_2 = \cdots = b_{nt-1} = 0$ erfüllt werden, mufs demnach nothwendig die Totalsumme aller ε, nämlich $\varepsilon + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1}$, kleiner sein als für alle andern; d. h. die Anzahl der in solchen Gliedern enthaltenen Factoren q mufs nothwendig kleiner sein, als die Anzahl der in einem der andern Glieder dieser Summe enthaltenen Factoren q.

Vermöge der Bedingungen $a = a_1 = \cdots = a_{nt-1} = 0$ und $b = b_1 = \cdots = b_{nt-1} = 0$ ist

$$\gamma_{\varrho-i} \nu q^{nt} - \lambda \nu \mathfrak{z} = q^{nt}(a_{nt} + a_{nt+1} q + \cdots + a_{k-1} q^{k-nt-1}) \quad \text{und}$$
$$(\gamma - \gamma_{\varrho-i}) \nu q^{nt} + \lambda \nu \mathfrak{z} = q^{nt}(b_{nt} + b_{nt+1} q + \cdots + b_{k-1} q^{k-nt-1});$$

woraus folgt, dafs $\mathfrak{z}$ durch q^{nt} theilbar sein mufs. Setzt man daher $\mathfrak{z} = q^{nt} \mathfrak{z}'$, und beachtet, dafs $\gamma_{\varrho-i} < \lambda$ und nach der obigen Voraussetzung auch $\gamma_{-i} - \gamma_{\varrho-1}$ positiv und $< \lambda$ ist, so zeigt sich aus den Bedingungen, dafs $\gamma_{\varrho-i} q^{nt} - \lambda \mathfrak{z}$ und $(\gamma_{-i} - \gamma_{\varrho-i}) q^{nt} + \lambda \mathfrak{z}$ nicht negativ werden dürfen, dafs $\mathfrak{z}' = 0$, also auch $\mathfrak{z} = 0$ der einzige Werth von $\mathfrak{z}$ ist, welcher diesen Bedingungen genügt. Da ferner jeder andere Theil der zu untersuchenden Summe den Factor q öfter enthält, als der dem Werthe $\mathfrak{z} = 0$ angehörende, so folgt, dafs die ganze Summe den Factor q genau eben so oft enthalten mufs, als dieser eine Theil derselben, und dafs also endlich die complexe Zahl $\Psi_r(\alpha)$ den complexen Factor $f(\alpha^{\nu^i})$ genau eben so vielemal enthält, als der Binomial-

coëfficient

$$\frac{\Pi(\gamma_{-i}\nu q^{nt})}{\Pi(\gamma_{\varrho-i}\nu q^{nt})\,\Pi(\gamma_{-i}-\gamma_{\varrho-i})\nu q^{nt}}$$

den Factor q.

Um diese Anzahl mittels des obigen Satzes zu finden, bringe ich die Zahl $\gamma_h\nu$, in welcher $\nu=\frac{q^t-1}{\lambda}$ ist, auf die Form

$$\gamma_h\nu = d+d_1q+d_2q^2+\cdots+d_{t-1}q^{t-1};$$

wo d, d_1, $\ldots$ d_{t-1} alle kleiner als q und nicht negativ sind. Alsdann ist die Anzahl der in dem Producte $\Pi(\gamma_h\nu q^{nt})$ enthaltenen Factoren q gleich

$$\frac{\gamma_h\nu q^{nt}-(d+d_1+d_2+\cdots+d_{t-1})}{q-1}.$$

Multiplicirt man den Ausdruck des $\gamma_h\nu$ mit λ, so erhält man

$$\gamma_h q^t = \gamma_h+\lambda d+\lambda d_1q+\lambda d_2q^2+\cdots+\lambda d_{t-1}q^{t-1}.$$

Hieraus folgt zunächst, dafs $\gamma_h+\lambda d$ durch q theilbar ist. Setzt man also $\gamma_h+\lambda d=\delta q$, so folgt weiter, dafs auch $\delta+\lambda d_1$ durch q theilbar sein mufs u. s. w. Man erhält also folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\gamma_h+\lambda d &= \delta q,\\
\delta+\lambda d_1 &= \delta_1 q,\\
\delta_1+\lambda d_2 &= \delta_2 q,\\
&\cdots\cdots\\
\delta_{t-2}+\lambda d_{t-1} &= \delta_{t-1}q;
\end{aligned}$$

in welchen die Zahlen δ, δ_1, δ_2, $\ldots$ δ_{t-1} alle kleiner als λ und positiv sein müssen. Macht man aus diesen Gleichungen Congruenzen für den Modul λ, und ersetzt q durch eine Potenz der primitiven Wurzel γ (welche, weil q zum Exponenten t gehört und $\tau=\frac{\lambda-1}{t}$ ist, nothwendig $q\equiv\gamma^{m\tau}$ sein mufs, wo m eine relative Primzahl zu t ist): so erhält man

$$\gamma^h\equiv\delta\gamma^{m\tau},\quad \delta\equiv\delta_1\gamma^{m\tau},\quad \ldots\quad \delta_{t-2}\equiv\delta_{t-1}\gamma^{m\tau},$$

also

$$\delta\equiv\gamma^{h+m\tau},\ \delta_1\equiv\gamma^{h-2m\tau},\ \ldots\ \delta_{t-1}\equiv\gamma^h,$$

und da alle diese Zahlen positiv und kleiner als λ sind:

$$\delta=\gamma_{h-m\tau},\ \delta_1=\gamma_{h-2m\tau},\ \ldots\ \delta_{t-1}=\gamma_h.$$

Addirt man alle die Gleichungen, durch welche die Zahlen d, d_1, $\ldots$ d_{t-1} mittels der Zahlen δ, δ_1, $\ldots$ δ_{t-1} bestimmt werden, und setzt für die letzteren ihre gefundenen Werthe, so erhält man

$$\lambda(d+d_1+\cdots+d_{t-1}) = (q-1)(\gamma_{h-m\tau}+\gamma_{h-2m\tau}+\cdots+\gamma_h).$$

Die Reihe der eine Periode bildenden Reste

$$\gamma_{h-m\tau} + \gamma_{h-2m\tau} + \gamma_{h-3m\tau} + \cdots + \gamma_{h-t\tau}$$

ist, weil m relative Primzahl zu t ist, wenn man von der bestimmten Ordnung der Glieder absieht, dieselbe wie

$$\gamma_h + \gamma_{h+\tau} + \gamma_{h+2\tau} + \cdots + \gamma_{h+(t-1)\tau}.$$

Diese ist, wie man weifs, immer durch λ theilbar, aufser für $t=1$, weshalb sie durch λS_h bezeichnet werden soll, so dafs

$$\lambda S_h = \gamma_h + \gamma_{h+\tau} + \gamma_{h+2\tau} + \cdots + \gamma_{h+(t-1)\tau}$$

ist. Demzufolge giebt die vorige Gleichung:

$$d + d_1 + d_2 + \cdots + d_{t-1} = (q-1) S_h$$

und man erhält die Anzahl der in dem Producte $\Pi(\gamma_h \nu q^{nt})$ enthaltenen Factoren q durch die Zahl

$$\frac{\gamma_h \nu q^{nt}}{q-1} - S_h$$

ausgedrückt. Setzt man nun $\gamma_{-i} - \gamma_{\varrho-i}$, welches nach der Voraussetzung positiv und nothwendig kleiner als λ ist, gleich γ_σ, und nimmt sodann nach einander $h=-i$, $h=\varrho-i$ und $h=\sigma$, so erhält man für die Anzahl der in dem Binomialcoëfficienten

$$\frac{\Pi(\gamma_{-i}\nu q^{nt})}{\Pi(\gamma_{\varrho-i}\nu q^{nt}\,\Pi(\gamma_{-i}-\gamma_{\varrho-i})\nu q^{nt}}$$

enthaltenen Factoren q:

$$S_{\varrho-i} + S_\sigma - S_{-i}.$$

Genau eben so vielemal enthält also, nach Dem was oben bewiesen wurde, die complexe Zahl $\Psi_r(\alpha)$ den complexen Primfactor $f(\alpha\gamma^i)$; das heifst: in dem Ausdrucke

$$\Psi_r(\alpha) = E(\alpha) f(\alpha)^m f(\alpha\gamma)^{m_1} \ldots f(\alpha\gamma^{\tau-1})^{m_{\tau-1}}$$

werden diejenigen Exponenten m_i, für welche $\gamma_{-i} - \gamma_{\varrho-i}$ eine positive Zahl ist, durch die Gleichung

$$m_i = S_{\varrho-i} + S_\sigma - S_{-i}$$

bestimmt.

Aus der Gleichung $\gamma_{-i} - \gamma_{\varrho-i} = \gamma_\sigma$ folgt die Congruenz $\gamma^{-i} - \gamma^{\varrho-i} \equiv \gamma^\sigma$ oder $1 - \gamma^\varrho \equiv \gamma^{\sigma+i}$, Mod. λ, und da $\gamma^\varrho \equiv r+1$ ist, so folgt weiter $-r \equiv \gamma^{\sigma+i}$ oder $r \equiv \gamma^{\sigma+i-\mu}$. Es ist also $\sigma + i - \mu \equiv \text{Ind. } r$ oder $\sigma \equiv \mu - i + \text{Ind. } r$, Mod. $\lambda - 1$, wenn das Zeichen Ind., wie oben, sich auf den Mod. λ und dessen primitive Wurzel γ bezieht; und da eben so $\varrho \equiv \text{Ind.}(r+1)$ ist, so ist

$$m_i = S_{-i+\text{Ind.}(r+1)} + S_{-i+\mu+\text{Ind. } r} - S_{-i}.$$

Die mit S_h bezeichneten Zahlen haben aber, wie bekannt, die Eigenschaft, dafs $S_{h+\mu} = t - S_h$ ist. Also kann dem Ausdruck des m_i auch eine der folgenden beiden Formen gegeben werden:

$$m_i = t - S_{-i} - S_{-i+\text{Ind.}r} + S_{-i+\text{Ind.}(r+1)},$$

oder

$$m_i = S_{\mu-i} + S_{\mu-i+\text{Ind.}r} - S_{\mu-i+\text{Ind.}(r+1)}.$$

Es ist jetzt auch nicht schwer zu zeigen, dafs die Bestimmung der Exponenten m_i, welche bis jetzt nur für diejenigen Werthe des i bewiesen wurde, für welche $\gamma_{-i} - \gamma_{\varrho-i}$ positiv ist, ebensowohl für alle andern Werthe von i gültig bleibt.

Aus der Gleichung $\gamma_{\mu+h} = \lambda - \gamma_h$ folgt, dafs

$$\gamma_{-i} - \gamma_{\varrho-i} = -(\gamma_{-i-\mu} - \gamma_{\varrho-i-\mu}).$$

Wenn also i einen Werth hat, welcher der Bedingung, dafs $\gamma_{-i} - \gamma_{\varrho-i}$ positiv sein soll, nicht genügt, so genügt dagegen allemal der Werth $i + \mu$ dieser Bedingung. Ferner kann das oben gefundene Resultat, nach welchem $m_i + m_{i+\tau} = t$, weil $m_i = m_{i+\tau} = m_{i+2\tau}$ u. s. w. und $t \cdot \frac{1}{2}\tau = \mu = \frac{1}{2}(\lambda - 1)$ ist, auch so dargestellt werden, dafs $m_i + m_{i+\mu} = t$ ist. Es sei nun i eine Zahl, welche der obigen Bedingung nicht genügt, so ist dagegen $\mu + i$ eine solche Zahl, für welche der gefundene Ausdruck für $m_{i+\mu}$ richtig ist. Setzt man diesen aber in die Gleichung $m_i = t - m_{i+\mu}$, so findet man, vermöge der Gleichung $S_{h+\mu} = t - S_h$, für m_i wieder denselben Ausdruck; welcher also für alle Werthe des i richtig ist

Die Zerlegung der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$ in ihre complexen Primfactoren, welche nur die complexen Primfactoren des q sind, wird demnach durch folgende Formel ausgedrückt:

$$\Psi_r(\alpha) = E(\alpha) f(\alpha)^m f(\alpha^\gamma)^{m_1} f(\alpha^{\gamma^2})^{m_2} \dots f(\alpha^{\gamma^{\tau-1}})^{m_{\tau-1}},$$

in welcher $E(\alpha)$ eine complexe Einheit, $f(\alpha)$ ein complexer idealer Primfactor der für den Modul λ zum Exponenten t gehörenden Primzahl q ist; ferner $\tau = \dfrac{\lambda - 1}{t}$ und

$$m_i = S_{\mu-i} + S_{\mu-i+\text{Ind.}r} - S_{\mu-i+\text{Ind.}(r+1)} \quad \text{und}$$
$$\lambda S_h = \gamma_h + \gamma_{h+\tau} + \gamma_{h+2\tau} + \dots + \gamma_{h+(t-1)\tau}.$$

Die complexe Einheit $E(\alpha)$, welche in diesem Ausdrucke als Factor vorkommt, ist nothwendig unbestimmt, so lange über den complexen Primfactor $f(\alpha)$, welcher im Allgemeinen ideal sein wird, keine nähere Bestimmung gemacht ist. Stellt man sich aber diesen Ausdruck zur Hten Potenz erhoben

vor, wo H der Exponent derjenigen Potenz sein soll, für welche $f(\alpha)^H$ zu einer wirklichen complexen Zahl wird, so kann man dieselbe immer so darstellen, dafs sie nicht die einzelnen Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{\lambda-1}$, sondern nur die Perioden derselben enthält; nämlich die τ Perioden von je t Gliedern. Es mufs alsdann, weil, wie oben bewiesen wurde, $\Psi_r(\alpha)$ auch nur diese Perioden enthält, die Einheit $E(\alpha)$ ebenfalls nur aus diesen Perioden zusammengesetzt sein. Aus der Gleichung $\Psi_r(\alpha)\Psi_r(\alpha^{-1}) = q^t$ folgt ferner, dafs $E\alpha)E(\alpha^{-1}) = 1$ sein mufs; woraus nach einer bekannten Eigenschaft aller Einheiten folgt, dafs $E(\alpha)$ nur gleich $\pm\alpha^k$ sein kann; und da $E(\alpha)$ eine solche einzelne Wurzel α^k nicht enthalten kann, so folgt endlich, dafs $E(\alpha) = \pm 1$ ist; nämlich, wenn $f(\alpha)^H$ als eine, nur die Perioden enthaltende wirkliche complexe Zahl dargestellt angenommen wird. Diese Zerlegung der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$ soll als die ***dritte Grund-Eigenschaft*** derselben bezeichnet werden.

Schliefslich bemerke ich noch, dafs dieser Ausdruck der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$ durch ihre Primfactoren für den Fall $t = 1$ den entsprechenden Ausdruck der Kreistheilungszahl $\psi_r(\alpha)$ giebt, welchen ich in dem vorhergehenden Paragraphen dieser Abhandlung angewendet und zuerst in dem Programm der Universität ***Breslau*** zur Jubelfeier der Universität ***Königsberg*** im Jahre 1844 und später in diesem Journale (Band. 35, S. 362) gegeben habe. An demselben Orte (S. 364) wird man auch schon eine Anwendung der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$ finden, von welcher ich damals nur die Zerlegung in die Primfactoren kannte, und wufste, dafs sie eine wirkliche complexe Zahl sei, für welche aber der in der gegenwärtigen Untersuchung zum Grunde gelegte, der complexen Kreistheilungszahl $\psi_r(\alpha)$ vollständig entsprechende Ausdruck

$$\Psi_r(\alpha) = \Sigma\alpha^{-(r+1)h+\mathrm{Ind.}(g^h+1)}$$

mir damals noch unbekannt war.

§. 3.

Entwickelung der Indices der complexen Einheiten und der Zahlen λ und $1-\alpha^k$, für welche der Modul eine zu einem beliebigen Exponenten gehörende complexe Primzahl ist.

Mittels der in dem vorigen Paragraphen entwickelten Eigenschaften der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$ können nun die Indices der complexen Einheiten, so wie der Zahlen λ und $1-\alpha^k$, auch für den Fall gefunden werden, wo der Modul $f(\alpha)$, auf welchen sich die Indices beziehen, ein ***complexer***

idealer Primfactor einer zum Exponenten t gehörenden ***nichtcomplexen*** Primzahl q ist. Die Ausdrücke derselben sind den in dem ersten Paragraphen für den speciellen Fall $t=1$ gefundenen, namentlich den beiden letzten derselben, vollständig entsprechend. Ich untersuche also sogleich den $(\lambda-2n)$ten Differentialquotienten des Logarithmen der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$, in welcher die Wurzel α durch die variable Exponentialgröfse e^v zu ersetzen ist, für den Werth $v=0$.

Es sei demnach

$$\Psi_r(e^v) = \Sigma e^{v(-(r+1)h+\text{Ind.}(g^h+1))}$$

für $h=0, 1, 2, \ldots q^t=2$, mit Ausschlufs von $h=\frac{1}{2}(q^t-1)$. Dann ist zunächst

$$\frac{d^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} = \frac{d^{\lambda-2n-1}\left(\frac{d\Psi_r(e^v)}{dv}\right)\cdot\frac{1}{\Psi_r(e^v)}\right)}{dv^{\lambda-2n-1}},$$

und wenn man zur Abkürzung für einen Augenblick $\lambda-2n-1=m$ und $\frac{1}{\Psi_r(e^v)}=U$ setzt, so folgt hieraus nach den Regeln der Differentiation eines Products zweier Factoren:

$$\frac{d^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} = \frac{d^{m+1}\Psi_r(e^v)}{dv^{m+1}}U + \frac{m}{1}\frac{d^m\Psi_r(e^v)}{dv^m}\frac{dU}{dv} + \cdots$$

Macht man jetzt Gebrauch von der *zweiten* Grund-Eigenschaft der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$, nach welcher $\Psi_r(\alpha)\Psi_r(\alpha^{-1})=q^t$ ist, so erhält man folgende, für jeden beliebigen Werth der Variabel v geltende Gleichung:

$$\Psi_r(e^v)\Psi_r(e^{-v}) = q^t + V.W;$$

wo $V=1+e^v+e^{2v}+\cdots e^{(\lambda-1)v}$ und W eine ganze rationale Function von e^v ist. Hieraus folgt

$$\Psi_r(e^{-v}) = \frac{q^t+VW}{\Psi_r(e^v)} = (q^t+VW)U,$$

und wenn man den $i$ten Differentialquotienten nimmt,

$$\frac{d^i\Psi_r(e^{-v})}{dv^i} = \frac{d^iU}{dv^i}(q^t+VW) + \frac{i}{1}\frac{d^{i-1}U}{dv^{i-1}}\frac{d(VW)}{dv} + \cdots$$

Setzt man nun $v=0$ und macht aus dieser Gleichung eine Congruenz für den Modul λ, so verschwinden V und alle Differentialquotienten des V, bis zum $(\lambda-2)$ten einschliefslich, weil sie durch λ theilbar sind; und wenn man noch beachtet, dafs $q^t\equiv 1$, Mod. λ ist, so erhält man

$$\frac{d_0^i\Psi_r(e^{-v})}{dv^i} \equiv \frac{d_0^iU}{dv^i}, \text{ Mod. } \lambda,$$

für alle Werthe 0, 1, 2, ... $\lambda-2$ von i, oder, was Dasselbe ist:

$$\frac{d_0^i U}{dv^i} \equiv (-1)^i \frac{d_0^i \Psi_r(e^v)}{dv^i} \equiv (-1)^i \mathrm{D}_i, \text{ Mod. } \lambda;$$

wenn der Kürze wegen der $i$te Differentialquotient von $\Psi_r(e^v)$ für $v=0$ durch Di bezeichnet wird. Der obige Ausdruck des $(\lambda-2n)$ten Differentialquotienten von $l\Psi_r(e^v)$ nimmt daher für $v=0$ folgende Gestalt an:

$$\frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv \mathrm{D}_{m+1}\mathrm{D}_0 - \frac{m}{1}\mathrm{D}_m\mathrm{D}_1 + \frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{D}_{m-1}\mathrm{D}_2 - \cdots, \text{ Mod. } \lambda.$$

Durch Differentiation des oben gegebenen Ausdrucks für $\Psi_r(e^v)$ erhält man nun für $v=0$:

$$\mathrm{D}^i = \Sigma(-(r+1)h + \mathrm{Ind.}\,(g^h+1))^i$$

für $h=0, 1, 2, \ldots q^t-2$, mit Ausschlufs von $h=\frac{1}{2}(q^t-1)$. Setzt man, um abzukürzen, für einen Augenblick

$$-(r+1)h + \mathrm{Ind.}\,(g^h+1) = C_h \text{ und } -(r+1)k + \mathrm{Ind.}\,(g^k+1) = C_k,$$

so ergiebt sich

$$\frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv \Sigma\Sigma\Big(C_h^{m+1}C_k^0 - \frac{m}{1}C_h^m C_k + \frac{m(m-1)}{1.2}C_h^{m-1}C_k^2 - \cdots\Big);$$

wo die Doppelsumme auf alle ganzzahligen Werthe des h und k, von 0 bis q^t-2, sich erstreckt; mit Ausschlufs des Werths $h=\frac{1}{2}(q^t-1)$ und $k=\frac{1}{2}(q^t-1)$. Summirt man nun die Binomialreihe unter den beiden Summenzeichen, so erhält man

$$\frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv \Sigma\Sigma C_h(C_h - C_k)^m,$$

und wenn für C_h und C_k und für m wieder ihre Werthe gesetzt werden:

$$\frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv \Sigma\Sigma(-(r+1)h + \mathrm{Ind.}\,(g^h+1)) \times(-(r+1)(h-k) + \mathrm{Ind.}\,(g^h+1) + \mathrm{Ind.}\,(g^k+1))^{\lambda-2n-1},$$

für $h=0, 1, 2, \ldots q^t-2$ und $k=0, 1, 2, \ldots q^t-2$, mit Ausschlufs von $h=\frac{1}{2}(q^t-1)$, $k=\frac{1}{2}(q^t-1)$.

Man transformire nun diese Doppelsumme, in welcher alle Glieder, die gleichen Werthen von h und k angehören, als congruent Null, von selbst wegfallen, durch dieselbe Substitution, welche oben im zweiten Paragraphen zur Transformation einer ähnlichen Doppelsumme angewendet worden ist, nämlich:

$$g^{k-h} \equiv g^{k'}, \quad \frac{g^k+1}{g^h+1} \equiv g^{h'}, \text{ Mod. } f(\alpha),$$

so erhält man diesen $(\lambda-2n)$ten Differentialquotienten durch die Doppelsumme

$$\Sigma\Sigma(-(r+1)\,\mathrm{Ind.}\,(g^{h'}-1) + \mathrm{Ind.}\,(g^{k'}-1) + r\,\mathrm{Ind.}\,(g^{k'}-g^{h'}))\,((r+1)k'-h)^{\lambda-2n-1}$$

ausgedrückt, wo h' und k' alle Werthe $1, 2, 3, \ldots q^t-2$ bekommen müssen, die Werthverbindung $h'=k'$ aber ausgeschlossen ist. Man zerlege diese Doppelsumme in folgende drei Theile:

$$-(r+1)\Sigma\Sigma \text{Ind.}(g^{h'}-1)\ ((r+1)k'-h')^{\lambda-2n-1},$$
$$\Sigma\Sigma \text{Ind.}(g^{k'}-1)\ ((r+1)k'-h')^{\lambda-2n-1},$$
$$r\Sigma\Sigma \text{Ind.}(g^{k'}-g^{h'})((r+1)k'-h')^{\lambda-2n-1},$$

und suche die Werthe dieser drei Theile einzeln; mit dem ersten Theile anfangend. Um in demselben die Werthverbindung $k'=h'$ nicht ferner ausschliefsen zu müssen, füge man den dieser Werthverbindung entsprechenden Theil mit entgegengesetztem Vorzeichen hinzu. Der erste Theil ist

$+r^{\lambda-2n-1}(r+1)\Sigma h'^{\lambda-2n-1}\text{Ind.}(g^{h'}-1)-(r+1)\Sigma\Sigma\text{Ind.}(g^{h'}-1)((r+1)k'-h')^{\lambda-2n-1}$;

wo jetzt den k' und h' alle Werthe von 1 bis q^t-2 einschliefslich, ohne Ausnahme, zu geben sind. Ich führe nun die Summation in Beziehung auf k' aus, indem zu bemerken ist, dafs $q^t-1\equiv 0$, Mod. λ und dafs die Summe $\Sigma k'^i$ ebenfalls congruent Null ist, für jeden der Werthe 1, 2, 3, $\ldots\ \lambda-2$ von i. Dies giebt zunächst

$$\Sigma((r+1)k'-h')^{\lambda-2n-1}\equiv(q^t-2)h'^{\lambda-2n-1}\equiv -h'^{\lambda-2n-1}.$$

Der erste Theil ist vermöge Dessen dem folgenden Ausdrucke congruent:

$$(r+1)(1+r^{\lambda-2n-1})\Sigma h'^{\lambda-2n-1}\text{Ind.}(g^{h'}-1).$$

Genau auf dieselbe Weise findet man den zweiten Theil congruent

$$-(r^{\lambda-2n-1}+(r+1)^{\lambda-2n-1})\Sigma h'^{\lambda-2n-1}\text{Ind.}(g^{h'}-1).$$

Um auch den dritten Theil auf eine ähnliche einfache Summe zu reduciren, dehne man die Werthe von h' und k' auch auf den Werth $h'=0$ und $k'=0$ aus; welches ohne Weiteres geschehen kann, wenn man die diesen Werthen entsprechenden Glieder

$$r\Sigma k'^{\lambda-2n-1}\text{Ind.}(g^{k'}-1) \quad\text{und}\quad r(r+1)^{\lambda-2n-1}\Sigma h'^{\lambda-2n-1}\text{Ind.}(g^{h'}-1)$$

subtrahirt.

Ich verwandle nun diese Doppelsumme, in welcher jetzt h' und k' alle Werthe von 0 bis q^t-2 einschliefslich haben (jedoch mit Ausschlufs der Werthverbindung $h'=k'$), indem ich $h'+k'$ statt h' setze; wodurch sie folgende Form annimmt:

$$r\Sigma\Sigma(\text{Ind.}(g^{h'}-1)+k')(rk'-h')^{\lambda-2n-1},$$

für $k'=0, 1, 2, 3, \ldots q^t-2$ und $h'=1, 2, 3, \ldots q^t-2$. Die Summation in Beziehung auf k' läfst sich wieder ohne Schwierigkeit ausführen und giebt das Resultat, dafs die Doppelsumme einfach congruent Null ist, für den Modul λ. Der dritte Theil ist den beiden einfachen Summen, welche zu subtrahiren

waren, deshalb congruent, damit die Werthe von h' und k' auch auf $h'=0$ und $k'=0$ ausgedehnt werden konnten. Diese zusammengefafst, geben den dritten Theil congruent

$$-r(1+(r+1)^{\lambda-2n-1})\,\Sigma h'^{\lambda-2n-1}\,\mathrm{Ind.}\,(g^{h'}-1).$$

Fafst man alle drei Theile wieder in einen zusammen, so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{d_0^{\lambda-2n}\,l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} = (1+r^{\lambda-2n}-(r+1)^{\lambda-2n})\,\Sigma h'^{\lambda-2n-1}\,\mathrm{Ind.}\,(g^{h'}-1),$$

für $h'=1, 2, 3, \ldots q^l-2$.

Die hierin enthaltene einfache Summe kann nun auf folgende Weise leicht als Index der complexen Einheit $E_n(\alpha)$ dargestellt werden. Zuerst werden alle Glieder, für welche h' durch λ theilbar ist, als congruent Null, weggelassen, und dann wird $h'=i+\lambda k$ gesetzt und es werden dem i die Werthe $1, 2, 3, \ldots \lambda-1$, dem k die Werthe $0, 1, 2, \ldots \nu-1$ gegeben (wo $\nu=\frac{q^l-1}{\lambda}$ ist). Dann ist

$$\Sigma h'^{\lambda-2n-1}\,\mathrm{Ind.}\,(g^{h'}-1) \equiv \Sigma\Sigma i^{\lambda-2n-1}\,\mathrm{Ind.}\,(g^{i+k\lambda}-1),$$

für $i=1, 2, 3, \ldots \lambda-1$, $k=0, 1, 2, \ldots \nu-1$. Nun ist aber, wie leicht zu beweisen,

$$(g^i-1)(g^{i+\lambda}-1)(g^{i+2\lambda}-1)\ldots(g^{i+(\nu-1)\lambda}-1) \equiv 1-g^{\nu i},\ \mathrm{Mod.}\,f(\alpha),$$

also auch

$$\Sigma\,\mathrm{Ind.}\,(g^{i+k\lambda}-1) \equiv \mathrm{Ind.}\,(1-g^{\nu i}) \equiv \mathrm{Ind.}\,(1-\alpha^i),\ \mathrm{Mod.}\,\lambda,$$

indem $g^\nu \equiv \alpha$, Mod. $f(\alpha)$, ist. Die Ausführung der Summation in Beziehung auf k giebt daher

$$\Sigma h'^{\lambda-2n-1}\,\mathrm{Ind.}\,(g^{h'}-1) = \Sigma i^{\lambda-2n-1}\,\mathrm{Ind.}\,(1-\alpha^i),$$

für $i=1, 2, 3, \ldots \lambda-1$. Setzt man $i\gamma$ statt i, multiplicirt mit γ^{2n} und subtrahirt von der so erhaltenen Congruenz die unveränderte, so erhält man

$$(\gamma^{2n}-1)\,\Sigma h'^{\lambda-2n-1}\,\mathrm{Ind.}\,(g^{h'}-1) \equiv \Sigma i^{\lambda-2n-1}\,\mathrm{Ind.}\left(\frac{1-\alpha^{\nu i}}{1-\alpha^i}\right),\ \mathrm{Mod.}\,\lambda.$$

Verwandelt man endlich i in γ^h, so zeigt sich sogleich, dafs die Summe rechts in dieser Congruenz dem doppelten Index der Einheit

$$E_n(\alpha) = e(\alpha)\,.\,e(\alpha^\gamma)^{\gamma^{-2n}}\,.\,e(\alpha^{\gamma^2})^{\gamma^{-4n}}\ \ldots\ e(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})^{\gamma^{-2(\mu-1)n}}$$

congruent, also

$$(\gamma^{-2n}-1)\,\Sigma h'^{\lambda-2n-1}\,\mathrm{Ind.}\,(g^{h'}-1) \equiv 2\,\mathrm{Ind.}\,E_n(\alpha)$$

ist. Dadurch hat man nun folgenden Ausdruck für den Index dieser Einheit:

$$\mathrm{Ind.}\,E_n(\alpha) \equiv \frac{(\gamma^{2n}-1)}{2(1+r^{\lambda-2n}-(r+1)^{\lambda-2n})}\cdot\frac{d_0^{\lambda-2n}\,l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}},\ \mathrm{Mod.}\,\lambda.$$

Diese Formel, welche der entsprechenden, im ersten Paragraphen für den besondern Fall $t = 1$ bewiesenen ganz gleich ist, giebt die Indices der Einheiten $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$, u. s. w.; also auch die Indices aller Einheiten, welche durch diese sich darstellen lassen. Es ist aber hier nicht nöthig, die Indices aller dieser Einheiten $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$, ... $E_{\mu-1}(\alpha)$ nach der Formel besonders zu berechnen, denn es läfst sich leicht ein- für allemal zeigen, dafs für alle Werthe von n, für welche $\lambda - 2n$ nicht durch t theilbar ist, der Index Ind. $E_n(\alpha)$ nur congruent Null ist. Es kann Dies auf folgende Weise aus dem gefundenen Ausdrucke des Ind. $E_n(\alpha)$ selbst abgeleitet werden. Da, vermöge der ersten Grund-Eigenschaft der complexen Zahl $\Psi_r(\alpha)$, dieselbe nur die τ Perioden von je t Gliedern, nicht aber die Wurzeln α, α^2, ... $\alpha^{\lambda-1}$ einzeln enthält, so ist

$$\Psi_r(\alpha) \equiv \Psi_r(\alpha^{\gamma^\tau}),$$

woraus nach den schon mehrmals angewendeten Principien

$$\Psi_r(e^\nu) \equiv \Psi_r(e^{\nu\gamma^\tau}) + V.W$$

und weiter

$$\frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^\nu)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv \frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^{\nu\gamma^\tau})}{dv^{\lambda-2n}},$$

oder

$$\frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^\nu)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv \gamma^{(\lambda-2n)\tau} \frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^\nu)}{dv^{\lambda-2n}}$$

folgt. Es mufs also nothwendig, entweder

$$\gamma^{(\lambda-2n)\tau} - 1 \equiv 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^\nu)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv 0$$

sein, für den Mod. λ. In dem letztern Falle ist aber Ind. $E_n(\alpha) \equiv 0$, Mod. λ, und nur wenn $\gamma^{(\lambda-2n)\tau} \equiv 1$, Mod. λ, ist, kann Ind. $E_n(\alpha)$ einen von Null verschiedenen Werth haben; also nur dann, wenn $(\lambda - 2n)\tau$ ein Vielfaches von $\lambda - 1 = t\tau$ oder, was Dasselbe ist, wenn $\lambda - 2n$ ein Vielfaches von t ist; wie behauptet wurde. Dasselbe läfst sich übrigens auch ohne Hülfe der allgemeinen Formel für Ind. $E_n(\alpha)$ auf elementare Art leicht beweisen.

Aus dem gefundenen Ausdruck des Ind. $E_n(\alpha)$ wird nun ein anderer, welcher nicht die complexe Zahl $\Psi_r(\alpha)$, sondern den Primfactor $f(\alpha)$ selbst enthält, mittels der dritten Grund-Eigenschaft der $\Psi_r(\alpha)$, welche ihre Zerlegung in die Primfactoren giebt, auf folgende Weise hergeleitet. Wenn der im Allgemeinen ideale Primfactor $f(\alpha)$ als Hte Wurzel aus der Potenz $f(\alpha)^H$ dargestellt und H so angenommen wird, dafs $f(\alpha)^H$ eine wirkliche complexe Zahl ist, so kann, wie schon oben bemerkt, diese wirkliche complexe Zahl $f(\alpha)^H$

immer so angenommen werden, dafs sie nur die τ Perioden von je t Gliedern enthält. Bei dieser Annahme hat man

$$\Psi_r(\alpha) = \pm f(\alpha)^m f(\alpha^\gamma)^{m_1} f(\alpha^{\gamma^2})^{m_2} \dots f(\alpha^{\gamma^{\tau-1}})^{m_{\tau-1}} \text{ und}$$
$$m_i = S_{\mu-i} + S_{\mu-i+\text{Ind. } r} - S_{\mu-i+\text{Ind. } (r+1)}.$$

Daraus folgt sogleich

$$\frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv m \frac{d_0^{\lambda-2n} lf(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} + m_1 \frac{d_0^{\lambda-2n} lf(e^{\gamma v})}{dv^{\lambda-2n}} + \dots + m_{\tau-1} \frac{d_0^{\lambda-2n} lf(e^{\gamma^{\tau-1} v})}{dv^{\lambda-2n}},$$

oder, vereinfacht:

$$\frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv (m + \gamma^{\lambda-2n} m_1 + \gamma^{2(\lambda-2n)} m_2 + \dots + \gamma^{(\tau-1)(\lambda-2n)} m_{\tau-1}) \frac{d_0^{\lambda-2n} lf(e^v)}{dv^{\lambda-2n}}.$$

Es ist nun die rechts in dieser Congruenz vorkommende Summe zu suchen, welche durch den Buchstaben R bezeichnet werden soll, so dafs

$$R = m + \gamma^{\lambda-2n} m_1 + \gamma^{2(\lambda-2n)} m_2 + \dots + \gamma^{(\tau-1)(\lambda-2n)} m_{\tau-1}$$

ist. Es wird auch hinreichen, diesen Werth von R nur für diejenigen Werthe von n zu suchen, für welche $\lambda - 2n$ ein Vielfaches von t ist; denn wenn dies nicht der Fall ist, so giebt die Congruenz, nach Dem was oben gezeigt, nur identisch $0 \equiv 0$, Mod. λ. Wird mehrerer Einfachheit wegen das Summenzeichen angewendet und für m_i sein Werth gesetzt, so ist

$$R = \Sigma \gamma^{i(\lambda-2n)} (S_{\mu-i} + S_{\mu-i+\text{ind. } r} - S_{\mu-i+\text{ind. } (r+1)})$$

für $i = 0, 1, 2, \dots \tau-1$. Nun sollen hierin für die drei Gröfsen $S_{\mu-i}$, $S_{\mu-i+\text{ind. } r}$ und $S_{\mu-i+\text{Ind. } (r+1)}$ ihre Werthe nach der Formel

$$S_h = \frac{1}{\lambda}(\gamma_h + \gamma_{h+\tau} + \gamma_{h+2\tau} + \dots + \gamma_{h+(t-1)\tau}) = \frac{1}{\lambda} \Sigma \gamma_{h+k\tau}$$

gesetzt werden. Alsdann sind, wegen des als Nenner vorkommenden λ, wieder Congruenzen für den Modul λ^2 zur Bestimmung von R nöthig, und deshalb soll $\gamma^{i\lambda(\lambda-2n)}$ statt $\gamma^{i(\lambda-2n)}$ genommen werden, welches demselben für den Mod. λ congruent ist. Wird sodann mit λ multiplicirt, so erhält man folgende Congruenz:

$$\lambda R \equiv \Sigma\Sigma \gamma^{i\lambda(\lambda-2n)} (\gamma_{\mu-i+k\tau} + \gamma_{\mu-i+k\tau+\text{ind. } r} - \gamma_{\mu-i+k\tau+\text{ind. } (r+1)}),$$

für den Mod. λ^2, wo die beiden Summenzeichen auf die Werthe $i = 0, 1, 2, \dots \tau-1$ und $k = 0, 1, 2, \dots t-1$ zu beziehen sind. Setzt man $i + k\tau$ statt i und beachtet, dafs bei dieser Veränderung $\gamma^{i\lambda(\lambda-2n)}$ in Beziehung auf den Mod. λ^2 unverändert bleibt, weil $\lambda - 2n$ nach der Voraussetzung durch t theilbar und $t\tau = \lambda - 1$ ist, so verwandelt sich die Doppelsumme in die einfache:

$$\lambda R \equiv \Sigma \gamma^{i\lambda(\lambda-2n)} (\gamma_{\mu-i} + \gamma_{\mu-i+\text{ind. } r} - \gamma_{\mu-i+\text{ind. } (r+1)}), \text{ Mod. } \lambda^2,$$

für $i = 0, 1, 2, \dots \lambda-2$.

Vergleicht man nun dieses Resultat mit dem in der ähnlichen Untersuchung im ersten Paragraphen dieser Abhandlung gefundenen Ausdrucke der dort mit T bezeichneten Summe, so findet sich $\lambda R \equiv \lambda T$, Mod. λ^2, also $R \equiv T$, Mod. λ. Macht man demnach von dem oben gefundenen Werthe von T Gebrauch, so erhält man

$$R \equiv (-1)^n (1 + r^{\lambda-2n} - (r+1)^{\lambda-2n}) \frac{B_n}{2n}, \text{ Mod. } \lambda,$$

also

$$\frac{d_0^{\lambda-2n} l\Psi_r(e^v)}{dv^{\lambda-2n}} \equiv (-1)^n (1 + r^{\lambda-2n} - (r+1)^{\lambda-2n}) \frac{B_n}{2n} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2n} lf(e^v)}{dv^{\lambda-2n}}.$$

Der gefundene Ausdruck des Ind. $E_n(\alpha)$ giebt demnach folgenden neuen Ausdruck des Index dieser Einheit:

$$\text{Ind. } E_n(\alpha) \equiv \frac{(-1)^n (\gamma^{2n} - 1) B^n}{4n} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2n} lf(e^v)}{dv^{\lambda-2n}}, \text{ Mod. } \lambda.$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem entsprechenden, für den besondern Fall $t = 1$ im ersten Paragraphen gefundenen, zeigt, dafs er genau derselbe ist, wie jener, dafs also in allen Fällen, ohne Unterschied, d. h. für alle complexen idealen Primfactoren $f(\alpha)$ als Moduln, derselbe Ausdruck gilt.

Es bleibt noch übrig, auch für die zu einem beliebigen Exponenten t gehörigen Primfactoren $f(\alpha)$, als Moduln, den Index von λ und die Indices der Primfactoren des λ von der Form $1 - \alpha^k$ zu suchen. Zunächst läfst sich leicht zeigen, dafs Ind. (λ) allemal congruent Null ist, wenn t nicht gleich Eins ist; also für alle Moduln, mit Ausnahme der in dem ersten Paragraphen behandelten. Für diese Moduln ist nämlich nicht blofs Ind. (λ), sondern überhaupt der Index jeder nichtcomplexen ganzen Zahl congruent Null. Denn aus der Congruenz

$$c^{\frac{q^f-1}{\lambda}} \equiv \alpha^{\text{Ind. } c}, \text{ Mod. } f(\alpha),$$

in welcher c eine beliebige (jedoch nicht durch $f(\alpha)$ theilbare) nichtcomplexe Zahl bedeutet, folgt, wenn α in α^{γ^τ} verwandelt wird, weil $f(\alpha) = f(\alpha^{\gamma^\tau})$ ist:

$$c^{\frac{q^f-1}{\lambda}} \equiv \alpha^{\gamma^\tau \text{ Ind. } c}, \text{ Mod. } f(\alpha),$$

also $\alpha^{\text{Ind. } c} \equiv \alpha^{\gamma^\tau \text{ Ind. } c}$, Mod. $f(\alpha)$, mithin auch Ind. $c \equiv \gamma^\tau$ Ind. c, Mod. λ, und Ind. $(c) \equiv 0$, Mod. λ; mit Ausnahme des einzigen Falles, wo $\gamma^\tau \equiv 1$, also $\tau = \lambda - 1$ und $t = 1$ ist.

Um auch Ind. $(1 - \alpha^k)$ für die in diesem Paragraphen behandelte Moduln

zu finden, nehme man

$$\lambda = (1-\alpha)(1-\alpha^{\gamma})(1-\alpha^{\gamma^2}) \ldots (1-\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})$$

an, und gebe dieser Gleichung die Form

$$\lambda = (1-\alpha)^{\lambda-1}\left(\frac{1-\alpha^{\gamma}}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1-\alpha^{\gamma^2}}{1-\alpha}\right) \ldots \left(\frac{1-\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}}{1-\alpha}\right).$$

Man drücke die Einheiten, welche hierin vorkommen, alle durch die Kreistheilungs-Einheiten $e(\alpha)$, $e(\alpha^{\gamma})$, u. s. w, aus, so erhält man

$$\lambda = (1-\alpha)^{\lambda-1}\alpha^{-\mu}.e(\alpha)^{\lambda-1}.e(\alpha^{\gamma})^{\lambda-2}.e(\alpha^{\gamma^2})^{\lambda-3} \ldots e(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})^{1},$$

und wenn α in α^k verwandelt wird:

$$\lambda = (1-\alpha^k)^{\lambda-1}\alpha^{-\mu k}.e(\alpha^k)^{\lambda-1}.e(\alpha^{k\gamma})^{\lambda-2}.e(\alpha^{k\gamma^2})^{\lambda-3} \ldots e(\alpha^{k\gamma^{\lambda-2}})^{1}.$$

Man nehme nun auf beiden Seiten die Indices für den Modul $f(\alpha)$, so ergiebt sich, weil $\text{Ind.}(\lambda) \equiv 0$ ist:

$$0 \equiv -\text{Ind.}(1-\alpha^k) - \mu k\nu - \text{Ind.}\,e(\alpha^k) - 2\,\text{Ind.}\,e(\alpha^{k\gamma}) - \cdots - (\lambda-1)\,\text{Ind.}\,e(\alpha^{k\gamma^{\lambda-2}}),$$

wo $\lambda\nu = q^t - 1$, oder, mit Anwendung des Summenzeichens,

$$\text{Ind.}(1-\alpha^k) \equiv -\mu k\nu - \Sigma h\,\text{Ind.}\,e(\alpha^{k\gamma^{h-1}})$$

für $h = 1, 2, 3, \ldots \lambda-1$ ist. Man drücke ferner $\text{Ind.}\,e(\alpha^{k\gamma^{h-1}})$ durch die Indices der Einheiten $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$, $\ldots$ $E_{\mu-1}(\alpha)$ mittels der Formel

$$\text{Ind.}\,e(\alpha^{\gamma^{h-1}}) \equiv -2\Sigma\gamma^{2n(h-1)}\,\text{Ind.}\,E_n(\alpha)$$

aus, für $n = 1, 2, 3, \ldots \mu-1$, so wird

$$\text{Ind.}(1-\alpha^k) \equiv -\mu k\nu + 2\Sigma\Sigma h\gamma^{2n(h-1)}\,\text{Ind.}\,E_n(\alpha^k),$$

für $h = 1, 2, 3, \ldots \lambda-1$ und $n = 1, 2, 3, \ldots \mu-1$. Die Summation in Beziehung auf h wird nach der leicht zu beweisenden Formel

$$\Sigma h\gamma^{2n(h-1)} \equiv \frac{1}{1-\gamma^{2n}}$$

ausgeführt und giebt

$$\text{Ind.}(1-\alpha^k) \equiv -\mu k\nu + 2\Sigma\frac{\text{Ind.}\,E_n(\alpha^k)}{1-\gamma^{2n}},$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots \mu-1$. Endlich kann man noch von der Eigenschaft der Einheit $E_n(\alpha)$ Gebrauch machen, nach welcher

$$\text{Ind.}\,E_n(\alpha^k) \equiv k^{2n}\,\text{Ind.}\,E_n(\alpha), \quad \text{Mod. } \lambda$$

ist. Vermöge derselben erhält man

$$\text{Ind.}(1-\alpha^k) \equiv -\mu k\nu + 2\Sigma\frac{k^{2n}\,\text{Ind.}\,E_n(\alpha)}{1-\gamma^{2n}}, \quad \text{Mod. } \lambda,$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots \mu-1$. Dieser Ausdruck, welcher darauf sich stützt, dafs $\text{Ind.}(\lambda) \equiv 0$ ist, gilt aber nicht für den Fall $t = 1$, für welchen die in dem

ersten Paragraphen gegebenen Ausdrücke von Ind. (λ) und Ind. $(1-\alpha^k)$ zu nehmen sind. Es könnten auch für Ind. $E_n(\alpha)$ die gefundenen Ausdrücke hier eingesetzt werden; da aber dadurch keine besonders eleganten Formeln entstehen, so mag es hinreichen, den Ind. $(1-\alpha^k)$ durch die oben gefundenen Indices der Einheiten $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$, ... $E_{\mu-1}(\alpha)$ ausgedrückt zu haben.

§. 4.

Über die Anwendung logarithmischer Ausdrücke der complexen Zahlen auf Congruenzen, deren Modul λ oder eine Potenz von λ ist.

Die Anwendung der in dem vorhergehenden Paragraphen gefundenen Resultate auf die allgemeinen Reciprocitätsgesetze, welche ich in dem Folgenden zu geben gedenke, erfordert, dafs ich zunächst eine allgemeine Methode mittheile, nach welcher Congruenzen für den Modul λ, oder eine Potenz von λ, namentlich wenn sie Producte mehrerer complexen Zahlen und Potenzen derselben enthalten, auf die einfachste Weise eben so behandelt werden können, wie in der Analysis dergleichen Ausdrücke mit Hülfe der Logarithmen. Eine Andeutung einer solchen Methode, welche ich in der Form, wie ich sie hier entwickeln werde, schon seit mehreren Jahren vielfach angewendet, aber bisher noch nicht veröffentlicht habe, findet sich in einer Abhandlung des Herrn *Eisenstein* (im 39ten Bande dieses Journals S. 351), auf welche Abhandlung ich in dem Folgenden noch einmal zurückkommen werde.

Ich stelle für den *Logarithmen* einer complexen Zahl, in Beziehung auf den Modul λ^{n+1} genommen, folgende Definition auf:

Wenn $\varphi(\alpha)$ eine complexe Zahl ist, welche den Factor $1-\alpha$ nicht enthält, so dafs auch $\varphi(1)$ nicht $\equiv 0$, Mod. λ ist, so soll unter dem Ausdrucke

$$l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right) \text{ für den Modul } \lambda^{n+1}$$

die endliche Anzahl von Gliedern der Reihe

$$\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(1)}{\varphi(1)} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(1)}{\varphi(1)}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(1)}{\varphi(1)}\right)^3 - \ldots$$

verstanden werden, welche nicht congruent Null sind für den Modul λ^{n+1}.

Dafs die Glieder dieser Reihe, von einem bestimmten an, wirklich alle congruent Null werden, für den Modul λ^{n+1}, erhellet daraus, dafs $\varphi(\alpha)-\varphi(1)$ den Factor $1-\alpha$ enthält, und dafs $(1-\alpha)^{\lambda-1}$ durch λ theilbar ist. Wenn nämlich in dem allgemeinen Gliede der Reihe

$$\pm\frac{1}{k}\left(\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(1)}{\varphi(1)}\right)^k$$

k nicht durch λ theilbar ist, so ist Dasselbe allemal congruent Null für den Modul λ^{n+1}, sobald $k > (\lambda-1)(n+1)$ ist. Wenn aber k den Factor λ enthält, und man setzt $k = c\lambda^a$, wo c nicht weiter durch λ theilbar sein soll, so müssen noch die a Factoren λ des Nenners durch $(\lambda-1)a$ Factoren $1-\alpha$ des Zählers compensirt werden. Wenn daher $k > (\lambda-1)(n+a+1)$ angenommen wird, so sind alle Glieder congruent Null für den Modul λ^{n+1}. In Beziehung auf diesen Modul bricht also diese Reihe nothwendig ab. Die Logarithmen der complexen Zahlen für den Modul λ^{n+1} sind demnach nur endliche Ausdrücke, d. h. sie sind selbst nur gewöhnliche complexe Zahlen. Auch geht aus der Definition hervor, dafs $l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right)$ für den Modul λ^{n+1} nur einen einzigen bestimmten Werth hat, wenn nämlich aufser $\varphi(\alpha)$ auch $\varphi(1)$ nur einen bestimmten Werth hat. Aus den bekannten Eigenschaften der Reihe, durch welche $l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right)$ dargestellt wird, erhält man ferner sogleich für die Grund-Eigenschaften dieser Ausdrücke:

$$l\left(\frac{f(\alpha)}{f(1)}\right) + l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right) \equiv l\left(\frac{f(\alpha)\varphi(\alpha)}{f(1)\varphi(1)}\right)$$
$$ml\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right) \equiv l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right)^m \quad \ldots \text{ Mod. } \lambda^{n+1}.$$

Es kommt nun darauf an, für $l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right)$, Mod. λ^{n+1}, den einfachsten Ausdruck zu finden. Zu diesem Ende werde die complexe Zahl $\varphi(\alpha)-\varphi(1)$, welche durch $1-\alpha$ theilbar ist, auf folgende Form gebracht:

$$\varphi(\alpha)-\varphi(1) = A_1(1-\alpha) + A_2(1-\alpha)^2 + \cdots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}.$$

Stellt man sich diesen Werth in die obige Reihe gesetzt vor, welche nur so weit fortgeführt anzunehmen ist, als die Glieder nicht von selbst wegfallen, weil sie congruent Null werden, und dann die einzelnen Glieder alle entwickelt nach Potenzen von $1-\alpha$, so erhält man eine Reihe von folgender Form:

$$l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right) \equiv \frac{C_1(1-\alpha)}{1\,.\,\varphi(1)} + \frac{C_2(1-\alpha)^2}{2\,.\,\varphi(1)^2} + \frac{C_3(1-\alpha)^3}{3\,.\,\varphi(1)^3} + \cdots, \text{ Mod. } \lambda^{n+1},$$

welche man ebenfalls nur so weit fortzusetzen braucht, als noch Glieder sich finden, welche nicht congruent Null sind. Wendet man das Summenzeichen an und verwandelt α in α^{γ^h}, so erhält man

$$l\left(\frac{\varphi(\alpha\gamma^h)}{\varphi(1)}\right) \equiv \Sigma \frac{C_i(1-\alpha^{\gamma^h})^i}{i\varphi(1)^i}, \text{ Mod. } \lambda^{n+1},$$

und wenn man mit $\gamma^{-hk\lambda^n}$ multiplicirt und die Summe für $h = 0, 1, 2, \ldots \lambda-2$

nimmt, so ergiebt sich

$$\sum_{0}^{\lambda-2}{}_h \gamma^{-hk\lambda^n} l\left(\frac{\varphi(\alpha\gamma^h)}{\varphi(1)}\right) \equiv \sum_{0}^{\lambda-2}{}_h \Sigma_i \frac{C_i \gamma^{-hk\lambda^n}(1-\alpha\gamma^h)^i}{i\varphi(1)^i}.$$

Wird nun die $i$te Potenz von $1-\alpha\gamma^h$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, so erhält man

$$(1-\alpha\gamma^h)^i = \sum_{0}^{i}{}_s \frac{(-1)_s \Pi(i)\,\alpha^s\gamma^{hs}}{\Pi(s)\Pi(i-s)},$$

folglich

$$\sum_{0}^{\lambda-2}{}_h \frac{\gamma^{-hk\lambda^n}(1-\alpha\gamma^h)^i}{i} = \sum_{0}^{\lambda-2}{}_h \sum_{0}^{i}{}_s \frac{(-1)_s \Pi(i)\gamma^{-hk\lambda^n}\alpha^s\gamma^{hs}}{i\Pi(s)\Pi(i-s)}.$$

Nun führe ich folgende für die hier zu behandelnden logarithmischen Ausdrücke besonders wichtige complexe Zahl ein:

$$X_k(\alpha) = \alpha + \gamma^{-k\lambda^n}\alpha^\gamma + \gamma^{-2k\lambda^n}\alpha^{\gamma^2} + \cdots + \gamma^{-(\lambda-2)k\lambda^n}\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}.$$

Diese durch $X_k(\alpha)$ bezeichneten complexen Zahlen haben mehrere besondere Eigenschaften, welche denen des entsprechenden Ausdrucks der Kreistheilung

$$F(\beta, \alpha) = \alpha + \beta\alpha^\gamma + \beta^2\alpha^{\gamma^2} + \cdots + \beta^{\lambda-2}\alpha^{\gamma^{\lambda-2}},$$

wo α eine Wurzel der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ und β eine Wurzel der Gleichung $\beta^{\lambda-1} = 1$ ist, ganz analog sind. Für den gegenwärtigen Zweck aber soll nur von der einen Eigenschaft derselben Gebrauch gemacht werden, nämlich von

$$X_k(\alpha^m) \equiv m^{k\lambda^n} X_k(\alpha), \text{ Mod. } \lambda^{n+1};$$

welche Eigenschaft aus der Definition selbst leicht zu beweisen ist, und als deren specieller Fall, für $m = 1$, noch der Congruenz

$$X_k(\alpha^{-1}) \equiv (-1)^k X_k(\alpha), \text{ Mod. } \lambda^{n+1},$$

besonders erwähnt werden mag.

Durch Einführung des Zeichens $X_k(\alpha)$ wird die obige Gleichung folgendermafsen dargestellt:

$$\sum_{0}^{\lambda-2}{}_h \frac{\gamma^{-hk\lambda^n}(1-\alpha\gamma^h)^i}{i} = \sum_{0}^{i}{}_s \frac{(-1)^s \Pi(i)}{i\Pi(s)\Pi(i-s)} X_k(\alpha^s).$$

Man zerlege nun die Summe rechter Hand in λ Partialsummen, indem man die Fälle sondert, wo $s \equiv 0$, $s \equiv 1$, $s \equiv 2$, $\ldots$ $s \equiv \lambda-1$ ist, für den Modul λ. Dabei bezeichne man durch P_t folgende Summe von Binomialcoëfficienten:

$$P_t = (-1)^t\left(\frac{\Pi(i)}{\Pi(t)\Pi(i-t)} - \frac{\Pi(i)}{\Pi(t+\lambda)\Pi(i-t-\lambda)} + \frac{\Pi(i)}{\Pi(t+2\lambda)\Pi(i-t-2\lambda)} - \cdots\right).$$

Alsdann ist

$$\sum_{0}^{\lambda-2}{}_h \frac{\gamma^{-hk\lambda^n}(1-\alpha\gamma^h)^i}{i} = \frac{1}{i}\left(P_0 X_k(1) + P_1 X_k(\alpha) + P_2 X_k(\alpha^2) + \cdots + P_{\lambda-1} X_k(\alpha^{\lambda-1})\right).$$

Um aus dieser Gleichung eine Congruenz für den Modul λ^{n+1} machen zu können, werde ich zunächst beweisen, dafs, auch wenn i den Factor λ enthält, dennoch $\frac{P_t}{i}$ denselben niemals im Nenner enthalten kann; oder, dafs P_t diesen Factor λ immer eben so oft enthält als i. Es sei wieder $i = c\lambda^\alpha$, so sind in allen den Fällen, wo t nicht $= 0$ ist, alle einzelnen in P_t enthaltenen Binomialcoëfficienten durch λ^α theilbar; welches mit Hülfe des in (§. 2) angewendeten Satzes über die Anzahl der in dem Producte $\Pi(A)$ enthaltenen Primfactoren von einer bestimmten Art, leicht bewiesen werden kann. Um aber für den Fall $t = 0$ zu zeigen, dafs P_0 durch λ^α theilbar ist, bemerke ich, dafs $P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{\lambda-1}$ gleich der Summe aller Binomialcoëfficienten von der $i$ten Potenz mit abwechselnden Vorzeichen, also gleich $(1-1)^i = 0$ ist. Wenn daher, wie gezeigt worden, $P_1, P_2, \ldots P_{\lambda-1}$ alle den Factor λ^α enthalten, so folgt, dafs P_0 ebenfalls durch diesen Factor theilbar sein mufs. Also $\frac{P_t}{i}$, aus dessen Nenner jeder Factor λ sich gegen die Zähler hinweghebt, kann in Beziehung auf den Mod. λ^{n+1} als ganze Zahl betrachtet werden. Wendet man nun die Congruenz

$$X_k(\alpha) \equiv m^{k\lambda^n} X_k(\alpha), \text{ Mod. } \lambda^{n+1}$$

auf die obige Gleichung an, und beachtet, dafs $X_k(1) \equiv 0$, Mod. λ^{n+1} ist, so erhält man

$$\sum_0^{\lambda-2}{}_h \frac{\gamma^{-hk\lambda^n}(1-\alpha\gamma^h)^i}{i} \equiv \frac{1}{i}(1^{k\lambda^n} P_1 + 2^{k\lambda^n} P_2 + \cdots + (\lambda-1)^{k\lambda^n} P_{\lambda-1}) X_k(\alpha),$$

für den Mod. λ^{n+1}; welche Congruenz auch in dem Falle richtig bleibt, wenn i durch λ theilbar ist.

Man entwickle jetzt die Potenz $(1-e^v)^i$ nach dem binomischen Lehrsatze und nehme den $k\lambda^n$ten Differentialquotienten für $v = 0$, so ist

$$\frac{d_0^{k\lambda^n}(1-e^v)^i}{i dv^{k\lambda^n}} = \frac{1}{i} \sum_0^i{}_s \frac{(-1)^s \Pi(i)\, s^{k\lambda^n}}{\Pi(s)\,\Pi(i-s)}.$$

Man zerlege ferner diese Summe genau eben so in Partialsummen, wie die obige, indem man von der Congruenz

$$(s + m\lambda)^{k\lambda^n} \equiv s^{k\lambda^n}, \text{ Mod. } \lambda^{n+1}$$

Gebrauch macht, so wird

$$\frac{d_0^{k\lambda^n}(1-e^v)^i}{dv^{k\lambda^n}} \equiv \frac{1}{i}(1^{k\lambda^n} P_1 + 2^{k\lambda^n} P_2 + \cdots + (\lambda-1^{k\lambda^n} P_{\lambda-1}), \text{ Mod. } \lambda^{n+1},$$

also

$$\sum_{0}^{\lambda-2}{}_{h} \frac{\gamma^{-hk\lambda^n}(1-\alpha\gamma^h)^i}{i} \equiv \frac{d_0^{k\lambda^n}(1-e^v)^i}{dv^{k\lambda^n}} \cdot X_k(\alpha), \text{ Mod. } \lambda^{n+1},$$

und demzufolge auch

$$\sum_{0}^{\lambda-2}{}_{h} \gamma^{-hk\lambda^n} l\left(\frac{\varphi(\alpha\gamma^h)}{\varphi(1)}\right) \equiv \Sigma_i \frac{C_i d_0^{k\lambda^n}(1-e^v)^i}{i\varphi(1)^i dv^{k\lambda^n}} \cdot X_k(\alpha).$$

Nun ist aber die Summe

$$\Sigma \frac{C_i(1-e^v)^i}{i\varphi(1)^i}$$

nichts anderes, als die nach Potenzen von $1-e^v$ geordnete Entwickelung des Logarithmus von $\frac{\varphi(e^v)}{\varphi(1)}$, also

$$\Sigma \frac{C_i(1-e^v)^i}{i\varphi(1)^i} = l\left(\frac{\varphi(e^v)}{\varphi(1)}\right) = l\varphi(e^v) - l\varphi(1);$$

folglich ist, wenn hiervon der $k\lambda^n$te Differentialquotient genommen und $v=0$ gesetzt wird:

$$\Sigma \frac{C_i d_0^{k\lambda^n}(1-e^v)^i}{i\varphi(1)^i dv^{k\lambda^n}} = \frac{d_0^{k\lambda^n} l\varphi(e^v)}{dv^{k\lambda^n}},$$

also

$$\sum_{0}^{\lambda-2}{}_{k} \gamma^{-hk\lambda^n} l\left(\frac{\varphi(\alpha\gamma^h)}{\varphi(1)}\right) \equiv \frac{d_0^{k\lambda^n} l\varphi(e^v)}{dv^{k\lambda^n}} \cdot X_k(\alpha), \text{ Mod. } \lambda^{n+1}.$$

Setzt man endlich $k=1, 2, 3, \ldots \lambda-2$ und bildet die Summe, wobei der Werth $h=0$ von den übrigen zu trennen ist, so erhält man folgenden Ausdruck des Logarithmen einer complexen Zahl in Beziehung auf den Mod. λ^{n+1}:

$$(\lambda-1) l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right) \equiv l\left(\frac{N\varphi(\alpha)}{\varphi(1)^{\lambda-1}}\right) + \frac{d_0^{\lambda^n} l\varphi(e^v)}{dv^{\lambda^n}} X_1(\alpha) + \frac{d_0^{2\lambda^n} l\varphi(e^v)}{dv^{2\lambda^n}} X_2(\alpha) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{d_0^{(\lambda-2)\lambda^n} l\varphi(e^v)}{dv^{(\lambda-2)\lambda^n}} X_{\lambda-2}(\alpha), \text{ Mod. } \lambda^{n+1}.$$

Der Fall $n=0$, als der in den Anwendungen am häufigsten vorkommende, verdient noch eine besondere Berücksichtigung. Für denselben hat man, weil $N\varphi(\alpha) \equiv 1$ und $\varphi(1)^{\lambda-1} \equiv 1$, Mod. λ ist,

$$\sum_{0}^{\lambda-2}{}_{h} \gamma^{-hk} l\left(\frac{\varphi(\alpha\gamma^h)}{\varphi(1)}\right) \equiv \frac{d_0^k l\varphi(e^v)}{dv^k} \cdot X_k(\alpha),$$

und

$$-l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right) \equiv \frac{d_0 l\varphi(e^v)}{dv} X_1(\alpha) + \frac{d_0^2 l\varphi(e^v)}{dv^2} X_2(\alpha) + \cdots + \frac{d_0^{\lambda-2} l\varphi(e^v)}{dv^{\lambda-2}} X_{\lambda-2}(\alpha), \text{ Mod. } \lambda,$$

und es ist in diesem Falle

$$X_k(\alpha) \equiv \alpha + \gamma^{-k}\alpha^{\gamma} + \gamma^{-2k}\alpha^{\gamma^2} + \cdots + \gamma^{-(\lambda-2)k}\alpha^{\gamma^{\lambda-2}};$$

wofür man auch den congruenten Ausdruck

$$X_k(\alpha) \equiv \alpha + 2^{\lambda-1-k}\alpha^2 + 3^{\lambda-1-k}\alpha^3 + \cdots + (\lambda-1)^{\lambda-1-k}\alpha^{\lambda-1}$$

setzen kann.

Um nun diese Logarithmen der complexen Zahlen und die für dieselben gefundenen Entwickelungen, in der Rechnung, da wo es sich um Congruenzen für den Mod. λ^{n+1} oder λ handelt, überall mit Sicherheit anwenden zu können, sind noch zwei Sätze nöthig, welche hier aufgestellt und bewiesen werden sollen. Nemlich:

Lehrsatz. Wenn zwei complexe Zahlen congruent sind, für den Modul λ^{n+1}, und wenn auch die beiden ganzen Zahlen, welche man erhält, wenn man in denselben $\alpha = 1$ setzt, congruent sind, für denselben Modul: so sind auch die Logarithmen dieser complexen Zahlen für diesen Modul congruent.

Die beiden complexen Zahlen seien $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$, so ist nach der Voraussetzung $f(\alpha) \equiv \varphi(\alpha)$ und $f(1) \equiv \varphi(1)$, Mod. λ^{n+1}. Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{f(\alpha)-f(1)}{f(1)} = x, \qquad \frac{\varphi(\alpha)-\varphi(1)}{\varphi(1)} = y,$$

so erhält man

$$l\left(\frac{f(\alpha)}{f(1)}\right) \equiv x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots,$$

$$l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right) \equiv y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \cdots$$

für den Mod. λ^{n+1}; welche Reihen von selbst abbrechen, weil, von einem bestimmten Gliede an, alle folgenden congruent Null werden; die man aber auch über diese Grenze hinaus noch fortgesetzt annehmen kann, so weit man will. Aus den beiden Voraussetzungen des Satzes folgt $x \equiv y$, Mod. λ^{n+1}; woraus sogleich erhellet, dafs auch $\frac{1}{k}x^k \equiv \frac{1}{k}y^k$, Mod. λ^{n+1} ist, für alle diejenigen Werthe von k, welche nicht Vielfache von λ sind. Um zu zeigen, dafs eben Das auch für alle durch λ theilbaren Werthe von k Statt findet, also allgemein für $k = c\lambda^a$, wo c nicht weiter durch λ theilbar ist, setze ich $y = x + \lambda^{n+1}z$. Dann giebt die binomische Entwickelung:

$$y^{c\lambda^a} \equiv x^{c\lambda^a} + c\lambda^{n+a+1}x^{c\lambda^a-1}z + \cdots,$$

also

$$y^{c\lambda^a} \equiv x^{c\lambda^a}, \text{ Mod. } \lambda^{n+a+1},$$

und hieraus folgt

$$\frac{y^{c\lambda^a}}{c\lambda^a} \equiv \frac{x^{c\lambda^a}}{c\lambda^a}, \text{ Mod. } \lambda^{n+1}.$$

Da nun alle einzelnen Glieder der einen Entwicklung den entsprechenden der andern Entwicklung congruent sind, so ist nothwendig

$$l\left(\frac{f(\alpha)}{f(1)}\right) \equiv l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right), \text{ Mod. } \lambda^{n+1};$$

was zu beweisen war.

Der zweite, jetzt zu beweisende Satz (die Umkehrung des ersten) ist nur unter Hinzufügung einer neuen Bedingung richtig und lautet so:

Lehrsatz. Wenn die Logarithmen zweier complexen Zahlen, nemlich $l\left(\frac{f(\alpha)}{f(1)}\right)$ und $l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right)$ congruent sind für den Modul λ^{n+1}, und auch $f(1) \equiv \varphi(1)$, Mod. λ^{n+1} ist, und wenn überdies die complexen Zahlen $f(\alpha)$ und $(\varphi\alpha)$ so beschaffen sind, dafs $f(\alpha)-f(1)$ und $\varphi(\alpha)-\varphi(1)$ beide durch $(1-\alpha)^2$ theilbar sind: so sind die complexen Zahlen $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ selbst congruent für den Mod. λ^{n+1}.

Es sei wieder

$$\frac{f(\alpha)-f(1)}{f(1)} = x, \qquad \frac{\varphi(\alpha)-\varphi(1)}{\varphi(1)} = y,$$

und

$$l\left(\frac{f(\alpha)}{f(1)}\right) = u, \qquad l\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(1)}\right) = v,$$

so ist

$$u \equiv x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots, \text{ Mod. } \lambda^{n+1}.$$

Es läfst sich nun diese Reihe nach den gewöhnlichen Methoden umkehren, so dafs x in eine nach Potenzen von u geordnete Reihe entwickelt wird. Aus den ersten N Gliedern der gegebenen Reihe werden so die ersten N Glieder der umgekehrten Reihe bestimmt, und wenn man N grofs genug annimmt, so dafs in beiden Reihen, der gegebenen sowohl, als der umgekehrten, über das Nte Glied hinaus nur noch solche Glieder liegen, welche für den Mod. λ^{n+1} congruent Null sind, so hat man den vollständigen Ausdruck des x durch u in Beziehung auf den Mod. λ^{n+1}. Das Resultat der Umkehrung dieser Reihe ist aus der Analysis bekannt. Es ist

$$x \equiv \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

Nun ist zu beweisen, dafs auch in dieser Reihe die Anzahl der ersten

Glieder N immer so grofs angenommen werden kann, dafs alle folgenden Glieder congruent Null werden. Zu diesem Zwecke untersuche ich das allgemeine Glied der Reihe, nämlich

$$\frac{u^k}{\Pi(k)}.$$

Aus dem im zweiten Paragraphen mitgetheilten Satze über die Anzahl, wievielmal ein bestimmter Primfactor in dem Producte $\Pi(A)$ enthalten ist, folgt zunächst, dafs die Anzahl der in dem Producte $\Pi(k)$ enthaltenen Factoren λ stets kleiner ist als $\frac{k}{\lambda-1}$. Ferner enthält, nach der Voraussetzung, $f(\alpha)-f(1)$, also auch x, den Factor $(1-\alpha)^2$; woraus sogleich folgt, dafs auch u den Factor $(1-\alpha)^2$ enthalten mufs. Der Zähler u^k enthält demnach den Factor $1-\alpha$ genau $2k$ mal, und wenn man erwägt, dafs ein Factor λ genau $\lambda-1$ Factoren $1-\alpha$ giebt, so weifs man, dafs der Nenner $\Pi(k)$ stets weniger als k Factoren $1-\alpha$ enthält. Nach Aufhebung der Factoren λ im Nenner, gegen die im Zähler, bleiben folglich im Zähler mehr als k Factoren $1-\alpha$ stehen, und wenn daher $k>(n+1)(\lambda-1)$ angenommen wird, so enthält $\frac{u^k}{\Pi(k)}$ den Factor $(1-\alpha)^{(\lambda-1)(n+1)}$, d. h. den Factor λ^{n+1}. Von einem solchen Gliede an sind demnach alle folgenden $\equiv 0$. Ohne die Bedingung: $f(\alpha)-f(1)$ theilbar durch $(1-\alpha)^2$, würde aber, wie sich hieraus zeigt, die Reihe nach dem Mod. λ^{n+1} keinen endlichen Ausdruck geben.

Ganz auf dieselbe Weise ist nun auch

$$y \equiv \frac{v}{1}+\frac{v^2}{1.2}+\frac{v^3}{1.2.3}+\frac{v^4}{1.2.3.4}+\cdots, \quad \text{Mod. } \lambda^{n+1}.$$

Nach der Voraussetzung des zu beweisenden Satzes ist aber $u \equiv v$, Mod. λ^{n+1}. Schreibt man diese Congruenz, als Gleichung, in die Form $u = v + \lambda^{n+1} w$, so findet sich durch Entwicklung der Potenz des Binoms:

$$\frac{u^k}{\Pi(k)} = \frac{(v+\lambda^{n+1}w)^k}{\Pi(k)} = \frac{v^k}{\Pi(k)}+\frac{\lambda^{n+1}v^{k-1}w}{\Pi(1)\Pi(k-1)}+\frac{\lambda^{2n+2}v^{k-2}w^2}{\Pi(2)\Pi(k-2)}+\cdots$$

Nun heben sich, nach Dem was so eben gezeigt, alle in $\Pi(k-1)$ enthaltenen Factoren λ gegen die in v^{k-1} enthaltenen vollständig hinweg; eben so die in $\Pi(k-2)$ enthaltenen gegen die in v^{k-2} enthaltenen u. s. w. Für den Modul λ^{n+1} bleibt also von dieser binomischen Entwicklung nur das erste Glied stehen; alle übrigen verschwinden, als Vielfache von λ^{n+1}. Folglich ist

$$\frac{u^k}{\Pi(k)} \equiv \frac{v^k}{\Pi(k)}, \quad \text{Mod. } \lambda^{n+1}.$$

Da also alle Glieder der Entwicklung von x einzeln denen der Entwicklung

von y congruent sind, so ist nothwendig $x \equiv y$, Mod. λ^{n+1}, d. h.

$$\frac{f(\alpha)-f(1)}{f(1)} \equiv \frac{\varphi(\alpha)-\varphi(1)}{\varphi(1)}, \quad \text{Mod. } \lambda^{n+1};$$

und da ferner nach der Voraussetzung auch $f(1) \equiv \varphi(1)$ ist, so ist

$$f(\alpha) \equiv \varphi(\alpha), \quad \text{Mod. } \lambda^{n+1};$$

was zu beweisen war.

Um den Gebrauch der hier entwickelten Methode an einem Beispiele zu zeigen, wende ich sie zur Lösung folgender in der Theorie der complexen Zahlen sehr wichtigen Aufgabe an.

Aufgabe. Eine gegebene *complexe* Zahl durch Multiplication mit Einheiten in eine solche Form zu bringen, dafs sie, mit ihrer reciproken multiplicirt, ein Product giebt, welches einer ***nichtcomplexen*** ganzen Zahl congruent ist, für den Mod. λ.

Die Aufgabe ist, wie sich ergeben wird, immer lösbar, aufser wenn λ eine von den Ausnahmezahlen ist, d. h. wenn λ in einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factor des Zählers vorkommt. Ich wende zur Lösung der Aufgabe wieder die Einheiten von der Form

$$E_n(\alpha) = e(\alpha).e(\alpha^\gamma)^{\gamma^{-2n}}.e(\alpha^{\gamma^2})^{\gamma^{-4n}} \ \ldots \ e(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})^{\gamma^{-2(\mu-1)n}}$$

an; nemlich diejenigen, für welche die Indices sich am einfachsten darstellten.

Durch Anwendung der Logarithmen erhält man

$$l\left(\frac{E_n(\alpha)}{E(1)}\right) \equiv l\left(\frac{e(\alpha)}{e(1)}\right) + \gamma^{-2n} l\left(\frac{e(\alpha^\gamma)}{e(1)}\right) + \ \ldots \ \gamma^{-2(\mu-1)n} l\left(\frac{e(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})}{e(1)}\right),$$

oder, durch Anwendung des Summenzeichens:

$$l\left(\frac{E_n(\alpha)}{E_n(1)}\right) \equiv \sum_0^{\mu-1} {}_h \gamma^{-2hn} l\left(\frac{e(\alpha^{\gamma^h})}{e(1)}\right), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Giebt man dem h weiter die Werthe $h = \mu, \mu+1, \mu+2, \ldots \lambda-2$, so kehren dieselben Glieder wieder, für den Mod. λ. Wenn daher die Summe für alle Werthe $h = 0, 1, 2, \ldots \lambda-2$ genommen wird, so verdoppelt sie sich und man erhält

$$2l\left(\frac{E_n(\alpha)}{E_n(1)}\right) \equiv \Sigma \gamma^{-2hn} l\left(\frac{e(\alpha^{\gamma^h})}{e(1)}\right), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Setzt man nun in der einen der für den Mod. λ in diesem Paragraphen gegebenen allgemeinen Formeln $\varphi(\alpha) = e(\alpha)$, so ergiebt sich

$$2l\left(\frac{E_n(\alpha)}{E_n(1)}\right) \equiv \frac{d_0^{2n} le(e^v)}{dv^{2n}} X_{2n}(\alpha), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Nun ist

$$e(\alpha) = \pm \frac{\alpha^{\frac{1}{2}(1-\gamma)}(1-\alpha^{\gamma})}{1-\alpha},$$

also

$$e(e^{v}) = \pm \frac{e^{\frac{1}{2}v(1-\gamma)}1-e^{\gamma v})}{1-e^{v}} = \pm \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma v}-e^{-\frac{1}{2}\gamma v}}{e^{\frac{1}{2}v}-e^{-\frac{1}{2}v}}.$$

Die nach Potenzen von v geordnete Reihen-Entwicklung des Logarithmen dieser Gröfse ist bekanntlich

$$le(e^{v}) = l\gamma + \frac{(\gamma^{2}-1)B_{1}v^{2}}{1.2.2} - \frac{(\gamma^{4}-1)B_{2}v^{4}}{1.2.3.4.4} + \cdots,$$

wo B_1, B_2, u. s. w. die *Bernoulli*schen Zahlen sind. Hieraus erhält man unmittelbar den $2n$ten Differentialquotienten für den Werth $v=0$, nämlich

$$\frac{d_0^{2n}\, le(e^{v})}{dv^{2n}} = (-1)^{n+1}\frac{(\gamma^{2n}-1)B_n}{2n},$$

also

$$l\left(\frac{E_n(\alpha)}{E_n(1)}\right) \equiv (-1)^{n+1}\frac{(\gamma^{2n}-1)B_n}{4n}X_{2n}(\alpha), \quad \text{Mod } \lambda.$$

Es sei nun $F(\alpha)$ eine beliebige, nicht durch $1-\alpha$ theilbare complexe Zahl, welche auch so angenommen werden soll, dafs $F(\alpha)-F(1)$ durch $(1-\alpha)^2$ theilbar ist, in welche Form sich jede solche complexe Zahl durch Multiplication mit einer passenden einfachen Einheit α^k bringen läfst: so hat man für den Logarithmen derselben folgende Entwicklung:

$$-l\left(\frac{F(\alpha)}{F(1)}\right) \equiv \frac{d_0 lF(e^{v})}{dv}X_1(\alpha) + \frac{d_0^2 lF(e^{v})}{dv^2}X_2(\alpha) \cdots \frac{d_0^{\lambda-2} lF(e^{v})}{dv^{\lambda-2}}X_{\lambda-2}(\alpha), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Nun möge die Zahl M_n durch folgende Congruenz bestimmt werden:

$$\frac{(-1)^{n+1}(\gamma^{2n}-1)B_n}{4n}M_n \equiv \frac{d_0^{2n} lF(e^{v})}{dv^{2n}}, \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Der Werth von M_n wird durch diese Congruenz immer vollständig bestimmt sein, wenn nicht etwa der Coëfficient des M_n in derselben durch λ theilbar ist. Hat n nur einen der Werthe 1, 2, 3, ... $\mu-1$, so ist $\gamma^{2n}-1$ niemals durch λ theilbar. Es kommt also nur darauf an, dafs die *Bernoulli*sche Zahl B_n für einen der Werthe $n=1, 2, 3, \ldots \mu-1$ nicht durch λ theilbar sei. Ich setze deshalb voraus, dafs λ nicht eine von diesen Ausnahmezahlen sei, welche auch schon bei mehreren der vorhergehenden Untersuchungen ausgeschlossen werden mufsten, und für welche im Allgemeinen die vorliegende Aufgabe immer unlösbar ist. Verbindet man die für M_n aufgestellte Congruenz mit dem gefundenen Ausdrucke des Logarithmus der Einheit $E_n(\alpha)$, so er-

hält man

$$M_n l\left(\frac{E_n(\alpha)}{E_n(1)}\right) \equiv \frac{d_0^{2n} lF(e^v)}{dv^{2n}} \cdot X_{2n}(\alpha), \quad \text{Mod. } \lambda,$$

und wenn man in der Entwicklung des $-l\left(\frac{F(\alpha)}{F(1)}\right)$ alle Glieder mit geradem Stellenzeiger durch die für $n = 1, 2, 3, \ldots \mu - 1$ in dieser Congruenz gegebenen Ausdrücke ersetzt, so ergiebt sich:

$$-l\left(\frac{F(\alpha)}{F(1)}\right) \equiv M_1 l\left(\frac{E_1(\alpha)}{E_1(1)}\right) + M_2 l\left(\frac{E_2(\alpha)}{E_2(1)}\right) + \cdots + M_{\mu-1} l\left(\frac{E_{\mu-1}(\alpha)}{E_{\mu-1}(1)}\right)$$
$$+ \frac{d_0 lF(e^v)}{dv} X_1(\alpha) + \frac{d_0^3 lF(e^v)}{dv^3} X_3(\alpha) + \cdots + \frac{d_0^{\lambda-2} lF(e^v)}{dv^{\lambda-2}} X_{\lambda-2}(\alpha).$$

Es sei nun

$$F(\alpha) . E_1(\alpha)^{M_1} . E_2(\alpha)^{M_2} \ldots E_{\mu-1}(\alpha)^{M_{\mu-1}} = F_1(\alpha),$$

so ist vermöge dieser Congruenz:

$$-l\left(\frac{F_1(\alpha)}{F_1(1)}\right) \equiv \frac{d_0 lF(e^v)}{dv} X_1(\alpha) + \frac{d_0^3 lF(e^v)}{dv^3} X_3(\alpha) \cdots + \frac{d_0^{\lambda-2} lF(e^v)}{dv^{\lambda-3}} X_{\lambda-2}(\alpha),$$

für den Mod. λ. Verwandelt man α in α^{-1}, so wird für alle ungeraden Werthe von k:

$$X_k(\alpha^{-1}) \equiv -X_k(\alpha).$$

Durch diese Änderung wird also lediglich das Vorzeichen von $l\left(\frac{F_1(\alpha)}{F_1(1)}\right)$ umgekehrt, und man erhält

$$l\left(\frac{F_1(\alpha)}{F_1(1)}\right) \equiv -l\left(\frac{F_1(\alpha^{-1})}{F_1(1)}\right) \quad \text{oder} \quad l\left(\frac{F_1(\alpha) F_1(\alpha^{-1})}{F_1(1) F_1(1)}\right) \equiv 0,$$

und hieraus folgt endlich

$$F_1(\alpha) F_1(\alpha^{-1}) \equiv F(1)^2, \text{ Mod. } \lambda.$$

Die complexe Zahl

$$F_1(\alpha) = F(\alpha) . E_1(\alpha)^{M_1} . E_2(\alpha)^{M_2} \ldots E_{\mu-1}(\alpha)^{M_{\mu-1}},$$

in welcher die Exponenten der Einheiten durch die Congruenz

$$\frac{(-1)^{n+1}(\gamma^{2n}-1) B_n}{4n} M_n \equiv \frac{d_0^{2n} lF(e^v)}{dv^{2n}}, \text{ Mod. } \lambda$$

bestimmt sind, ist also eine solche, welche der vorgelegten Aufgabe genügt.

Ich füge noch die Bemerkung hinzu, dafs in der logarithmischen Entwicklung einer beliebigen complexen Zahl

$$-l\left(\frac{F(\alpha)}{F(1)}\right) \equiv \frac{d_0 lF(e^v)}{dv} X_1(\alpha) + \frac{d_0^2 lF(e^v)}{dv^2} X_2(\alpha) + \cdots + \frac{d_0^{\lambda-2} lF(e^v)}{dv^{\lambda-2}} X_{\lambda-2}(\alpha), \text{ Mod. } \lambda$$

die Glieder von ungeraden Stellenzeigern von den complexen Einheiten in der

complexen Zahl $F(\alpha)$ ganz unabhängig sind, d. h., dafs sie ungeändert bleiben, wenn man $F(\alpha)$ in $F(\alpha).\varepsilon(\alpha)$ verwandelt, wo $\varepsilon(\alpha)$ eine beliebige Einheit bezeichnet. Nur das erste Glied ist von der einfachen Einheit α^k abhängig, mit welcher $F(\alpha)$ multiplicirt sein kann; es ist congruent Null, wenn $F(\alpha)$ der Bedingung genügt, dafs $F(\alpha)-F(1)$ durch $(1-\alpha)^2$ theilbar ist:

§. 5.

Lösung einer Aufgabe, betreffend die allgemeinen Reciprocitätsgesetze.

In den Monatsberichten der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Mai 1851 habe ich zuerst das allgemeine Reciprocitätsgesetz für complexe Primzahlen veröffentlicht, welches ich bereits einige Jahre früher gefunden und in einem Schreiben vom 20ten Januar 1848 Herrn ***Lejeune-Dirichlet*** und durch diesen ***Jacobi*** mitgetheilt hatte. Dieses Gesetz, welches ich durch gewisse, so zu sagen metaphysische Schlüsse fand und nachher durch ziemlich umfangreich berechnete Tabellen verificirte, stützt sich auf die am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen gelösete Aufgabe: eine ***complexe*** Zahl durch Multiplication mit passenden Einheiten auf eine solche Form zu bringen, dafs sie, mit ihrer reciproken multiplicirt, ein Product giebt, welches, für den Mod. λ, einer ***nichtcomplexen*** ganzen Zahl congruent ist. Wenn eine complexe Zahl durch Multiplication mit Einheiten in dieser Art zubereitet ist, und sie aufserdem auch der Bedingung genügt, dafs sie für den Mod. $(1-\alpha)^\lambda$ einer nichtcomplexen ganzen Zahl congruent ist, so nenne ich die complexe Zahl eine ***primäre***, oder eine complexe Zahl in der ***primären Form***. Die primäre Form der complexen Zahl $\varphi(\alpha)$ wird also durch folgende zwei Congruenzen definirt:

$$\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^{-1}) \equiv \varphi(1)^2, \text{ Mod. } \lambda,$$
$$\varphi(\alpha) \equiv \varphi(1), \text{ Mod. } (1-\alpha)^2,$$

und es kann jede gegebene (nicht durch $1-\alpha$ theilbare) complexe Zahl durch Multiplication mit passenden Einheiten auf diese primäre Form gebracht werden, wenn λ nicht eine von den Ausnahmezahlen ist, welche in einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ ***Bernoulli***schen Zahlen als Factoren enthalten sind. Das von mir gefundene allgemeine Reciprocitätsgesetz, auf diese Definition der primären Form der complexen Zahlen sich stützend, lautet nun einfach folgendermaafsen:

> Wenn die beiden complexen Primzahlen $f_1(\alpha)$ und $\varphi_1(\alpha)$ in der primären Form genommen werden, oder, falls sie ideal sind, wenn die zu ***wirklichen*** complexen Zahlen werdenden Potenzen derselben in der pri-

mären Form genommen werden: so ist

$$\left(\frac{f_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}\right) = \left(\frac{\varphi_1(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right).$$

Sowohl wegen der am Anfange dieser Abhandlung gegebenen Definition des Symbols $\left(\frac{f_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}\right)$, als auch wegen der Forderung, dafs $f_1(\alpha)$ und $\varphi_1(\alpha)$ complexe Zahlen von der primären Form sein sollen, erstreckt sich dieses Gesetz nicht auf die Ausnahmefälle, wo λ ein Factor einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen ist.

Einen strengen und allgemeinen Beweis des Gesetzes habe ich bisher noch nicht gefunden, da die neuen Hülfsmittel, welche ich zu diesem Zwecke aufgesucht habe und welche ich ein anderesmal zu veröffentlichen gedenke, nur für den Beweis einiger besondern, bisher noch nirgend bewiesenen Fälle ausgereicht haben, (z. B. für den Fall, dafs $f_1(\alpha)$ und $\varphi_1(\alpha)$ conjugirte complexe Zahlen sind, oder $\varphi_1(\alpha) = f_1(\alpha^k)$ ist). Wenn gleich daher die allgemeine Gültigkeit dieses einfachen Reciprocitätsgesetzes noch problematisch ist, bis ein strenger Beweis davon gefunden sein wird, so ist doch so viel klar, dafs die von mir definirte *primäre* Form der complexen Zahlen, für welche wenigstens in vielen Fällen die Reciprocitätsgesetze sich am einfachsten darstellen, für dieselben eine besondere Bedeutung hat. Es wird deshalb nicht uninteressant sein, eine Vergleichung des Reciprocitätsgesetzes für die *primären complexen* Primzahlen mit dem Reciprocitätsgesetze für diejenigen *complexen* Primzahlen aufzustellen, welche den Bedingungen primärer Zahlen nicht unterworfen sind. Um sogleich vollkommen präcis auszusprechen, um was es sich hier handeln soll, fasse ich es in die folgende

Aufgabe. Wenn das Reciprocitätsgesetz für zwei complexe Primzahlen, für die primäre Form derselben als gegeben angenommen wird: daraus das Reciprocitätsgesetz für die complexen Primzahlen abzuleiten, welche der Bedingung, primär zu sein, nicht unterliegen.

Es seien $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ zwei beliebige complexe Primzahlen, von welchen ich der Einfachheit wegen nur das Eine voraussetze, dafs sie durch Multiplication mit einer passenden Potenz der einfachen Einheit α so zubereitet sind, dafs sie den Bedingungen

$$f(\alpha) \equiv f(1) \quad \text{und} \quad \varphi(\alpha) \equiv \varphi(1), \ \text{Mod.}(1-\alpha)^2$$

genügen. Es seien ferner $f_1(\alpha)$ und $\varphi_1(\alpha)$ dieselben complexen Primzahlen in der *primären* Form, also gereinigt von den in den Zahlen $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$

beliebig vorkommenden complexen Einheiten, so hat man, wie im vorigen Paragraphen gezeigt worden:

$$f(\alpha)\,E_1(\alpha)^{M_1}\,.\,E_2(\alpha)^{M_2}\,\ldots\,E_{\mu-1}(\alpha)^{M_{\mu-1}} \equiv f_1(\alpha),$$

wo die Exponenten M_1, M_2, $\ldots$ $M_{\mu-1}$ durch die Congruenz

$$\frac{(-1)^{n+1}(\gamma^{2n}-1)\,B_n}{4n}\,M_n \equiv \frac{d_0^{2n}\,lf(e^v)}{dv^{2n}}, \quad \text{Mod. } \lambda$$

bestimmt sind. Eben so hat man auch

$$\varphi(\alpha)\,E_1(\alpha)^{N_1}\,.\,E_2(\alpha)^{N_2}\,\ldots\,E_{\mu-1}(\alpha)^{N_{\mu-1}} \equiv \varphi_1(\alpha),$$

wo die Exponenten N_1, N_2, $\ldots$ $N_{\mu-1}$ durch die Congruenz

$$\frac{(-1)^{n+1}(\gamma^{2n}-1)\,B_n}{4n}\,N_n \equiv \frac{d_0^{2n}\,l\varphi(e^v)}{dv^{2n}}, \quad \text{Mod. } \lambda$$

bestimmt werden. Es soll nun das Zeichen des Index Ind. auf den Mod. $f(\alpha)$, oder, was Dasselbe ist $f_1(\alpha)$, und das Zeichen ind. auf den Mod. $\varphi(\alpha)$ oder $\varphi_1(\alpha)$ sich beziehen, so dafs, wenn $F(\alpha)$ eine beliebige complexe Zahl bezeichnet:

$$F(\alpha)^{\frac{Nf(\alpha)-1}{\lambda}} \equiv \alpha^{\text{Ind.}F(\alpha)}, \quad \text{Mod. } f(\alpha),$$

$$F(\alpha)^{\frac{N\varphi(\alpha)-1}{\lambda}} \equiv \alpha^{\text{ind.}F(\alpha)}, \quad \text{Mod. } \varphi(\alpha) \text{ ist.}$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten der Gleichung, welche $f_1(\alpha)$ durch $f(\alpha)$ ausdrückt, die Indices in Beziehung auf den Modul $\varphi(\alpha)$, so erhält man

$$\text{ind.}f(\alpha) + M_1\,\text{ind.}E_1(\alpha) + M_2\,\text{ind.}E_2(\alpha) + \cdots + M_{\mu-1}\,\text{ind.}E_{\mu-1}(\alpha) \equiv \text{ind.}f_1(\alpha)$$

für den Mod. λ. Eben so, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung, welche $\varphi_1(\alpha)$ durch $\varphi(\alpha)$ ausdrückt, die Indices in Beziehung auf den Mod. $f(\alpha)$ nimmt:

$$\text{Ind.}\varphi(\alpha) + N_1\,\text{Ind.}E_1(\alpha) + N_2\,\text{Ind.}E_2(\alpha) + \cdots + N_{\mu-1}\,\text{Ind.}E_{\mu-1}(\alpha) \equiv \text{Ind.}\varphi_1(\alpha).$$

Ich wende jetzt die in dem ersten und dritten Paragraphen der gegenwärtigen Abhandlung gefundenen Ausdrücke der Indices der Einheiten $E_n(\alpha)$ an; und zwar diejenigen, welche nur die complexe Primzahl selbst enthalten, auf die der Index sich bezieht, welche auch in allen Fällen, es mag der Modul eine zum Exponenten Eins oder zu einem andern Exponenten gehörende complexe Primzahl sein, dieselben sind, nämlich:

$$\text{Ind.}E_n(\alpha) \equiv \frac{(-1)^n(\gamma^{2n}-1)\,B_n}{4n} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2n}\,lf(e^v)}{dv^{\lambda-2n}},$$

$$\text{ind.}E_n(\alpha) \equiv \frac{(-1)^n(\gamma^{2n}-1)\,B_n}{4n} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2n}\,l\varphi(e^v)}{dv^{\lambda-2n}}, \quad \ldots \text{ Mod. } \lambda.$$

Diese Ausdrücke, verbunden mit den Congruenzen, welche M_n und N_n be-

stimmen, geben

$$\left.\begin{aligned} M_n \operatorname{ind}. E_n(\alpha) &\equiv -\frac{d_0^{2n} lf(e^\nu)}{dv^{2n}} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2n} l\varphi(e^\nu)}{dv^{\lambda-2n}}, \\ N_n \operatorname{Ind}. E_n(\alpha) &\equiv -\frac{d_0^{2n} l\varphi(e^\nu)}{dv^{2n}} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2n} lf(e^\nu)}{dv^{\lambda-2n}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{ Mod. } \lambda.$$

Vermöge dieser Ausdrücke verwandeln sich die obigen Congruenzen in folgende:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ind}. f(\alpha) &\equiv \operatorname{ind}. f_1(\alpha) + \sum_1^{\mu-1}{}_n \frac{d_0^{2n} lf(e^\nu)}{dv^{2n}} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2n} l\varphi(e^\nu)}{dv^{\lambda-2n}}, \\ \operatorname{Ind}. \varphi(\alpha) &\equiv \operatorname{Ind}. \varphi_1(\alpha) + \sum_1^{\mu-1}{}_n \frac{d_0^{2n} l\varphi(e^\nu)}{dv^{2n}} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2n} lf(e^\nu)}{dv^{\lambda-2n}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{ Mod. } \lambda.$$

Nimmt man die Glieder der in der zweiten dieser Congruenzen vorkommenden Summe in umgekehrter Ordnung, so läfst sich dieselbe auch folgendermaafsen darstellen:

$$\operatorname{Ind}. \varphi(\alpha) \equiv \operatorname{Ind}. \varphi_1(\alpha) + \sum_1^{\mu-1}{}_n \frac{d_0^{2n+1} lf(e^\nu)}{dv^{2n+1}} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2n-1} l\varphi(e^\nu)}{dv^{\lambda-2n-1}}.$$

Subtrahirt man dieselbe von der ersten, so erhält man

$$\operatorname{ind}. f(\alpha) - \operatorname{Ind}. \varphi(\alpha) \equiv \operatorname{ind}. f_1(\alpha) - \operatorname{Ind}. \varphi_1(\alpha) + \Sigma,$$

wo der einfache Buchstabe Σ als abgekürztes Zeichen für die Reihe

$$\Sigma = \sum_2^{\lambda-2}{}_h (-1)^h \frac{d_0^h lf(e^\nu)}{dv^h} \cdot \frac{d_0^{\lambda-h} l\varphi(e^\nu)}{dv^{\lambda-1}}$$

gesetzt ist.

Diese Congruenz enthält die vollständige Lösung der gestellten Aufgabe. Wendet man die dem *Legendre*schen Zeichen für die quadratischen Reste analogen Zeichen für die höheren Potenzreste an, welche mit den Zeichen ind. und Ind. so zusammenhangen, dafs

$$\left(\frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right) = \alpha^{\operatorname{ind}. F(\alpha)}, \quad \left(\frac{F(\alpha)}{f(\alpha)}\right) = \alpha^{\operatorname{Ind}. F(\alpha)},$$

so nimmt das gefundene Resultat folgende Form an:

$$\frac{\left(\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right)}{\left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}\right)} = \frac{\left(\frac{f_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}\right)}{\left(\frac{\varphi_1(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right)} \cdot \alpha^{\Sigma}.$$

Der Ausdruck des Σ, welcher entwickelt folgendermaafsen geschrieben wird:

$$\Sigma = \frac{d_0^2 lf(e^\nu)}{dv^2} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2} l\varphi(e^\nu)}{dv^{\lambda-2}} - \frac{d_0^3 lf(e^\nu)}{dv^3} \cdot \frac{d_0^{\lambda-3} l\varphi(e^\nu)}{dv^{\lambda-3}} + \ldots$$

$$\ldots - \frac{d_0^{\lambda-2} lf(e^\nu)}{dv^{\lambda-2}} \cdot \frac{d_0^2 l\varphi(e^\nu)}{dv^2},$$

enthält, da die complexen Zahlen $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ als gegeben betrachtet werden, nur gegebene Gröfsen, und wenn nun auch das Reciprocitätsgesetz für die primären complexen Zahlen $f_1(\alpha)$ und $\varphi_1(\alpha)$ als gegeben angenommen wird, d. h., wenn das Verhältnifs $\left(\frac{f_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}\right):\left(\frac{\varphi_1(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right)$ bekannt ist: so ist vermöge dieser Gleichung auch das Reciprocitäts-Verhältnifs $\left(\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right):\left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}\right)$ der complexen Primzahlen $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ gegeben.

Angenommen, dafs das von mir gefundene, oben aufgestellte Reciprocitätsgesetz, nach welchem

$$\left(\frac{f_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}\right) = \left(\frac{\varphi_1(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right)$$

sein soll, richtig sei, so hat man für die nichtprimären complexen Primzahlen $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$, welche nur der einen Bedingung genügen müssen, dafs $f(\alpha)-f(1)\equiv 0$ und $\varphi(\alpha)-\varphi(1)\equiv 0$ ist, nach dem Mod. $(1-\alpha)^2$, das Reciprocitätsgesetz:

$$\left(\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right) = \left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}\right)\cdot\alpha^{\Sigma}.$$

Mit dem Reciprocitätsgesetze für die *primären complexen* Primzahlen ist also zugleich auch das Reciprocitätsgesetz für beliebige *nichtprimäre complexe* Primzahlen gegeben.

In der schon oben erwähnten Abhandlung (im 39ten Bande S. 351 dieses Journals) hat Herr *Eisenstein* eine, zwar auf einer unbewiesenen Voraussetzung beruhende, jedoch sehr sinnreiche Methode entwickelt, um diejenige Potenz von α zu finden, welche dem Verhältnisse $\left(\frac{A}{B}\right):\left(\frac{B}{A}\right)$ gleich ist, wenn A und B complexe Zahlen sind. Der Ausdruck dieser mit dem Namen *Umkehrungsfactor* bezeichneten Potenz von α, welchen er daselbst giebt, würde, wie es mir scheint, gehörig entwickelt und vereinfacht, sich auf dieselbe Form bringen lassen, wie der in der hier gegebenen Reciprocitätsgleichung enthaltene Ausdruck des Umkehrungsfactors α^{Σ}, in welchem Σ durch die Differentialquotienten der Logarithmen der complexen Zahlen $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$, für $\alpha = e^{\nu}$, gegeben ist. Wenn wirklich, wie ich vermuthe, dieses Resultat der erwähnten Abhandlung mit dem hier aufgestellten übereinstimmt, so hätte Herr *Eisenstein* aus denselben auch das von mir gefundene einfache Reciprocitätsgesetz für die primären complexen Primzahlen finden können; denn dieses

ist eben so eine Folge von jenem, als jenes eine Folge von diesem ist. Dies ist ihm aber nicht gelungen, obgleich er wirklich (S. 361) den Versuch macht, nach seiner Methode ein Reciprocitätsgesetz von der einfachsten Form $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{A}\right)$ durch passende Bestimmung der Einheiten in complexen Zahlen A und B zu erlangen; denn die Bedingungen, welche er dafür aufstellt, lassen sich, wie leicht zu zeigen, im Allgemeinen nicht erfüllen.

Breslau, den 30ten November 1851.

Berichtigungen.

S. 103 Z. 17 v. u. bis S. 104 Z. 1 v. u. und S. 119 Z. 4 v. u. bis S. 120 Z. 6 v. u. l. ind. st. Ind.

S. 123 Z. 9 v. o. l. D_i st. D^i

11.

Zweiter Nachtrag zu der Theorie der analytischen Facultäten (Bd. 35 und 38).

(Von Herrn Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Breisgau.)

(Schlufs der Abhandlung No. 2 im vorigen Hefte.)

§. 11.

Integrale des Binomiums $(ax+b)^n$.

Wir stellen die Integrale des Binomiums $(ax+b)^n$ hier vorerst ohne Rücksicht auf Constanten in der zur Anwendung brauchbarsten Form zusammen. Sie werden auf dem früher bezeichneten Wege gefunden und sind folgende:

$$(1.)\quad \int^r (ax+b)^n\,(\partial x)^r = \frac{(ax+b)^{n+r}}{(n+r)^{r|-1}\,a^r} = \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r}}{1^{n+r|1}\,a^r},$$

$$(2.)\quad \int^r (ax+b)^{\frac{n}{m}}\,(\partial x)^r = \frac{m^r\,(ax+b)^{\frac{n}{m}+r}}{(n+m)^{r|m}\,a^r},$$

$$(3.)\quad \int^{\frac{p}{q}} (ax+b)^n\,(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{q^{n|q}\,(ax+b)^{n+\frac{p}{q}}}{1^{\frac{p}{q}|1}\,(p+q)^{n|q}\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(4.)\quad \int^{\frac{p}{q}} (ax+b)^{\frac{n}{m}}\,(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,(ax+b)^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(5.)\quad \int^r \frac{(\partial x)^r}{(ax+b)^n} = \frac{(ax+b)^{-n+r}}{(-1)^r\,(n-r)^{r|1}\,a^r} = \frac{1^{n-r-1|1}\,(ax+b)^{-n+r}}{(-1)^r\,1^{n-1|1}\,a^r},$$

$$= \frac{1^{-n|1}\,(ax+b)^{-n+r}}{1^{-n+r|1}\,a^r},$$

$$(6.)\quad \int^r \frac{(\partial x)^r}{(ax+b)^{\frac{n}{m}}} = \frac{m^r\,(ax+b)^{r-\frac{n}{m}}}{(m-n)^{r|m}\,a^r} = \frac{m^r\,(ax+b)^{r+\frac{n}{m}}}{(m-n)\,(2m-n)\,\ldots\,(rm-n)\,a^r},$$

$$(7.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^n} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}\,(q-p)^{n-1|q}}{(-)^{\frac{p}{q}}\,q^{n-1|q}\,a^{\frac{p}{q}}\,(ax+b)^{n-\frac{p}{q}}}$$

$$= \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}\,(q-p)\,(2q-p)\,\ldots\,((n-1)q-p)}{(-1)^{\frac{p}{q}}\,q\,.\,2q\,\ldots\,(n-1)\,q\sqrt[q]{a^p}\,(ax+b)^{n-\frac{p}{q}}},$$

$$(8.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{n}{m}}} = \frac{1^{-\frac{n}{m}|1}(ax+b)^{\frac{p}{q}}}{1^{-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}\sqrt[q]{(ax+b)^{\frac{n}{m}}}}.$$

Besondere Fälle sind:

$$(9.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}}{\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(10.)\quad \int^{\frac{1}{2}} (ax+b)^n (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2^{n|2}(ax+b)^n\sqrt{(ax+b)}}{1^{n+1|2}\sqrt{(a\pi)}},$$

$$(11.)\quad \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{(ax+b)^n} = \frac{1^{n-1|2}\sqrt{(\pi(ax+b))}}{2^{n-1|2}(ax+b)^n\sqrt{(-a)}},$$

$$(12.)\quad \int^{r+s} (ax+b)^n (\partial x)^{r+s} = \frac{(ax+b)^{n+r+s}}{(n+r+s)^{r+s|-1}a^{r+s}} = \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r+s}}{1^{n+r+s|1}a^{r+s}},$$

$$(13.)\quad \int^{r+s} (ax+b)^{\frac{n}{m}} (\partial x)^{r+s} = \frac{m^{r+s}(ax+b)^{r+s+\frac{n}{m}}}{a^{r+s}(n+m)^{r+s|m}},$$

$$(14.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} (ax+b)^n (\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{n|1}q^{n+r}(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{\frac{p}{q}}(p+q)^{n+r|q}a^r\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(15.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} (ax+b)^{\frac{n}{m}} (\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}(ax+b)^{r+\frac{p}{q}+\frac{n}{m}}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}a^r\sqrt[q]{a^p}\left(1+\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)^{r|1}},$$

$$(16.)\quad \int^{r+s} \frac{(\partial x)^{r+s}}{(ax+b)^n} = \frac{(ax+b)^{-n+r+s}}{(-1)^{r+s}(n-r-s)^{r+s|1}a^{r+s}}$$

$$= \frac{1^{n-r-s-1|1}(ax+b)^{-n+r+s}}{(-1)^{r+s}1^{n-1|1}a^{r+s}} = \frac{1^{-n|1}(ax+b)^{-n+r+s}}{1^{-n+r+s|1}a^{r+s}},$$

$$(17.)\quad \int^{r+s} \frac{(\partial x)^{r+s}}{(ax+b)^{\frac{n}{m}}} = \frac{m^{r+s}(ax+b)^{-\frac{n}{m}+r+s}}{(m-n)^{r+s|m}a^{r+s}},$$

$$(18.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^n} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)^{n-r-1|q}}{(-1)^{r+\frac{p}{q}}1^{n-1|1}q^{n-r-1}(ax+b)^{n-r-\frac{p}{q}}a^r\sqrt[q]{a^p}} \text{ für } n>r$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}1^{-\frac{p}{q}|1}q^{r-n+1}(ax+b)^{r-n+\frac{p}{q}}}{(-1)^{\frac{p}{q}}1^{n-1|1}p^{r-n+1|q}a^r\sqrt[q]{a^p}} \text{ für } r>n,$$

$$(19.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{n}{m}}} = \frac{1^{-\frac{n}{m}|1}(ax+b)^{r-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}}{1^{-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}\left(1-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)^{r|1}a^r\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(20.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(ax+b)^r}{1^{r|1}a^r \sqrt[q]{a^p}},$$

$$(21.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1} q^r}{(-1)^r p^{r|q} a^r \sqrt[q]{a^p}},$$

Alle in (§. 9. und 10.) gefundenen Bestimmungen über die Gültigkeit und Darstellbarkeit der dort entwickelten Ausdrücke und über die Ordnung im Integriren finden auch hier ohne Beschränkung Anwendung.

Die Harmonie zwischen den Differentialen (§. 5.) und den Integralen des Binomiums $(ax+b)^n$ zeigt sich auch hier ganz deutlich.

§. 12.

Fortsetzung.

Um die Constanten in die Entwicklung aufzunehmen, ist es am besten, von dem ersten Integrale zu den höhern überzugehen. Das Integral soll dabei immer von 0 bis x genommen werden. Man erhält dann

$$\int (ax+b)^n\,\partial x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C_1 = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} - \frac{b^{n+1}}{(n+1)a},$$

$$\int^2 (ax+b)^n (\partial x)^2 = \int \left(\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C_1\right)\partial x + C_2 = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^2} + C_1 x + C_2$$

$$= \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)^{2|-1}a^2} - \frac{b^{n+1}x}{(n+1)a} - \frac{b^{n+2}}{(n-2)^{2|-1}a^2}.$$

Geht man auf diesem Wege weiter, so ergiebt sich folgende allgemeine Gleichung:

$$(1.)\quad \int^r (ax+b)^n (\partial x)^r = \int^r (ax+b)^n (\partial x)^r + \int^{r-1} C_1 (\partial x)^{r-1}$$
$$+ \int^{r-2} C_2 (\partial x)^{r-2} + \int^{r-3} C_3 (\partial x)^{r-3} + \cdots$$
$$\cdots + \int^2 C_{r-2} (\partial x)^2 + \int C_{r-1}\partial x + \int^0 C_r (\partial x)^0,$$

oder nach (1. §. 9.)

$$(2.)\quad \int^r (ax+b)^n (\partial x)^r = \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r}}{1^{n+r|1}a^r} + \frac{C_1 x^{r-1}}{1^{r-1|1}} + \frac{C_2 x^{r-2}}{1^{r-2|1}} + \frac{C_3 x^{r-3}}{1^{r-3|1}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{C_{r-2}x^2}{1.2} + C_{r-1}x + C_r.$$

Diese Entwicklung, obgleich nur auf eine bestimmte Function angewendet, läfst sich, wie leicht zu sehen, auf jede andere ausdehnen. Daraus ist zu entnehmen, dafs mit einem Integrale von der ersten Ordnung auch r Constanten von der in (1.) verzeichneten Form verbunden sind.

C_1 ist die Constante, welche die erste Integration (Integral der ersten Ordnung), C_2 die, welche die zweite Integration der Function (Integral der zweiten Ordnung) für sich liefert u. s. w. C_k ist daher die Constante des Integrals von der $k$ten Ordnung für sich. Es ist also nicht nöthig, alle Integrale zu durchlaufen, um die Constanten darzustellen, sondern nur das Gesetz anzugeben, wonach sie im einzelnen Falle gebildet werden. Dies geschieht, wenn man das $k$te Integral der gegebenen Function sucht und $x = 0$ setzt. Demnach ist im Allgemeinen:

$$(3.) \quad C_k = \int^k f(x=0)(\partial x)^k,$$

$$(4.) \quad \int^{r-k} C_k (\partial x)^{r-k} = \frac{C_k x^{r-k}}{1^{r-k|1}} = \int^{r-k} \Big[\int^k f(x=0)(\partial x)^k\Big](\partial x)^{r-k}.$$

Für die Gleichung (1. oder 2.) ist

$$(5.) \quad \int^{r-k} C_k(\partial x)^k = \int^{r-k} \Big(\frac{1^{n|1} b^{n+k}}{1^{n+k|1} a^k}\Big)(\partial x)^{r-k} = \frac{1^{n|1} b^{n+k} x^{r-k}}{1^{n+k|1} 1^{r-k|1} a^k},$$

und es ergiebt sich aus (1. oder 2.) folgender entwickelte Ausdruck:

$$(6.) \quad \int^r (ax+b)^n (\partial x)^r = \frac{1}{1.2 \ldots r}\Big[\Big(\frac{r}{n+r}\Big)_r - \frac{(ax+b)^{n+r}}{a^r}$$
$$-\Big(\frac{r}{n+1}\Big)_1 \frac{b^{n+1}x^{r-1}}{a} - \Big(\frac{r}{n+2}\Big)_2 \frac{b^{n+2}x^{r-2}}{a^2} - \ldots - \Big(\frac{r}{n+k}\Big)_k \frac{b^{n+k}x^{r-k}}{a^k} - \ldots$$
$$\ldots - \Big(\frac{r}{n+r-1}\Big)_{r-1} \frac{b^{n+r-1}x}{a^{r-1}} - \Big(\frac{r}{n+r}\Big)_r \frac{b^{n+r}}{a^r}\Big],$$

wenn der Kürze wegen

$$\Big(\frac{r}{n+k}\Big)_k = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)} = \frac{r^{k|-1}}{(n+k)^{k|-1}}$$

gesetzt wird. Diese Erörterungen führen zu dem folgenden Satze:

(7.) ***Ein Integral von der r ten Ordnung hat r Constanten.***

Die Constanten der Integrale, deren Exponenten echte ***Brüche*** sind, werden auf gleiche Weise wie bei den Integralen mit ganzen Exponenten gefunden und man erhält

$$\int^{\frac{p}{q}} (ax+b)^n (\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1} a^{\frac{p}{q}}} + C \text{ und } C = -\frac{1^{n|1} b^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1} \sqrt[q]{a^p}}.$$

Es ist daher

$$(8.) \quad \int^{\frac{p}{q}} (ax+b)^n (\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1} \sqrt[q]{a^p}} - \frac{1^{n|1} b^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1} \sqrt[q]{a^p}}.$$

Das vorliegende Integral hat also ***nur eine*** Constante. Dies rechtfertigt sich einerseits dadurch, dafs nach allen bisherigen Entwickelungen die Entwicklung eines Differentials oder Integrals, dessen Exponent ein echter Bruch ist, als eine in sich abgeschlossene, einheitliche Rechnung zu betrachten ist, welche nicht durch Wiederholung geschehen, oder in mehrere andere Rechnungen zerlegt werden soll; andrerseits aus dem in (7.) angegebenen Gesetze, welches jedenfalls den Schlufs in sich begreift, dafs ein solches Integral höchstens ***eine,*** wenigstens ***nicht mehr als eine*** Constante haben kann. Die Unterdrückung aller und jeder Constanten für (8.) steht aber offenbar mit den Elementen des Integrirens im Widerspruche. Hierdurch dürfte folgender Satz gerechtfertigt werden:

(9.) ***Ein Integral, dessen Exponent ein echter Bruch ist, hat nur eine Constante.***

Da nun ein Integral, dessen Exponent ein echter Bruch ist und in dem Schema (10. §. 2.) in dem Intervall 0 und 1 liegt, nur eine Constante hat, so läfst sich mit dieser Bemerkung auf das Intervall (1 und 2) übergehen und folgern, dafs ein Integral, dessen Exponent in dasselbe fällt, nach (8. und 9.) zwei Constanten hat u. s. w. Diese Schlüsse führen zu folgendem Satze:

(10.) ***Ein Integral, dessen Exponent in das Intervall*** r ***und*** $r+1$ ***fällt, hat*** $r+1$ ***Constanten.***

In den Sätzen (8 bis 10.) ist die ganze Lehre von den ***Constanten*** enthalten; die sich auf eine sehr einfache Weise ergiebt und wie von selbst sich feststellt. ***Liouville*** nennt sie „fonctions complémentaires" und behandelt sie sehr weitläufig (Journ. de l'éc. polyt. T. XIII, p. 94—106).

Wir setzen die Stelle her, in welcher er die Resultate seiner Untersuchung über die Constanten (p. 94) niederlegt.

„Relativement aux différentielles à indices quelconques, j'ai très-long-
„temps regardé la question des fonctions complémentaires comme la plus diffi-
„cile de toutes les questions primordiales qui se présentent dans le nouveau
„calcul. Je crois être pourtant parvenu à la résoudre enfin d'une manière
„fort simple, après avoir découvert la singulière analogie des fonctions algé-
„briques entières et des fonctions exponentielles à exposans infiniments petits,
„telle que je l'ai établie dans le paragraphe précédent. Je rappelle en con-
„séquence que cette analogie consiste en ce que toute fonction exponentielle,
„à exposans infiniments petits, peut-être transformée en une fonctions algé-

„brique entière, et vice versâ. Voici le théorème auquel je suis arrivé: ***La „fonction complémentaire qu'il faut ajouter à la différentielle d'un ordre „quelconque μ, est une fonction algébrique entière d'un nombre limité de „termes dont les coëfficiens sont arbitraires. Cette fonction se réduit à „zéro quand μ est entier positif, et a:***

$$C_0 + C_1 x + C_1 x^2 + \cdots + C_{n-1} x^{n-1}$$

„quand μ est un nombre entier négatif $-n$. Mais en général, le nombre „des termes qu'elle renferme est indéterminé, quoiqu'il ne puisse pas être „infini. Le sens précis qu'il faut attacher au théorème énoncé, sera nettement „fixé par la démonstration que je vais en donner en exposant la suite des „idées qui me l'ont fait connaître."

Man wird in der That überrascht, ihn von schwierigen Fragen bei einer so einfachen Sache reden zu hören. Dergleichen ist allerdings möglich, wenn man künstliche und verwickelte Wege statt einfacher und elementarer betritt. Bei allen seinen Erörterungen entwickelt ***Liouville*** nur den Satz (8.), und diesen nicht concis. Die beiden andern, von gebrochenen Exponenten, (9 und 10) hat er übersehen. Die Behauptung, dafs ein ***Differential keine Constante*** habe, versteht sich von selbst. Aus gleichem Grunde kennt er auch den Satz (29. §. 4.) nicht, worauf der Calcul führt und der als ein Analogon der hier gegebenen zu betrachten ist.

Wir nehmen jetzt unsere Untersuchung wieder auf.

Nach den in (3 bis 5.) entwickelten Gesetzen lassen sich die Constanten für jede besondere Form des Binomiums $(ax+b)^n$ finden. Für $(ax+b)^{\frac{n}{m}}$, $(ax+b)^{-n}$ u. s. w. sind sie

$$(11.)\quad \int^{r-k} C_k (\partial x)^{r-k} = \frac{b^{\frac{n}{m}+k} x^{r-k}}{\left(\frac{n}{m}+k\right)^{k|-1} 1^{r-k|1} a^k}$$

$$= \frac{1}{1^{r|1}} \left(\frac{r}{\frac{n}{m}+k} \right)_k \frac{b^{\frac{n}{m}+k} x^{r-k}}{a^k},$$

$$(12.)\quad \int^{r-k} C_k (\partial x)^{r-k} = \frac{b^{-n+k} x^{r-k}}{(-n+k)^{k|-1} 1^{r-k|1} a^k} = \frac{1}{1^{r|1}} \left(\frac{r}{-n+k} \right)_k \frac{b^{-n+k} x^{r-k}}{a^k}$$

u. s. w.; woraus sich die besondern Formen für (1. und 2.) leicht ergeben.

Es ist noch zu untersuchen, welchen Einflufs die verschiedene Ordnung der Ausführung des Integrirens auf die Resultate hat. Aus (1.) folgt unmittelbar

$$(13.)\quad \int^{r+s}(ax+b)^n(\partial x)^{r+s}$$
$$=\int^{r+s}(ax+b)^n(\partial x)^{r+s}+\int^{r+s-1}C_1(\partial x)^{r+s-1}+\int^{r+s-2}C_2(\partial x)^{r+s-2}+\cdots$$
$$\cdots+\int^{r+s-k}C_k(\partial x)^{r+s-k}+\cdots+\int C_{r+s-1}\partial x+C_{r+s}.$$

Hier gilt die Bedingung, dafs k nicht gröfser als $r+s$ sein darf. Wäre es gröfser, so entständen Integrale mit negativen Exponenten; d. h. sie gingen in Differentiale über, und dies widerspräche der Aufgabe.

Zur Bestimmung der Constanten in (13.) dient

$$(14.)\quad \int^{r+s-k}C_k(\partial x)^{r+s-k}$$
$$=\int^{r+s-k}\Big[\int^k f(x=0)(\partial x)^k\Big](\partial x)^{r+s-k}=\frac{1^{n|1}b^{n+k}x^{r+s-k}}{1^{n+k|1}1^{r+s-k|1}a^k}.$$

Integrirt man $(ax+b)^n$ zuerst nach r und dann nach s, so erhält man (13.). Integrirt man zuerst nach s und dann nach r, so ergiebt sich

$$(15.)\quad \int^{s+r}(ax+b)^n(\partial x)^{s+r}$$
$$=\int^{s+r}(ax+b)^n(\partial x)^{s+r}+\int^{s+r-1}C_1(\partial x)^{s+r-1}+\int^{s+r-2}C_2(\partial x)^{s+r-2}+\cdots$$
$$\cdots+\int^{s+r-k}C_k(\partial x)^{s+r-k}+\cdots+\int C_{s+r-1}\partial x+C_{s+r},$$

und man sieht die Identität von (13. und 15.). Die Gleichung (14.) bleibt in Kraft und man hat in Rücksicht auf die Constanten:

$$(16.)\quad \int^{r+s}(ax+b)^n(\partial x)^{r+s}=\int^{s+r}(ax+b)^n(\partial x)^{s+r};$$

d. h. die Ordnung im Integriren ist bei ganzem r und s gleichgültig und es findet sich bei verschiedener Ordnung das gleiche Resultat. Dieser Satz behält seine Gültigkeit für jedes beliebige n, unter den für letzteres bekannten Restrictionen. Anders wird sich der Fall gestalten, wenn s ein ***echter Bruch*** ist.

Hält man sich zuerst an die Formeln (13. und 14.), betrachtet $r+\frac{p}{q}$ als zusammengehörig und setzt allmälig $1, 2, 3, \ldots r, r+\frac{p}{q}$, so ergiebt sich

$$(17.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$
$$=1^{n|1}\left[\frac{(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^{r+\frac{p}{q}}}-\frac{b^{n+1}x^{r-1}\sqrt[q]{x^p}}{1^{n+1|1}1^{r+\frac{p}{q}-1|1}a}-\frac{b^{n+2}x^{r-2}\sqrt[q]{x^p}}{1^{n+2|1}1^{r+\frac{p}{q}-2|1}a^2}-\cdots\right.$$
$$\left.\cdots-\frac{b^{n+k}x^{r-k}\sqrt[q]{x^p}}{1^{n+k|1}1^{r+\frac{p}{q}-k|1}a^k}-\cdots-\frac{b^{n+r}\sqrt[q]{x^p}}{1^{n+r|1}1^{\frac{p}{q}|1}a^r}-\frac{b^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^r\sqrt[q]{a^p}}\right].$$

Setzt man aber allmälig die Werthe $\frac{p}{q}$, $1+\frac{p}{q}$, ... $r+\frac{p}{q}$ statt k, so wird:

$$(18.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= 1^{n|1}\left[\frac{(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^{r+\frac{p}{q}}} - \frac{b^{n+\frac{p}{q}}x^r}{1^{n+\frac{p}{q}|1}1^{r|1}\sqrt[q]{a^p}} - \frac{b^{n+r+\frac{p}{q}}x^{r-1}}{1^{n+\frac{p}{q}+1|1}1^{r-1|1}a\sqrt[q]{a^p}} - \cdots\right.$$

$$\left. \cdots - \frac{b^{n+k+\frac{p}{q}}x^{r-k}}{1^{n+\frac{p}{q}+k|1}1^{r-k|1}a^k\sqrt[q]{a^p}} - \cdots - \frac{b^{n+r+\frac{p}{q}}x}{1^{n+\frac{p}{q}+r-1|1}a^{r-1}\sqrt[q]{a^p}} - \frac{b^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}+r|1}a^{r+\frac{p}{q}}}\right].$$

Die Verschiedenheit von (17. und 18.) liegt deutlich vor. Sie ist durch die verschiedene Ordnung im Integriren bedingt.

Man kann auch zu $\int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$ gelangen, wenn man zuerst nach r und dann nach $\frac{p}{q}$ integrirt. Dies giebt

$$\int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = 1^{n|1}\int^{\frac{p}{q}}\left[\frac{(ax+b)^{n+r}}{1^{n+r|1}a^r} - \frac{b^{n+1}x^{r-1}}{1^{n+1|1}1^{r-1|1}} - \frac{b^{n+2}x^{r-2}}{1^{n+2|1}1^{r-2|1}a^2} - \cdots\right.$$

$$\left. \cdots - \frac{b^{n+k}x^{r-k}}{1^{n+k|1}1^{r-k|1}a^k} - \cdots - \frac{b^{n+r-1}x}{1^{n+r-1|1}a^{r-1}} - \frac{b^{n+r}}{1^{n+r|1}a^r}\right](\partial x)^{\frac{p}{q}}.$$

Wird nach $\frac{p}{q}$ integrirt und die Constante für

$$\int^{\frac{p}{q}}\frac{(ax+b)^{n+r}}{1^{n+r|1}a^r}(\partial x)^{\frac{p}{q}}$$

zugezählt, so ist

$$(19.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= 1^{n|1}\left[\frac{(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^{r+\frac{p}{q}}} - \frac{b^{n+1}x^{r-1+\frac{p}{q}}}{1^{n+1|1}1^{r-1+\frac{p}{q}|1}a} - \frac{b^{n+2}x^{r-2+\frac{p}{q}}}{1^{n+2|1}1^{r-2+\frac{p}{q}|1}a^2} - \cdots\right.$$

$$\cdots - \frac{b^{n+k}x^{r-k+\frac{p}{q}}}{1^{n+k|1}1^{r-k+\frac{p}{q}|1}a^k} - \cdots - \frac{b^{n+r-1}x^{1+\frac{p}{q}}}{1^{n+r-1|1}1^{1+\frac{p}{q}|1}a^{r-1}}$$

$$\left. - \frac{b^{n+r}x^{\frac{p}{q}}}{1^{n+r|1}1^{\frac{p}{q}|1}a^r} - \frac{b^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^{r+\frac{p}{q}}}\right].$$

Eben so läfst sich $(ax+b)^n$ zuerst nach $\frac{p}{q}$ und dann nach r integriren.

Dies giebt

$$\int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \int^r\Big(\int^{\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{\frac{p}{q}}\Big)\partial x^r$$

$$= \int^r\left(\frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1}a^{\frac{p}{q}}} - \frac{1^{n|1}b^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1}a^{\frac{p}{q}}}\right)(\partial x)^r.$$

Wird nun für die eingeklammerten Ausdrücke allmälig das $r$te Integral durch wiederholtes Integriren entwickelt, so erhält man

$$(20.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^{r+\frac{p}{q}}} + \int^r C_{\frac{p}{q}}(\partial x)^r + \int^{r-1} C_{1+\frac{p}{q}}(\partial x)^{r-1} + \cdots$$

$$+ \int^{r-k} C_{k+\frac{p}{q}}(\partial x)^{r-k} + \cdots + \int C_{r-1+\frac{p}{q}}\partial x + C_{r+\frac{p}{q}}$$

$$= 1^{n|1}\left[\frac{(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^{r+\frac{p}{q}}} - \frac{b^{n+\frac{p}{q}}x^r}{1^{n+\frac{p}{q}|1}1^{r|1}\sqrt[q]{a^p}} - \frac{b^{n+r+\frac{p}{q}}x^{r-1}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}1^{r-1|1}a\sqrt[q]{a^p}} - \cdots\right.$$

$$\left. \cdots - \frac{b^{n+k+\frac{p}{q}}x^{r-k}}{1^{n+k+\frac{p}{q}|1}1^{r-k|1}a^k\sqrt[q]{a^p}} - \cdots - \frac{b^{n+\frac{p}{q}+r-1}x}{1^{n+\frac{p}{q}+r-1|1}a^{r-1}\sqrt[q]{a^p}} - \frac{b^{n+r}\sqrt[q]{b^p}}{1^{n+\frac{p}{q}+r|1}a^r\sqrt[q]{a^p}}\right].$$

Auch dieser Ausdruck ist von (19.) verschieden. Dagegen stimmen (19. und 17.) und (20. und 18.) überein.

Aufser den genannten Entwicklungsarten lassen sich auch folgende benutzen:

$$(21.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{\partial^{1-\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{1-\frac{p}{q}}}\Big(\int^{r+1}(ax+b)^n(\partial x)^{r-1}\Big)$$

$$= \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^r\sqrt[q]{a^p}} + \frac{C_1x^{r-1+\frac{p}{q}}}{1^{r-1+\frac{p}{q}|1}} + \frac{C_2x^{r-2+\frac{p}{q}}}{1^{r-2+\frac{p}{q}|1}} + \cdots + \frac{C_rx^{\frac{p}{q}}}{1^{\frac{p}{q}|1}} + C_{r+\frac{p}{q}},$$

$$(22.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^{r+\frac{p}{q}} = \int^{r+1}\left(\frac{\partial^{1-\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{1-\frac{p}{q}}}(ax+b)^n\right)(\partial x)^{r+1}$$

$$= \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^r\sqrt[q]{a^q}} + \frac{C_1x^r}{1^{r|1}} + \frac{C_2x^{r-1}}{1^{r-1|1}} + \cdots + \frac{C_{r-1}x^2}{1.2} + C_rx + C_{r+\frac{p}{q}}.$$

Auch diese Ausdrücke fallen mit (17 bis 20.) zusammen und man sieht die oben ausgesprochene Behauptung auf drei unter sich verschiedenen Wegen bestätigt. Die in (17 bis 22.) gegebenen Entwicklungen gelten nicht blofs für ein ganzes positives, sondern für jedes beliebige n. Dies giebt den Satz:

(23.) Die verschiedene Ordnung bei Darstellung des $\left(r+\frac{p}{q}\right)$ten Integrals von $(ax+b)^n$ ist nicht gleichgültig und man wird durch

$$\int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} \quad \text{und} \quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{\frac{p}{q}+r}$$

auf verschiedene Formen bei Berücksichtigung der Constanten geführt. Bei der Darstellung ***bestimmter*** Integrale darf man das Gesagte nicht übersehen. Specielle Fälle lassen sich leicht entwickeln. Es ist z. B.

$$(24.)\quad \int^{\frac{1}{2}}(ax+b)^n(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\,.\,2^{n|2}}{1^{n+1|2}\sqrt{(a\pi)}}\left((ax+b)^n\sqrt{(ax+b)}-b^n\sqrt{b}\right)$$

u. s. w.

§. 13.

Integrale der Logarithmen.

Auf die in (§. 9.) angegebene Weise erhält man:

$$(1.)\quad \int^{r}\frac{(\partial x)^r}{x^r} = \frac{\log x}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}}.$$

r unterliegt hier keiner Beschränkung. Man hat daher für ein gebrochenes r:

$$(2.)\quad \int^{\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{\log x}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}1^{\frac{p}{q}-1|1}} = \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}p\log x}{q1^{\frac{p}{q}|1}} = \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}\log x^{\frac{p}{q}}}{1^{\frac{p}{q}|1}}.$$

Ferner hat man für jedes ganze und gebrochene r folgende Formen:

$$(3.)\quad \int^{r}\frac{(\partial x)^r}{x^r} = \frac{\log x^n}{(-1)^{r-1}n1^{r-1|1}} = \frac{\log x^r}{(-1)^{r-1}1^{r|1}} = \frac{\log\frac{1}{x}}{(-1)^r1^{r-1|1}} = \frac{\log\frac{1}{x^r}}{(-1)^r1^{r|1}}$$
$$= \frac{\log ax}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}} = \frac{\log(ax)^r}{(-1)^{r-1}1^{r|1}}.$$

Eben so ist

$$(4.)\,.\quad \int^{r}\frac{(\partial x)^r}{(ax+b)^r} = \frac{\log(ax+b)}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}a^r} = \frac{\log(ax+b)^n}{(-1)^{r-1}n1^{r-1|1}a^r} = \frac{\log\frac{1}{ax+b}}{(-1)^r1^{r-1|1}a^r},$$

$$(5.)\quad \int^{\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\log(ax+b)}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}1^{\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\log(ax+b)^n}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}n1^{\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\log\frac{1}{ax+b}}{(-1)^{\frac{p}{q}}1^{\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(6.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{x^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{q^r \log x}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q}} = \frac{q^r \log x^{r+\frac{p}{q}}}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1} 1^{\frac{p}{q}|1} (p+q)^{r|q}}$$

$$= \frac{\log \frac{1}{x} \cdot q^r}{(-1)^{r+\frac{p}{q}} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q}},$$

$$(7.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{q^r \log (ax+b)}{(-1)^{r-1+\frac{p}{q}} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} a^r \sqrt[q]{a^p}}$$

$$= \frac{q^r \log (ax+b)^{r+\frac{p}{q}}}{(-1)^{r-1+\frac{p}{q}} 1^{\frac{p}{q}|1} (p+q)^{r|q} a^r \sqrt[q]{a^p}} = \frac{q^r \log \frac{1}{ax+b}}{(-1)^{r+\frac{p}{q}} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} a^r \sqrt[q]{a^p}}.$$

Sodann ergiebt sich aus (1. und 4.)

$$(8.)\quad \int^{r+s} \frac{(\partial x)^{r+s}}{x^r} = \int^s \frac{\log x (\partial x)^s}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1}},$$

$$(9.)\quad \int^{r+s} \frac{(\partial x)^{r+s}}{(ax+b)^r} = \int^s \frac{\log (ax+b) (\partial x)^s}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} a^r},$$

$$(10.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{t+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \int^r \frac{\log x (\partial x)^r}{(-1)^{\frac{p}{q}-1} 1^{\frac{p}{q}-1|1}},$$

$$(11.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \int^r \frac{\log (ax+b) (\partial x)^r}{(-1)^{\frac{p}{q}-1} 1^{\frac{p}{q}-1|1} \sqrt[q]{a^p}}.$$

Diese Gleichungen weisen auf die höhern Integrale von $\log x$ und $\log (ax+b)$ hin.

Stellt man den hier gefundenen Resultaten alle schon in den frühern Paragraphen erhaltenen zur Seite, so ergiebt sich

$$(12.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = 1^{-\frac{p}{q}|1} \text{ (10. §. 9.)},$$

$$(13.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1} x^r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} \text{ (14. §. 10.)},$$

$$(14.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{x^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1} q^r}{(-1)^r p^{r|q}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1} q^r}{(-1)^r p (p+q) \ldots (p+(r-1)q)} \text{ (15. §.10.)},$$

$$(15.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}}{\sqrt[q]{a^p}} \quad (9.\ §.\ 11.),$$

$$(16.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(ax+b)^r}{1^{r|1}a^r\sqrt[q]{a^p}} \quad (20.\ §.\ 11.),$$

$$(17.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}q^r}{(-1)^r p^{r|q} a^r \sqrt[q]{a^p}}$$

$$= \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}q^r}{(-1)^r p(p+q)\dots(p+(r-1)q)a^r\sqrt[q]{a^p}} \quad (21.\ §.11.).$$

Man sieht leicht, dafs die hier gegebenen Integrale zwei verschiedene Werthe haben. Bei ***Liouville*** findet man sie nirgend erwähnt.

In allen diesen Darstellungen sind die Constanten aufser Acht gelassen. Sie folgen den in (§. 12.) aufgestellten Gesetzen.

§. 14.

Höhere Integrale von $\log x$ und $\log(ax+b)$.

Die höhern Integrale von $\log x$ ergeben sich auf folgende Weise:

$$\int \log x\ \partial x = x\log x - x,$$

$$\int^2 \log x(\partial x)^2 = \frac{x^2\log x}{1.2} - \frac{3x^2}{1.2.1.2},$$

$$\int^3 \log x(\partial x)^3 = \frac{x^3\log x}{1.2.3} - \frac{11x^3}{1.2.3.1.2.3},$$

$$\int^4 \log x(\partial x)^4 = \frac{x^4\log x}{1.2.3.4} - \frac{50x^4}{1.2.3.4.1.2.3.4},$$

u. s. w., wie sich Dies leicht durch Differentiation zeigt. Dies führt auf die allgemeine Form

$$(1.)\quad \int^r \log x(\partial x)^r = \frac{x^r\log x}{1^{r|1}} - \frac{A_r x^r}{1^{r|1}1^{r|1}}.$$

Die Darstellung dieses Integrals beruht auf der Angabe des Zahlen-Ausdrucks A_r. Die nähere Untersuchung zeigt, dafs derselbe auf folgende Weise zusammengesetzt ist:

$$A_1 = 1,$$

$$\frac{A_2}{1.2.1.2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} + \frac{A_1}{1}\right) = \frac{1+2}{1.2.1.2} = \frac{C(1,2)^1}{1.2.1.2},$$

$$\frac{A_3}{1.2.3.1.2.3} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{A_2}{1.2.1.2}\right) = \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.2+3A_2}{1.2.3.1.2}\right) = \tfrac{1}{3}\frac{1.2+1.3+2.3}{1.2.3.1.2}$$
$$= \frac{C(1,\,2,\,3)^2}{1.2.3.1.2.3},$$

$$\frac{A_4}{1.2.3.4.1.2.3.4} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{A_3}{1.1.3.1.2.3}\right) = \tfrac{1}{4}\frac{1.2.3+4A_3}{1.2.3.4.1.2.3}$$
$$= \frac{1.2.3+1.2.4+1.3.4+2.3.4}{1.2.3.4.1.2.3.4} = \frac{C(1,\,2,\,3,\,4)^3}{1.2.3.4.1.2.3.4},$$

$$\frac{A_5}{1.2\ldots5.1.2\ldots5} = \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{A_4}{1.2.3.4.1.2.3.4}\right) = \tfrac{1}{5}\frac{1.2.3.4+5.A_4}{1.2\ldots5.1.2.3.4}$$
$$= \frac{1.2.3.4+5.C(1,\,2,\,3,\,4)^3}{1.2\ldots5.1.2\ldots5} = \frac{C(1,\,2,\,3,\,4,\,5)^4}{1.2\ldots5.1.2\ldots5}.$$

Das Fortgangsgesetz liegt deutlich vor Augen und hat folgende Form:

$$(2.)\quad \frac{A_r}{1^{r|1}1^{r|1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{1.2\ldots r} + \frac{A_{r-1}}{1.2\ldots(r-1)1.2\ldots(r-1)}\right) = \frac{1.2.3\ldots(r-1)+rA_{r-1}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r}$$
$$= \frac{1.2\ldots(r-1)+rC(1,\,2,\,\ldots\,r-1)^{r-2}}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots r}.$$

Nach der Combinationslehre ist

$$(3.)\quad 1.2.3\ldots(r-1)+rC(1,\,2,\,\ldots\,r-1)^{r-2} = C(1,\,2,\,3,\,\ldots\,r)^{r-1},$$

denn es ist

$$C(a_1,\,a_2,\,\ldots\,a_r)^{r-1} = a_1a_2\ldots a_{r-1} \qquad = a_1a_2\ldots a_{r-1}$$
$$a_1a_2\ldots a_{r-2}a_r \qquad a_r\,|\,a_1a_2\ldots a_{r-2}$$
$$a_1a_2\ldots a_{r-3}a_{r-1}a_r \qquad\quad |\,a_1a_2\ldots a_{r-3}a_{r-1}$$
$$a_1a_2\ldots a_{r-4}a_{r-2}a_{r-1}a_r \qquad\quad |\,a_1a_2\ldots a_{r-4}a_{r-2}a_{r-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\quad |\,\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1a_2a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1}a_r \qquad\quad |\,a_1a_2a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1}$$
$$a_1a_3a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1}a_r \qquad\quad |\,a_1a_3a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1}$$
$$a_2a_3a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1}a_r \qquad\quad |\,a_2a_3a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1}$$
$$= a_1a_2a_3\ldots a_{r-1} + a_rC(a_1,\,a_2,\,a_3,\,\ldots\,a_{r-1})^{r-2}.$$

Man erhält daher für das $r$te Integral von $\log x$:

$$(4.)\quad \int^r \log x\,(\partial x)^r = \frac{x^r\log x}{1^{r|1}} - \frac{C(1,\,2,\,3,\,\ldots\,r)^{r-1}x^r}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots r}.$$

Hier bedeutet $C(1,\,2,\,3,\ldots\,r)^{r-1}$ den Summen-Ausdruck für die Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Elementen $1,\,2,\,3,\ldots\,r$ in der $r$ten Classe. Er findet sich wie folgt. Es ist

$$C(1, 2, 3, \dots r)^{r-1} = 1.2.3 \dots r\left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3} \dots \frac{1}{r}\right)$$

und ferner, nach (S. 260, No. 556) meiner Lehre von den aufsteigenden Functionen:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots\frac{1}{r} = \log r+\frac{1}{2r}-\frac{1}{12r^2}+\frac{1}{120r^4}-\frac{1}{252r^6}\cdots+C,$$

wenn $C = 0{,}5572156\ldots$ ist. Hierdurch erhält man

$$(5.)\quad \int^r \log x(\partial x)^r = \frac{x^r \log x}{1^{r|1}}-\frac{x^r}{1^{r|1}}\left(\log r+\frac{1}{2r}-\frac{1}{12r^2}+\frac{1}{120r^4}-\cdots+C\right)$$

$$= \frac{x^r}{1.2.3\ldots r}\cdot\log\frac{x}{r}-\frac{x^r}{1.2.3\ldots r}\left(\frac{1}{2r}-\frac{1}{12r^2}+\frac{1}{120r^4}-\cdots+C\right).$$

Für nicht sehr grofse r sind die Zahlen-Ausdrücke von $C(1, 2, 3, \ldots r)^{r-1}$ am zweckmäfsigsten. Sie sind

$$(6.)\quad A_1=1,\ A_2=3,\ A_3=11,\ A_4=50,\ A_5=274,\ A_6=1764.$$

Die höhern Integrale von $\log(ax+b)$ ergeben sich nun leicht. Man erhält, ***ohne Rücksicht*** auf die Constanten:

$$(7.)\quad \begin{cases} \int \log(ax+b)\ \partial x = \dfrac{ax+b}{a}\log(ax+b)-\dfrac{ax+b}{a}, \\ \int^2 \log(ax+b)(\partial x)^2 = \dfrac{(ax+b)^2}{1.2.a^2}\log(ax+b)-\dfrac{3(ax+b)^2}{1.2.1.2.a^2}, \\ \int^3 \log(ax+b)(\partial x)^3 = \dfrac{(ax+b)^3}{1.2.3.a^3}\log(ax+b)-\dfrac{11(ax+b)^3}{1.2.3.1.2.3a^3}, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int^r \log(ax+b)(\partial x)^r = \dfrac{(ax+b)^r}{1^{r|1}a^r}\log(ax+b)-\dfrac{C(1, 2, \ldots r)^{r-1}(ax+b)^r}{1.2\ldots r.1.2\ldots r\,a^r}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Constanten ist nach (§. 12.)

$$(8.)\quad \int^r \log(ax+b)(\partial x)^r = \frac{(ax+b)^r\log(ax+b}{1^{r|1}a^r}-\frac{C(1, 2, 3\ldots r)^{r-1}(ax+b)^r}{1^{r|1}1^{r|1}a^r}$$

$$+\frac{C_1 x^{r-1}}{1^{r-1|1}}+\frac{C_2 x^{r-2}}{1^{r-2|1}}+\frac{C_3 x^{r-3}}{1^{r-3|1}}+\cdots+C_{r-1}x+C_r.$$

Hier ist

$$(9.)\quad C_{r-k} = -\frac{b^{r-k}}{1^{r-k|1}a^{r-k}}\left(\log b-\frac{C(1, 2, 3, \ldots r-k)^{r-k-1}}{1^{r-k|1}}\right).$$

Benutzt man die hier gefundenen Werthe, so ergeben sich aus (10. und 12. §. 13.) folgende Ausdrücke:

$$(10.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{p}{q}} \dfrac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \dfrac{\log x}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}\,1^{\frac{p}{q}-1|1}} = \dfrac{1}{M}\log x, \\ \int^{1+\frac{p}{q}} \dfrac{(\partial x)^{1+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \dfrac{1}{M}(x\log x - x), \\ \int^{2+\frac{p}{q}} \dfrac{(\partial x)^{2+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \dfrac{x^3}{1.2\,M}\left(\log x - \dfrac{3}{1.2}\right), \\ \int^{3+\frac{p}{q}} \dfrac{(\partial x)^{3+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \dfrac{x^3}{1.2.3\,M}\left(\log x - \dfrac{11}{1.2.3}\right), \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int^{r+\frac{p}{q}} \dfrac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \dfrac{x^r}{1^{r|1}M}\left(\log x - \dfrac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}}{1.2.3\ldots r}\right), \end{cases}$$

$$(11.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{p}{q}} \dfrac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \dfrac{\log(ax+b)}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}\,1^{\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}} = \dfrac{1}{N}\log(ax+b) + C_1, \\ \int^{1+\frac{p}{q}} \dfrac{(\partial x)^{1+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \dfrac{ax+b}{N.a}(\log(ax+b)-1) + C_1 x + C_2, \\ \int^{2+\frac{p}{q}} \dfrac{(\partial x)^{2+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \dfrac{(ax+b)^2}{1.2.N.a^2}\left(\log(ax+b) - \dfrac{3}{1.2}\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{C_1 x^2}{1.2} + C_2 x + C_3, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int^{r+\frac{p}{q}} \dfrac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \dfrac{(ax+b)^r}{1^{r|1}Na^r}\left(\log(ax+b) - \dfrac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}}{1.2.3\ldots r}\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{C_1 x^r}{1^{r|1}} + \dfrac{C_2 x^{r-1}}{1^{r-1|1}} + \dfrac{C_3 x^{r-2}}{1^{r-2|1}} + \ldots. \end{cases}$$

Die Constanten finden sich aus (9.) und nehmen noch den Factor $\frac{1}{N}$ in sich auf. Geht man auf specielle Fälle zurück, so erhält man:

$$(12.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-1}\log x}{\sqrt{\pi}}, \\ \int^{\frac{3}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-1}.x}{\sqrt{\pi}}(\log x - 1), \\ \int^{\frac{5}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-1}.x^2}{1.2\sqrt{\pi}}\left(\log x - \frac{3}{1.2}\right), \\ \int^{\frac{7}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-1}.x^3}{1.2.3\sqrt{\pi}}\left(\log x - \frac{11}{1.2.3}\right), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

$$(13.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{(\pi a)}}\log(ax+b) - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{(\pi a)}}\log b, \\ \int^{\frac{3}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{(ax+b)\sqrt{-1}}{a.\sqrt{(\pi a)}}(\log(ax+b)-1) \\ \qquad\qquad - \frac{x\sqrt{-1})\log b}{\sqrt{(\pi a)}} - \frac{b\sqrt{-1}}{a\sqrt{(\pi a)}}(\log b - 1), \\ \int^{\frac{5}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{(ax+b)^2\sqrt{-1}}{1.2.a^2\sqrt{(\pi a)}}(\log(ax+b) - \tfrac{3}{2}) - \frac{C_1 x^2}{1.2} - C_2 x - C_3, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

Den in (12.) gegebenen Ausdrücken stehen aus (13. §. 13.) folgende

$$(14.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}, \\ \int^{\frac{3}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = x\sqrt{\pi}, \\ \int^{\frac{5}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{x^2\sqrt{\pi}}{1.2}, \\ \int^{\frac{7}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{x^3\sqrt{\pi}}{1.2.3}, \end{cases}$$

und den in (13.) gegebenen aus (16. §. 13.) folgende

$$(15.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}, \\ \int^{\frac{3}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{(ax+b)\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}} + C_1, \\ \int^{\frac{5}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{(ax+b)^2\sqrt{\pi}}{1.2.3.a^2\sqrt{a}} + C_1 x + C_2, \\ \int^{\frac{7}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{(ax+b)^3\sqrt{\pi}}{1.2.3.a^3\sqrt{a}} + \frac{C_1 x^2}{1.2} + C_2 x + C_3, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

zur Seite.

Von den in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen gegebenen Darstellungen hat ***Liouville*** die zwei ersten Integrale von (No. 12. im Journ. de l'éc. polyt. T. XIII, p. 161 et 162) entwickelt. Das allgemeine Gesetz, welches hier vorgelegt ist, fand er aber nicht. Eben so wenig kennt er die zweite Art von Ausdrücken für die nämlichen Integrale, die in (No. 14. und 15.) zusammengestellt sind; denn er sagt nur, dafs die Integrale der vorstehenden Art auf Logarithmen führen.

Dafs die obigen Schlüsse richtig sind, soll nun auch noch durch Anwendung der in (20. und 21. §. 2.) angegebenen Verfahren nachgewiesen werden. Es ist

$$(16.)\quad \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = \int\left(\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \int\left(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{x}\right)\partial x \,(11.\ §.\ 3.)$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\log x.$$

Ferner ist

$$(17.)\quad \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\int\left(\frac{\partial x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}} 2\sqrt{x} = 2.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\,(6.\ §.\ 3.).$$

(No. 16. und 17.) sind die in (12. und 4.) auf anderem Wege gefundenen Werthe. Aus den in diesem und in (§. 13 und §. 6.) gefundenen Resultaten geht hervor, dafs man bei Logarithmen nicht direct von den Differentialen auf die Integrale, und umgekehrt, übergehen kann. Hier gilt also der Satz

$$\int^r = \partial^{-r}$$

nicht.

§. 15.

Integrale von a^x, $\sin x$ und $\cos x$.

Folgende Ausdrücke finden sich leicht aus (§. 7. und 8.):

$$(1.)\quad \int^r a^x\,(\partial x)^r = \frac{a^x}{(\log a)^r}, \qquad (4.)\quad \int^r e^{bx}\,(\partial x)^r = \frac{e^{bx}}{b^r},$$

$$(2.)\quad \int^r e^x\,(\partial x)^r = e^x, \qquad (5.)\quad \int^r a^{-x}\,(\partial x)^r = \frac{a^{-x}}{(-1)^r(\log a)^r},$$

$$(3.)\quad \int^r a^{bx}(\partial x)^r = \frac{a^{bx}}{b^r(\log a)^r}, \qquad (6.)\quad \int^r a^{-bx}(\partial x)^r = \frac{a^{-bx}}{(-1)\,b^r(\log a)^r},$$

$$(7.)\quad \int^{r+s} a^{bx}(\partial x)^{r+s} = \frac{a^{bx}}{b^{r+s}(\log a)^{r+s}},$$

$$(8.)\quad \int^r \sin mx\,(\partial x)^r = \frac{\sin(mx - r.\frac{1}{2}\pi)}{m^r},$$

$$(9.)\quad \int^r \cos mx\,(\partial x)^r = \frac{\cos(mx - r.\frac{1}{2}\pi)}{m^r},$$

$$(10.)\quad \int^{r+s} \sin mx\,(\partial x)^{r+s} = \frac{\sin\left(mx-(r+s)\frac{1}{2}\pi\right)}{m^{r+s}},$$

$$(11.)\quad \int^{r+s} \cos mx\,(\partial x)^{r+s} = \frac{\cos\left(mx-(r+s)\frac{1}{2}\pi\right)}{m^{r+s}}.$$

Die Gleichungen gelten für ganze und gebrochene r und s, und ohne Rücksicht auf Constanten, welche sich leicht finden lassen. Der Zusammenhang zwischen den Differentialen und Integralen dieser Functionen liegt deutlich vor.

Anwendungen.

§. 16.

Ohne Schwierigkeit lassen sich nun auch die Differentiale und Integrale höherer Ordnungen und mit *gebrochenen* Exponenten von *gebrochenen Functionen* geben, die sich in Partialbrüche zerlegen lassen. Wie letzteres geschehen kann, ist im 9ten, 10ten und 22ten Bande dieses Journals nachzusehen.

Soll beispielsweise

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\,\frac{fx}{(x+b)^p x^n}$$

ausgedrückt werden, so erhält man, nach erfolgter Zerlegung der vorstehenden Function in Partialbrüche:

$$(1.)\quad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\,\frac{fx}{(x+b)^p x^n} = \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\Big(\frac{B_1}{(x+b)^p} + \frac{B_2}{(x+b)^{p-1}} + \frac{B_3}{(x+b)^{p-2}} + \cdots + \frac{B_p}{x+b} + \frac{A_1}{x^n} + \frac{A_2}{x^{n-1}} + \frac{A_3}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{x}\Big).$$

Das Gleiche gilt für die Integration, und es sind nur die bisher entwickelten Gesetze anzuwenden. Danach wird

$$(2.)\quad \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\Big(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\Big)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{-\pi}\Big(-\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{((x+1)^3)}} + \frac{1}{\sqrt{((x-1)^3)}}\Big).$$

$$(3.)\quad \int^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{x^3-x}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \int^{\frac{1}{2}}\Big(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\Big)(\partial x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{(x+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)}}\Big).$$

Eben so ist

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{x}{x^2+a^2} = \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{x+a\sqrt{-1}}+\frac{1}{x-a\sqrt{-1}}\Big)$$

$$= \frac{(-1)^r\,.\,1^{r|1}}{2}\Big(\frac{1}{(x+a\sqrt{-1})^{r+1}}+\frac{1}{(x-a\sqrt{-1})^{r+1}}\Big)$$

$$= \frac{(-1)^r\,.\,1^{r|1}}{2}\,\frac{(x+a\sqrt{-1})^{r+1}+(x-a\sqrt{-1})^{r+1}}{(x^2+a^2)^{r+1}}.$$

Hieraus folgt durch Entwicklung der Binomien

$$(4.)\qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{x}{x^2+a^2} = \frac{(-1)^r 1^{r|1}}{(x^2+a^2)^{r+1}}\big(x^{r+1}-(r+1)_2 x^{r-1}a^2+(r+1)_4 x^{r-3}a^4\cdots\big).$$

Setzt man

$$x+a\sqrt{-1} = R(\cos z+\sin z\sqrt{-1}),$$
$$x-a\sqrt{-1} = R(\cos z-\sin z\sqrt{-1}),$$

so ist bekanntlich

$$R = \sqrt{(x^2+a^2)},\qquad \cos z = \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)}},\qquad \sin z = \frac{a}{\sqrt{(x^2+a^2)}},$$

$$z = \arccos\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \arcsin\frac{a}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \arctang\frac{a}{x},$$

und man erhält

$$(x+a\sqrt{-1})^{r+1} = R^{r+1}(\cos z+\sin z\sqrt{-1})^{r+1} = R^{r+1}(\cos(r+1)z+\sin(r+1)z\sqrt{-1}),$$
$$(x-a\sqrt{-1})^{r+1} = R^{r+1}(\cos z-\sin z\sqrt{-1})^{r+1} = R^{r+1}(\cos(r+1)z-\sin(r+1)z\sqrt{-1}).$$

Werden diese Werthe eingeführt, so ergiebt sich unter den genannten Bedingungen:

$$(5.)\qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{x}{x^2+a^2} = \frac{(-1)^r 1.2.3\ldots r\cos(r+1)z}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}(r+1)}} = \frac{1^{r|1}\cos((r+1)z+r\pi)}{(x^2+x^2)^{\frac{1}{2}(r+1)}}.$$

Eben so erhält man

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{a}{x^2+a^3} = \frac{-1}{2\sqrt{-1}}\,\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\Big(\frac{1}{x+a\sqrt{-1}}-\frac{1}{x-a\sqrt{-1}}\Big)$$

$$= \frac{(-1)^{r+1}1^{r|1}}{2\sqrt{-1}}\Big(\frac{1}{(x+a\sqrt{-1})^{r+1}}-\frac{1}{(x-a\sqrt{-1})^{r+1}}\Big)$$

und hieraus durch Anwendung der oben gezeigten Entwicklungen:

$$(6.)\qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{a}{x^2+a^2} = \frac{(-1)^r 1.2.3\ldots r.a}{(x^2+a^2)^{r+1}}\big[(r+1)x^r-(r+1)_3 x^{r-2}a^2$$
$$+(r+1)_5 x^{r-4}a^4-\cdots\big],$$

$$(7.)\qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{a}{x^2+a^2} = \frac{(-1)^r 1.2.3\ldots r\sin(r+1)z}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}(r+1)}} = \frac{1^{r|1}\sin((r+1)z+r\pi)}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}(r+1)}}.$$

Die Gleichungen (4 bis 7.) gelten für jedes ganze und gebrochene r.

Um $\int^{r+1} \frac{x}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$ zu finden, hat man

$$\int^{r+1} \frac{x}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1} = \tfrac{1}{2}\int^{r+1}\left(\frac{1}{x+a\sqrt{-1}}+\frac{1}{x-a\sqrt{-1}}\right)(\partial x)^{r+1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int^{r}(\log(x+a\sqrt{-1})+\log(x-a\sqrt{-1})$$

$$= \frac{(x+a\sqrt{-1})^r}{2.1^{r|1}}\log(x+a\sqrt{-1}) - \frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}(x+a\sqrt{-1})^r}{2.1^{r|1}1^{r|1}}$$

$$+ \frac{(x-a\sqrt{-1})^r}{2.1^{r|1}}\log(x-a\sqrt{-1}) - \frac{C(1,2,3,\dots r)^{r-1}(x-a\sqrt{-1})^r}{2.1^{r|1}1^{r|1}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$(x+a\sqrt{-1})^r+(x-a\sqrt{-1})^r = M+N = 2(x^r-(r)_2a^2x^{r-2}+(r)_4x^{r-4}a^4-\dots),$$

$$(x+a\sqrt{-1})^r-(x-a\sqrt{-1})^r = M+N$$

$$= 2a\sqrt{-1}\,(rx^{r-1}-(r)_3a^2x^{r-3}+(r)_5x^{r-5}a^5-\dots),$$

$$\log(x\pm a\sqrt{-1}) = \log x \pm \frac{a\sqrt{-1}}{x} - \frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2} \pm \frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3} - \frac{(a\sqrt{-1})^4}{4x^4} \pm \dots,$$

so ergiebt sich

$$(x+a\sqrt{-1})^r\log(x+a\sqrt{-1}) = M\log x + M\frac{a\sqrt{-1}}{x} - M\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2} + M\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3} - \dots$$

$$(x-a\sqrt{-1})^r\log(x-a\sqrt{-1}) = N\log x - N\frac{a\sqrt{-1}}{x} - N\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2} - N\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3} - \dots$$

folglich

$$(x+a\sqrt{-1})^r\log(x+a\sqrt{-1})+(x-a\sqrt{-1})^r\log(x-a\sqrt{-1})$$

$$= (M+N)\left[\log x+\frac{a^2}{2x^2}-\frac{a^4}{4x^4}+\frac{a^6}{6x^6}-\dots\right]$$

$$+(M+N)\sqrt{-1}\left[\frac{a}{x}-\frac{a^3}{3x^3}+\frac{a^5}{5x^5}-\frac{a^7}{7x^7}+\dots\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(M+N)\left[\log x^2+\frac{2a^2}{2x^2}-\frac{2a^4}{4x^4}+\frac{2a^6}{6x^6}-\dots\right]$$

$$+\tfrac{1}{2}(M-N)2\sqrt{-1}\left[\frac{a}{x}-\frac{a^3}{3x^3}+\frac{a^5}{5x^5}-\frac{a^7}{7x^7}+\dots\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(M+N)\log(x^2+a^2)-\tfrac{1}{2}(M-N)\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}.$$

Durch Einführung dieser Werthe erhält man

$$(8.)\quad \int^{r+1}\frac{x}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1} = \frac{\log(x^2+a^2)}{2.1^{r|1}}\left[x^r-(r)_2x^{r-2}a^2+(r)_4x^{r-4}a^4-\dots\right]$$

$$-\frac{a\sqrt{-1}}{2.1^{r|1}}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}\left[rx^{r-1}-(r)_3x^{r-3}a^2+(r)_5x^{r-5}a^4-\dots\right]$$

$$-\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}}{1^{r|1}1^{r|1}}\left[x^r-(r)_2x^{r-2}a^2+(r)_4x^{r-4}a^4-\dots\right],$$

ohne Rücksicht auf Constanten, und wobei zu bemerken ist, dafs der zweite Ausdruck reell ist.

Führt man aber die oben angegebenen Ausdrücke des Sinus und Cosinus ein, so erhält man

$$\int^{r+1} \frac{x}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1} = \tfrac{1}{2}\frac{R^r}{1^{r|1}}(\cos rz + \sin rz\sqrt{-1})\log(x+a\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}}{1^{r|1}1^{r|1}}\cdot R^r(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})$$
$$+\frac{R^r}{2.1^{r|1}}(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})\log(x-a\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}}{1^{r|1}1^{r|1}}\cdot R(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})$$

und es ergiebt sich

$$R^r(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})\log(x+a\sqrt{-1})+R^r(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})\log(x-a\sqrt{-1})$$
$$= R^r\Big(\cos rz\log x+\cos rz\frac{a\sqrt{-1}}{x}-\cos rz\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2}+\cos rz\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3}-\dots\Big)$$
$$+R^r\Big(\sin rz\log x\sqrt{-1}+\sin rz\frac{a\sqrt{-1}}{x}\sqrt{-1}-\sin rz\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2}\sqrt{-1}$$
$$+\sin rz\frac{(a\sqrt{-1})^3}{2x^3}\sqrt{-1}-\dots\Big)$$
$$+R^r\Big(\cos rz\log x-\cos rz\frac{a\sqrt{-1}}{x}-\cos rz\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2}-\cos rz\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3}-\dots\Big)$$
$$+R^r\Big(-\sin rz\log x\sqrt{-1}+\sin rz\frac{a\sqrt{-1}}{x}\sqrt{-1}+\sin rz\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2}\sqrt{-1}$$
$$+\sin rz\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3}\sqrt{-1}+\dots\Big)$$
$$= R^r\cos rz\Big(\log x^2+\frac{2a^2}{2x^2}-\frac{2a^4}{4x^4}+\frac{2a^6}{6x^6}-\dots\Big)$$
$$+R^r\sin rz\sqrt{-1}\Big(2\frac{a}{x}\sqrt{-1}+2\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3}+2\frac{(a\sqrt{-1})^5}{5x^5}+\dots\Big)$$
$$= R^r\cos rz\log(x^2+a^2)+R^r\sin rz\sqrt{-1}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}.$$

Werden diese Werthe eingeführt, so findet sich

$$(9.)\quad \int^{r+1}\frac{x}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1} = \frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}}{2.1^{r|1}}\cos rz\log(x^2+a^2)$$
$$+\frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}\sin rz\sqrt{-1}}{2.1^{r|1}}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}-\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}\cos rz}{1^{r|1}1^{r|1}}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\int^{r+1}\frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1} = \frac{-1}{2\sqrt{-1}}\int^{r+1}\Big(\frac{1}{x+a\sqrt{-1}}-\frac{1}{x-a\sqrt{-1}}\Big)(\partial x)^{r+1}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{-1}}\int^{r}(\log(x+a\sqrt{-1})-\log(x-a\sqrt{-1}))\,(\partial x)^{r}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{-1}}\Big[\frac{(x+a\sqrt{-1})^r}{1^{r|1}}\log(x+a\sqrt{-1})-\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}(x+a\sqrt{-1})^r}{1^{r|1}1^{r|1}}$$

$$-\frac{(x-a\sqrt{-1})^r}{1^{r|1}}\log(x-a\sqrt{-1})+\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}(x-a\sqrt{-1})^r}{1^{r|1}1^{r|1}}\Big].$$

Werden die nöthigen Entwicklungen gemacht, so erhält man

$$(x+a\sqrt{-1})^r\log(x+a\sqrt{-1})-(x-a\sqrt{-1})^r\log(x+a\sqrt{-1})$$

$$= (M-N)\Big(\log x+\frac{a^2}{2x^2}-\frac{a^4}{4x^4}+\frac{a^6}{6x^6}\cdots\Big)$$

$$+(M+N)\sqrt{-1}\Big(\frac{a}{x}-\frac{a^3}{3x^3}+\frac{a^5}{5x^5}-\frac{a^7}{7x^7}\cdots\Big)$$

$$= \tfrac{1}{2}(M-N)\log(x^2+a^2)+\tfrac{1}{2}(M+N)\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}.$$

Werden die Werthe von M und N eingeführt, so ergiebt sich

$$(10.)\quad \int^{r+1}\frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1} = \frac{-a\log(x^2+a^2)}{2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\dots r}(rx^{r-1}-(r)_3x^{r-3}a^2+(r)_5x^{r-5}a^4-\cdots)$$

$$-\frac{1}{2\,.\,1^{r|1}\sqrt{-1}}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}(x^r-(r)_2x^{r-2}a^2+(r)_4x^{r-4}a^4-\cdots)$$

$$+\frac{aC(1,2,\dots r)^{r-1}}{1^{r|1}1^{r|1}}(rx^{r-1}-(r)_3x^{r-3}a^2+(r)_4x^{r-5}a^4-\cdots).$$

Ferner erhält man

$$\int^{r+1}\frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1} = \frac{-R^r}{2\sqrt{-1}\,1^{r|1}}\Big[(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})\log(x+a\sqrt{-1})$$

$$-\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}}{1\,.\,2\dots r}(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})$$

$$-(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})\log(x-a\sqrt{-1})$$

$$+\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}}{1\,.\,2\dots r}(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})\Big],$$

und hieraus, wenn die nöthigen Entwicklungen gemacht werden:

$$(11.)\quad \int^{r+1}\frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$$

$$= \frac{-(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}}{2\,.\,1^{r|1}}\Big(\sin rz\log(x^2+a^2)+\frac{\cos rz}{\sqrt{-1}}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}-\frac{2C(1,2,\dots r)^{r-1}\sin rz}{1^{r|1}}\Big).$$

Erwägt man, dafs

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}} = \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{x} \quad\text{und}\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}} = -\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{x}$$

ist, so hat man aus (8 bis 11.) folgende Formen:

$$\int^{r+1} \frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$$

$$= \frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}}{1\,.\,2\,\ldots\,r}\left[\tfrac{1}{2}\cos rz\log(x^2+a^2) - \sin rz\,.\,\text{arc tang}\,\frac{a}{x} - \frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}\cos rz}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}\right],$$

$$\int^{r+1} \frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$$

$$= \frac{-(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}}{1\,.\,2\,\ldots\,r}\left[\tfrac{1}{2}\sin rz\log(x^2+a^2) + \cos rz\,.\,\text{arc tang}\,\frac{a}{x} - \frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}\sin rz}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}\right],$$

u. s. w.

Die Integrale (8 bis 11.) führen immer auf reelle Werthe. Ein ähnlicher Weg führt zur Darstellung von $\partial^r e^{nx}\cos mx$. Es ist nämlich

$$\cos mx = \tfrac{1}{2}(e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}) \quad \text{und} \quad \sin mx = \frac{e^{mx\sqrt{-1}} - e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos mx + \sin mx\sqrt{-1} = e^{mx\sqrt{-1}} \quad \text{und} \quad \cos mx - \sin mx\sqrt{-1} = e^{-mx\sqrt{-1}},$$

also

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r} e^{nx}\cos mx = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}(e^{(n+m\sqrt{-1})x} + e^{(n-m\sqrt{-1})x})$$

$$= \tfrac{1}{2}(n+m\sqrt{-1})^r e^{(n+m\sqrt{-1})x} + \tfrac{1}{2}(n-m\sqrt{-1})^r e^{(n-m\sqrt{-1})x}.$$

Wird nun, unter den nämlichen Beziehungen wie oben für $x \pm a\sqrt{-1}$,

$$(n \pm m\sqrt{-1})^r = R^r(\cos z \pm \sin z\sqrt{-1})^r = R^r(\cos rz \pm \sin rz\sqrt{-1})$$

gesetzt, so erhält man

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r} e^{nx}\cos mx$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{nx}R^r[(\cos rz + \sin rz\sqrt{-1})e^{mx\sqrt{-1}} + (\cos rz - \sin rz\sqrt{-1})e^{-mx\sqrt{-1}}$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{nx}R^r[(\cos rz + \sin rz\sqrt{-1})(\cos mx + \sin mx\sqrt{-1})$$

$$+ (\cos rz - \sin rz\sqrt{-1})(\cos mx - \sin mx\sqrt{-1})]$$

$$= e^{nx}R^r(\cos rz\cos mz - \sin rz\sin mz),$$

wenn die angezeigten Entwicklungen gemacht werden. Es ist daher

$$\text{(12.)} \qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r} e^{nx}\cos mx = e^{nx}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}\cos(rz+mx).$$

Auf ähnliche Weise findet sich

$$\text{(13.)} \qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r} e^{nx}\sin mx = e^{nx}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}\sin(rz+mx).$$

Für die Integrale dieser Functionen erhält man

$$\int^r e^{nx}\cos mx = \tfrac{1}{2}\int^r (e^{(n+m\sqrt{-1})x} + e^{(n-m\sqrt{-1})x})(\partial x)^r$$

$$= \frac{e^{nx}}{2(n+m\sqrt{-1})^r} e^{mx\sqrt{-1}} + \frac{e^{nx}}{2(n-m\sqrt{-1})^r} e^{-mx\sqrt{-1}}.$$

Werden die oben angegebenen Gleichungen eingeführt und die Gleichungen

$$\frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^r} = \frac{1}{R^r(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})} = \frac{\cos rz-\sin rz\sqrt{-1}}{R^r},$$

$$\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^r} = \frac{1}{R^r(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})} = \frac{\cos rz+\sin rz\sqrt{-1}}{R^r},$$

benutzt, so erhält man

$$(14.)\quad \int^r e^{nx}\cos mx\,(\partial x)^r = \frac{e^{nx}}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}\cos(mx-rz).$$

Eben so:

$$(15.)\quad \int^r e^{nx}\sin mx\,(\partial x)^r = \frac{e^{nx}}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}\sin(mx-rz).$$

Ferner ist eben so:

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{-nx}\cos mx = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}(e^{(-n+m\sqrt{-1})x}+e^{(-n-m\sqrt{-1})x})$$

$$= (-1)^r\tfrac{1}{2}e^{-nx}((n+m\sqrt{-1})e^{-mx\sqrt{-1}}+(n-m\sqrt{-1})^r e^{mx\sqrt{-1}}).$$

Werden die oben angegebenen Werthe eingeführt und die nöthigen Reductionen gemacht, so erhält man

$$(16.)\quad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{-nx}\cos mx = (-1)^r(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}e^{-nx}\cos(mx-rz).$$

Ferner erhält man

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{-nx}\sin mx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}(e^{(-n+m\sqrt{-1})x}-e^{(-n-m\sqrt{-1})x})$$

$$= \frac{(-1)^r e^{-nx}}{2\sqrt{-1}}((n-m\sqrt{-1})^r e^{mx\sqrt{-1}}-(n+m\sqrt{-1})^r e^{-mx\sqrt{-1}}).$$

Auch hier findet sich auf gleiche Weise:

$$(17.)\quad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{-nk}\sin mx = (-1)^r(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}e^{-nx}\sin(mx-rz).$$

Die Integrale findet man auf folgende Weise:

$$\int^r e^{-nx}\cos mx\,(\partial x)^r = \tfrac{1}{2}\int^r(e^{(-n+m\sqrt{-1})x}+e^{(-n-m\sqrt{-1})x})(\partial x)^r.$$

$$= \frac{e^{-nx}}{2(-1)^r}\left(\frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{(n-m\sqrt{-1})^r}+\frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{(n+m\sqrt{-1})^r}\right).$$

Werden auch hier die entsprechenden Werthe eingeführt und die nöthigen Reductionen gemacht, so ergiebt sich

$$(18.)\quad \int^r e^{-nx}\cos mx\,(\partial x)^r = \frac{e^{-nx}}{(-1)^r(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}\cos(rz+mx).$$

Ferner ist

$$\int^r e^{-nx}\sin mx\,(\partial x)^r = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int^r (e^{(-n+m\sqrt{-1})x} - e^{(-n-m\sqrt{-1})x})(\partial x)^r$$

$$= \frac{e^{-nx}}{(-1)^r 2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{(n-m\sqrt{-1})^r} - \frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{(n+m\sqrt{-1})^r}\right).$$

Hieraus ergiebt sich durch Einführung der entsprechenden Werthe und nach den nöthigen Reductionen:

$$(19.)\quad \int^r e^{-nx}\sin mx\,(\partial x)^r = \frac{e^{-nx}}{(-1)^r(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}\sin(rz+mx).$$

Die Harmonie in den Darstellungen (12 bis 19.) liegt deutlich vor. Von den hier entwickelten Differentialen und Integralen hat *Liouville* im Journ. de l'éc. polyt. T. XIII, p. 156 et 157, 134 et 135 (No. 5, 7, 12, 13, 16 et 17) gegeben.

§. 17.

Bestimmte Integrale höherer Ordnung und mit gebrochenen Exponenten.

Auch auf die Darstellung *bestimmter* Integrale lassen sich die obigen Formeln anwenden. Wir wollen Einiges davon hersetzen. Bezeichnet man das $r$te Integral einer Function, zwischen den Grenzen a und b, durch $\int_{a,b}^{r} fx$, so ist aus (14. und 5. §. 10.)

$$(1.)\quad \int_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}}{1^{r|1}},$$

$$(2.)\quad \int_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} x^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{n|1}q^{n+r}}{1^{\frac{p}{q}|1}(p+q)^{n+r|q}}.$$

Aus (1. und 2.) findet man, in Rücksicht auf (21. §. 26.):

$$(3.)\quad \frac{\int_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} x^{-\frac{p}{q}}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\int_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} x^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{p^{n+r+1|q}}{q^{n+r+1}}\frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Eben so ist aus (11. und 6. §. 10.)

$$(4.)\quad \int_{1,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{1}{x^n}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)^{n-r-1|q}}{(-1)^{r-1+\frac{p}{q}}1^{n-1|1}q^{n-r-1}},$$

$$(5.)\quad \int_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} \sqrt[q]{x^p}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}q^r}{1^{\frac{2p}{q}|1}(q+2p)^{r|q}}.$$

Hieraus ist, in Rücksicht auf (21. §. 26.):

$$(6.)\quad \int_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} \sqrt[q]{x^p}\,(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} \int_{1,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{1}{x^n}\,(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{p\,(q-p)^{n-r-1|q}}{(-1)^{r-1+\frac{p}{q}}\,1^{n-1|1}\,1^{\frac{2p}{q}|1}\,q^{n-2r}_{\bullet}\,(q+2p)^{r|q}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Ferner ist aus (18. und 19. §. 16.)

$$(7.)\quad \int_{0,\infty}^{r} e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^r = \frac{\sin r\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}.$$

$$(8.)\quad \int_{0,\infty}^{r} e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^r = \frac{\cos r\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}.$$

Für $m=0$ ist aus (8.); wie auch aus (6. §. 15.) folgt:

$$(9.)\quad \int_{0,\infty}^{r} e^{-nx}\,(\partial x)^r = \frac{1}{(-1)^{r-1}\,n^r}.$$

Aus der zweiten Gleichung, woraus (19. §. 16.) gefolgert wurde, ist

$$(10.)\quad \int_{0,\infty}^{r} e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^r = \frac{1}{(-1)^{r-1}2\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^r} - \frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^r}\right).$$

Wird das $k$te Differential nach n unter dem Integralzeichen genommen, so ist

$$\frac{\partial^k}{(\partial n)^k}\,e^{-nx} = (-1)^k\,x^k\,e^{-nx},$$

$$\frac{\partial^k}{(\partial n)^k}\,\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^r} = (-1)^k \cdot \frac{1^{r+k-1|1}}{1^{r-1|1}\,(n-m\sqrt{-1})^{k+r}},$$

$$\frac{\partial^k}{(\partial n)^k}\,\frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^r} = (-1)^k \cdot \frac{1^{r+k-1|1}}{1^{r-1|1}\,(n+m\sqrt{-1})^{k+r}}.$$

Werden diese Werthe in (10.) eingeführt, so erhält man

$$\int_{0,\infty}^{r} x^k\,e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}2\sqrt{-1}.1^{r-1|1}}\left(\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^{k+r}} - \frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^{k+r}}\right)$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}2\sqrt{-1}}\,\frac{(n+m\sqrt{-1})^{k+r}-(n-m\sqrt{-1})^{k+r}}{(n^2+m^2)^{k+r}}.$$

Hieraus ergiebt sich, nach Ausführung der nöthigen Entwicklungen:

$$(11.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{r+k}}\left((k+r)n^{r+k-1}m-(r+k)_3 n^{r+k-3}m^3+(r+k)_5 n^{r+k-5}m^5-\cdots\right),$$

$$(12.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}\sin(r+k)z}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r+k)}} = \frac{1^{r+k-1|1}\sin(r+k)\left(\text{arc tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r+k)}}.$$

Setzt man $k-1$ statt k und $r=1$, so wird, wie bekannt,

$$(13.)\quad \int_{0}^{\infty} x^{k-1} e^{-nx} \sin mx\,\partial x = \frac{1^{k-1|1}\sin kz}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}} = \frac{1^{k-1|1}\sin k\left(\text{arc tang}\frac{m}{n}\right)}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}}.$$

Für $n=0$ wird aus (12.)

$$(14.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k \sin mx\,(\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}\sin(r+k)\frac{1}{2}\pi}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}m^{k+r}}.$$

Setzt man $k-1$ statt k und $r=1$, so ergiebt sich, wie bekannt,

$$(15.)\quad \int_{0}^{\infty} x^{k-1} \sin mx\,(\partial x) = \frac{1^{k-1|1}\sin k.\frac{1}{2}\pi}{m^k}.$$

Aus der zweiten Gleichung, aus welcher (18. §. 16.) gefolgert wurde, ist

$$\int_{0,\infty}^{r} e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^r = \frac{1}{(-1)^{r-1}2}\left(\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^r}+\frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^r}\right).$$

Wird, wie vorhin, das $k$te Differential nach n eingeführt, so ergiebt sich

$$\int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}2.1^{r-1|1}}\left(\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^{k+r}}+\frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^{r+k}}\right)$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}2}\cdot\frac{(n+m\sqrt{-1})^{r+k}+(n-m\sqrt{-1})^{r+k}}{(n^2+m^2)^{r+k}},$$

und hieraus

$$(16.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{k+r}}\left(n^{r+k}-(r+k)_2 n^{r+k-2}m^2+(r+k)_4 n^{r+k-4}m^4-\cdots\right),$$

$$(17.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}\cos(r+k)z}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r+k)}} = \frac{1^{r+k-1|1}\cos(r+k)\left(\text{arc tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r+k)}}.$$

Für $m = 0$ wird hieraus

$$(18.) \quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} (\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} n^{k+r}}.$$

Setzt man hierin $x = (bz)^q$, so wird $\partial x = b^q q z^{q-1} \partial z$ und man erhält

$$(19.) \quad \int_{0,\infty}^{r} z^{kq+qr-r} e^{-n(bz)^q} (\partial z)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} n^{k+r} b^{kq+qr} q^r}.$$

Wird hierin $pq + qr - r = m$ also $k = \frac{m+r-qr}{q}$ und ferner x statt z gesetzt, so erhält man

$$(20.) \quad \int_{0,\infty}^{r} x^m e^{-n(bx)^q} (\partial x)^r = \frac{1^{\frac{m+r}{q}-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} n^{\frac{m+r}{q}} b^{m+r} q^r}.$$

Diese Gleichung kann auch auf folgende Weise auf eine allgemeinere Form gebracht werden. Aus (5. §. 15.) ist

$$\int_{0,\infty}^{r} a^{-nx} (\partial x)^r = \frac{1}{(-1)^{r-1} n^r (\log a)^r}.$$

Wird hier das $k$te Differential nach n genommen, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^k}{(\partial n)^k} a^{-nx} = (-1)^k a^{-nx} x^k (\log a)^k,$$

$$\frac{\partial^k}{(\partial n)^k} \frac{1}{n^r} = (-1)^k \frac{1^{r+k-1|1}}{1^{r-1|1} n^{r+k}},$$

und hieraus, durch Benutzung dieser Werthe:

$$(21.) \quad \int_{0,\infty}^{r} a^{-nx} x^k (\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} n^{r+k} (\log a)^{r+k}}.$$

Wird auch hierin $x = (bz)^q$ gesetzt und werden die oben zu (19. und 20.) gemachten Entwicklungen eingeführt, so ist

$$(22.) \quad \int_{0,\infty}^{r} x^m a^{-n(bx)^q} (\partial x)^r = \frac{1^{\frac{m+r}{q}-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} n^{\frac{m+r}{q}} b^{m+r} (\log a)^{\frac{m+r}{q}} q^r}.$$

Die Gleichungen (11. und 12., 16. und 17., 22.) sind sehr allgemein und gelten, wie man leicht sieht, für jedes ganze und gebrochene r und für jedes ganze und gebrochene positive und negative k und m; wobei aber die Eigenthümlichkeiten, mit welchen die Formen überhaupt darstellbare Resultate liefern, nicht aufser Acht gelassen werden dürfen.

Man kann nun mit diesen Gleichungen viele und alle die Anwendungen machen, wozu die ersten Integrale dieser Functionen (in §. 33. u. ff.) benutzt wurden. Daraus würden sich sehr mannichfaltige Entwicklungen ziehen

lassen, die wir jedoch, da die Methoden dazu in dem Frühern gezeigt wurden, nicht weiter verfolgen wollen.

Nur einiges Wenige soll hier noch stehen. Setzt man $m-1$ statt m, $n=b=1$, $r=1$ und $a=e$, so ist aus (22.), wie bekannt, (11. §. 33.):

$$(23.)\quad \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^q}\,\partial x = \frac{1^{\frac{m}{q}-1|1}}{q} = \frac{1^{\frac{m}{q}|1}}{m}.$$

Setzt man $r=\frac{p}{q}$, $k-\frac{p}{q}$ statt k, so wird $r+k=k$ und man hat aus (11., 12., 16. und 17.):

$$(24.)\quad \int_{0,\infty} \frac{x^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} x^k e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}} 1^{k-1|1}}{1^{\frac{p}{q}-1|1}(n^2+m^2)^k}\left(kn^{k-1}m - (k)_3 n^{k-3}m^3 + (k)_5 n^{k-5}m^5 - \cdots\right)$$

$$= \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}} 1^{k-1|1} \sin k\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{1^{\frac{p}{q}-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}},$$

$$(25.)\quad \int_{0,\infty} \frac{x^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} x^k e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}} 1^{k-1|1}}{1^{\frac{p}{q}-1|1}(n^2+m^2)^k}\left(n^k - (k)_2 n^{k-2}m^2 + (k)_4 n^{k-4}m^4 - \cdots\right)$$

$$= \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}} 1^{k-1|1} \cos k\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{1^{\frac{p}{q}-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}}.$$

Für $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$ ist

$$(26.)\quad \int_{0,\infty} \frac{x^k}{\sqrt{x}} e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1^{k-1|1}\sqrt{-1}}{(n^2+m^2)^k\sqrt{\pi}}\left(kn^{k-1}m - (k)_3 n^{k-3}m^3 + (k)_5 n^{k-5}m^5 - \cdots\right)$$

$$= \frac{1^{k-1|1}\sqrt{-1}\sin k\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}\sqrt{\pi}},$$

$$(27.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{x^k}{\sqrt{x}} e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1^{k-1|1}\sqrt{-1}}{(n^2+m^2)^k\sqrt{\pi}}\left(n^k - (k)_2 n^{k-2}m^2 + (k)_4 n^{k-4}m^4 - \cdots\right)$$

$$= \frac{1^{k-1|1}\sqrt{-1}\cos k\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}\sqrt{\pi}}.$$

Wird $r+\frac{p}{q}$ statt r, $k-\frac{p}{q}$ statt k gesetzt, so ist aus (11. und 12., 16. und 17.):

$$(28.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{x^k}{\sqrt[q]{x^p}} e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}q^r}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1}1^{\frac{p}{q}-1|1}p^{r|q}(n^2+m^2)^{k+r}}\left[(r+k)n^{r+k-1}m - (r+k)_3 n^{r+k-3}m^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}q^r \sin(r+k)\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1}1^{\frac{p}{q}-1|1}p^{r|q}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(k+r)}},$$

$$(29.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{x^k}{\sqrt[q]{x^p}} e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}q^r}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1}1^{\frac{p}{q}-1|1}p^{r|q}(n^2+m^2)^{r+k}}\left[n^{r+k} - (r+k)_2 n^{r+k-2}m^2 + (r+k)_4 n^{r+k-4}m^4 - \cdots\right]$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}q^r \cos(r+k)\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r+\frac{p}{q}}1^{\frac{p}{q}-1|1}p^{r|q}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r+k)}}.$$

Wird aber $r+\frac{p}{q}$ statt r und $-k-\frac{p}{q}$ statt k, also $r-k$ statt $r+k$ gesetzt, so erhält man

$$(30.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{e^{-nx}\sin mx}{x^p\sqrt[q]{x^p}}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1^{r-k-1|1}q^r}{(-1)^{r-k-1+\frac{p}{q}}1^{\frac{p}{q}-1|1}p^{r|q}(n^2+m^2)^{r-k}}\left[(r-k)n^{r-k-1}m - (r-k)_3 n^{r-k-3}m^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1^{r-k-1|1}q^r \sin(r-k)\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-k-1+\frac{p}{q}}1^{\frac{p}{q}-1}p^{r|q}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r-k)}},$$

$$(31.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{e^{-nx}\cos mx}{x^k \sqrt[q]{x^p}} (\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1^{r-k-1|1} q^r}{(-1)^{r-k-1+\frac{p}{q}} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} (n^2+m^2)^{r-k}} [n^{r-k} - (r-k)_2 n^{r-k-2} m^2 + (r-k)_4 n^{r-k-4} m^4 - \cdots]$$

$$= \frac{1^{r-k-1|1} q^{r-k} \cos(r-k)\left(\operatorname{arctang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-k-1+\frac{p}{q}} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r-k)}}.$$

Hierdurch eröffnet sich, wie man sieht, ein weites Feld für die Entwicklung besonderer Fälle, von welchen wir einige andeuten wollen.

Für $n = 0$ wird aus (24., 25.) u. s. w.

$$(32.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt[q]{x^p}} \sin mx (\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}} 1^{\pm k-1|1} \sin \pm k \cdot \frac{1}{2}\pi}{1^{\frac{p}{q}-1|1} m^{\pm k}},$$

$$(33.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt[q]{x^p}} \cos mx (\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}} 1^{\pm k-1|1} \cos k \cdot \frac{1}{2}\pi}{1^{\frac{p}{q}-1|1} m^{\pm k}},$$

$$(34.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt[q]{x^p}} \sin mx (\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{r\pm k-1|1} q^r \sin(r \pm k) \cdot \frac{1}{2}\pi}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} m^{r\pm k}},$$

$$(35.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt[q]{x^p}} \cos mx (\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{r\pm k-1|1} q^r \cos(r \pm k) \cdot \frac{1}{2}\pi}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} m^{r\pm k}};$$

wo r und k selbst wieder gebrochene Zahlen sein können. Ist $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, so ist

$$(36.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt{x}} \sin mx (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\pm k-1|} \sin k \cdot \frac{1}{2}\pi \sqrt{-1}}{m^k \sqrt{\pi}},$$

$$(37.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt{x}} \cos mx (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\pm k-1|} \cos k \cdot \frac{1}{2}\pi \sqrt{-1}}{m^k \sqrt{\pi}}.$$

Hier führt ein positives ganzes und gebrochenes k, so wie ein negatives gebrochenes k immer auf darstellbare Werthe. Für $+k = \frac{1}{2}$ wird aus (36. und 37.)

$$(38.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sin mx (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-2}}{2\sqrt{m}},$$

$$(39.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \cos mx (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-2}}{2\sqrt{m}}.$$

Wird (11.) durch (16.) und umgekehrt getheilt, so ergeben sich folgende

Relationen:

$$(40.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^r = \operatorname{tang}(r+k)\,\text{z}\int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^r,$$

$$(41.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^r = \cot(r+k)\,\text{z}\int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^r,$$

und

$$(42.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k \sin mx\,(\partial x)^r = \operatorname{tang}(r+k)\,\tfrac{1}{2}\pi\int_{0,\infty}^{r} x^k \cos mx\,(\partial x)^r,$$

$$(43.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k \cos mx\,(\partial x)^r = \cot(r+k)\,\tfrac{1}{2}\pi\int_{0,\infty}^{r} x^k \sin mx\,(\partial x)^r.$$

Setzt man hierin $k=0$, $r=\frac{1}{2}$, so erhält man

$$(44.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sin mx\,(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \cos mx\,(\partial x)^{\frac{1}{2}};$$

was die Richtigkeit von (38. und 39.) bestätigt.

Für (11. und 16.) ergiebt sich noch eine dritte Form. Es ist

$$\int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}2(n^2+m^2)^{r+k}} \cdot \frac{(n+m\sqrt{-1})^{r+k}-(n-m\sqrt{-1})^{r+k}}{\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}2(n^2+m^2)^{r+k}} \sqrt{\frac{[(n+m\sqrt{-1})^{r+k}-(n-m\sqrt{-1})^{r+k}]^2}{-1}}.$$

Quadrirt man und entwickelt, so ergiebt sich:

$$(45.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx\,(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}\sqrt{2}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}2(n^2+m^2)^{r+k}} \sqrt{[(n^2+m^2)^{r+k} - n^{2r+2k} - (2r+2k)_2 n^{2r+2k-2}m^2 + (2r+2k)_4 n^{2r+2k-4}m^4 - \cdots]}.$$

Ferner ist

$$\int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}2(n^2+m^2)^{r+k}} [(n+m\sqrt{-1})^{r+k} + (n-m\sqrt{-1})^{r+k}].$$

Quadrirt man auch hier und zieht die Wurzel aus, so findet sich, nach den nöthigen Rechnungen:

$$(46.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx\,(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}\sqrt{2}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}2(n^2+m^2)^{r+k}} \sqrt{[(n^2+m^2)^{r+k} + n^{2r+2k} - (2r+2k)_2 n^{2r+2k-2}m^2 + (2r+2k)_4 n^{2r+2k-4}m^4 - \cdots]}.$$

Auch hier können r, k und n die oben bezeichneten Werthe haben, und es lassen sich von diesen Darstellungen ähnliche Anwendungen machen, wie sie schon hier und dort gemacht wurden, und wobei die im Frühern schon ausgesprochenen Bemerkungen ihre Geltung behalten.

Aus (12. und 17.) läfst sich, nach den gehörigen Reductionen, folgende besondere Form entwickeln, wenn $-k$ statt $+k$ und $r = \frac{p}{q}$ gesetzt wird:

$$(47.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{e^{-nx}\sin mx}{x^k}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{\frac{p}{q}-1-k|1}\sin\left(\frac{p}{q}-k\right)\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}1^{\frac{p}{q}-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{p}{2q}-\frac{1}{2}k}}$$

$$= \frac{q^k \sin\left(k-\frac{p}{q}\right)\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{k+\frac{p}{q}}(q-p)^{k|q}(n^2+m^2)^{\frac{p}{2q}-\frac{1}{2}k}},$$

und hieraus für $n=0$, und ferner für $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, $k=1$:

$$(48.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{\sin mx}{x^k}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{q^k \sin\left(k-\frac{p}{q}\right)\frac{1}{2}\pi}{(-1)^{k+\frac{p}{q}}(q-k)^{k|q}m^{\frac{p}{q}-k}},$$

$$(49.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin mx}{x}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}.\sqrt{2m}.$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$(50.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{e^{-nx}\cos mx}{x^k}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{q^k \cos\left(k-\frac{p}{q}\right)\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{k+\frac{p}{q}-1}(q-p)^{k|q}(n^2+m^2)^{\frac{p}{2q}-\frac{1}{2}k}},$$

$$(51.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{\cos mx}{x^k}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{q^k \cos\left(k-\frac{p}{q}\right)\frac{1}{2}\pi}{(-1)^{k+\frac{p}{q}-1}(q-p)^{k|q}m^{\frac{p}{q}-k}},$$

$$(52.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos mx}{x}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{-1}}.$$

Aus (45. und 46.) wird für $r=\frac{1}{2}$, $k=-\frac{1}{2}$ und $n=0$:

$$(53.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin mx}{\sqrt{x}}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}, \qquad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}.\sin mx\,(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-1}}{m\sqrt{\pi}}.$$

$$(54.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos mx}{\sqrt{x}}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}, \qquad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}.\cos mx\,(\partial x)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

wenn man berücksichtigt, dafs nach (86. erster Nachtrag)

$$\frac{1^{\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}|1}}{1^{\frac{1}{2}-1|1}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}|1} = (-1)^{-\frac{1}{2}}1^{-\frac{1}{2}|1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}}$$

ist. Aus (20.) erhält man, nach den gehörigen Reductionen und unter Beiziehung von (Nr. 86. erster Nachtrag), folgende Ausdrücke:

$$(55.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}.e^{-n(bx)^2}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-1}}{b\sqrt{2n}},$$

$$(56.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-n(bx)^2}}{\sqrt{x}}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}},$$

$$(57.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}.e^{-bx}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-1}}{b\sqrt{\pi}},$$

$$(58.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-bx}}{\sqrt{x}}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi},$$

$$(59.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{x^m}{\sqrt{x^p}} e^{-bx}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}1^{m-1|1}}{1^{\frac{p}{q}-1|1}b^m},$$

$$(60.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{x^m}{\sqrt{x}} e^{-bx}(\partial x)^{\frac{1}{2}p} = \frac{1.2.3\ldots(m-1)\sqrt{-1}}{b^m\sqrt{\pi}}.$$

Setzt man in die zweiten Formen von (9. und 11. §. 16.) den Werth von $z = \text{arc tang}\frac{a}{x}$ und nimmt das Integral zwischen 0 und ∞, so erhält man

$$(61.)\quad \int_{0,\infty}^{r+1} \frac{x}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$$

$$= -\frac{a^r}{1.2\ldots r}\left[\log a\cos r.\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\sin r.\tfrac{1}{2}\pi - \frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}\cos r.\frac{1}{2}\pi}{1,2,3\ldots r}\right],$$

$$(62.)\quad \int_{0,\infty}^{r+1} \frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$$

$$= \frac{a^r}{1.2\ldots r}\left[\log a\sin r.\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi\cos r.\tfrac{1}{2}\pi - \frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}\sin r.\frac{1}{2}\pi}{1.2.3\ldots r}\right].$$

Freiburg im Breisgau, im Mai 1848.

12.

Exposé de diverses remarques et reflexions sur les moments et d'autres sujets de statique.

(Par Mr. *Steichen*, professeur à l'école militaire de Bruxelles.)

Remarque I.

Pour abréger le langage, je dirai simplement: Une droite de direction (λ, μ, ν), lorsque cette droite fait avec trois axes coordonnés rectangles des angles dont les cosinus sont désignés par les lettres λ, μ, ν. En prenant $\lambda = \cos\eta . \cos\vartheta$, $\mu = \sin\eta . \cos\vartheta$, $\nu = \sin\vartheta$, on peut se dispenser d'avoir égard à la condition perpétuelle $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, qui alors devient une identité. Celà posé, je rappellerai un théorème purement géométrique, déjà établi et démontré dans mon second mémoire de mécanique rationnelle. Soient (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') deux directions données, se ***croisant*** ou ***coupant*** sous un angle φ; et soit $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ une troisième direction, croisant chacune des deux premières sous un angle droit, ou normale au plan des deux directions, dans le cas où celles-ci se coupent: on obtiendra toujours les angles des cosinus $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ et l'angle φ qui constituent seulement trois inconnues distinctes par les formules suivantes:

$$\boldsymbol{A} . \sin\varphi = \mu\nu' - \nu\mu', \quad \boldsymbol{B} . \sin\varphi = \nu\lambda' - \lambda\nu', \quad \boldsymbol{C} . \sin\varphi = \lambda\mu' - \mu\lambda',$$

qui donnent d'abord $\sin\varphi$ par une formule déjà connue dans la transformation des coordonnées rectangles; et $\sin\varphi$ étant obtenu, et conservé ensuite dans les calculs, à titre d'abreviation, on calculera les quantités $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ par les égalités précédentes elles-mêmes.

On conclut de celles-ci que quand deux droites indéfinies qui se coupent, se déplacent d'une manière quelconque dans leur plan, en conservant toutefois une inclinaison mutuelle constante, les combinaison de cosinus $\mu\nu' - \nu\mu'$, $\nu\lambda' - \lambda\nu'$, $\lambda\mu' - \mu\lambda'$, relatives à leurs directions variables rapportées à des axes fixes de comparaison, conservent des valeurs constantes; attendu que la quantité φ est invariable par hypothèse, et que la direction normale au plan fixes des droites mobiles reste aussi la même; ce qui fait que les premiers membres $\boldsymbol{A} . \sin\varphi$, $\boldsymbol{B} . \sin\varphi$, $\boldsymbol{C} . \sin\varphi$ restent constants, et qu'il en est parconséquent de même des seconds membres des égalités obtenues. En prenant $\varphi = 90^\circ$, on retrouve des résultats particuliers, déjà connus dans la transformation des coordonnées rectangles.

Remarque II.

Les formules précédentes auxquelles je suis d'abord parvenu par la théorie même des moments de rotation, et qui résultent aussi des transformations indiquées dans le mémoire de l'illustre ***Gauſs*** sur les surfaces, sont susceptibles de diverses applications géométriques et mécaniques, dont nous allons indiquer brièvement quelques unes, en nous reservant pour le reste d'employer ces mêmes formules comme moyens de simplification dans des questions de mécanique fort importantes, au fur et à mesure que l'occasion s'en présente pour ainsi dire d'elle-même, dans la théorie des moments, dans la théorie de la rotation des corps solides, dans la question réciproque du centre de percussions etc. Proposons nous par exemple d'évaluer la plus courte distance entre deux droites dans l'espace, de directions (a, b, c), (a', b', c') et se croisant sous un angle connu φ; elles passent l'une par un point $(x_1 y_1 z_1)$ et l'autre par un point $(x_2 y_2 z_2)$. On a d'abord pour la direction (α, β, γ) de cette plus courte distance Δ, à la fois normale aux deux droites données:

$$\alpha . \sin\varphi = bc' - b'c, \quad \beta . \sin\varphi = ca' - c'a, \quad \gamma . \sin\varphi = ab' - a'b.$$

La droite finie qui joint les deux points données, étant projetée parallélement à la direction (α, β, γ), doit donner la plus courte distance cherchée; mais cette projection totale ou résultante doit valoir la somme des projections des chemins partiels

$$x_2 - x_1; \quad y_2 - y_1; \quad z_2 - z_1.$$

Ainsi l'on obient, pour représenter la plus courte distance Δ entre les deux droites proposées, la formule symétrique

$$\Delta = \frac{bc' - b'c}{\sin\varphi}(x_2 - x_1) + \frac{ca' - c'a}{\sin\varphi}(y_2 - y_1) + \frac{ab' - a'b}{\sin\varphi}(z_2 - z_1)$$

que l'on pourrait employer à la recherche des lignes de courbure d'une surface courbe, à partir d'un point donné, et même pour éclaircir quelques difficultés que présentent ces lignes en de certains points exceptionnels. Mais nous ne nous y arrêterons pas; car ce sujet est déjà indiqué dans un mémoire de ***Poisson*** et se trouve lucidement traité dans l'ouvrage de Mr. ***Leroy***.

Remarque III.

Les formules de la remarque I. pourraient être employées aussi, et sans rien faire perdre au sens mécanique de la question, pour établir le principe fondamental de la théorie des moments de rotation des forces, et celui de la composition des moments principaux d'un nombre quelconque de forces concourantes. Il vaut encore la peine de nous arrêter à cette loi de composition

qui ressortira immédiatement et dans toute sa généralité du principe des formules citées. Soient en effet (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, ... les directions des lignes d'action des forces partielles proposées P, P', P'', ... qui ont un commun point d'application A à un corps rigide, muni d'un point fixe quelconque (O). En nommant R la résultante des forces, (A, B, C) sa direction, on obtient d'après le principe élementaire connu:

$$R.A = P\alpha + P'\alpha' + P''\alpha'' + \text{etc.}; \quad R.B = P\beta + P'\beta' + P''\beta'' + \text{etc.};$$
$$R.C = P\gamma + P'\gamma' + P''\gamma'' + \text{etc.}$$

Ainsi, (x, y, z) dénotant les coordonnées rectangles du point commun A, on déduit de ces égalités:

$$R(Bx - Ay) = P(\beta x - \alpha y) + P'(\beta' x - \alpha' y) + P''(\beta'' x - \alpha'' y) + \text{etc.},$$
$$R(Cy - Bz) = P(\gamma y - \beta z) + P'(\gamma' y - \beta' z) + \text{etc.} : R(Az - Cx) \ldots$$

Il est évident que l'expression, telle que $P(\beta x - \alpha y)$, est le moment de la force P à tourner le solide autour de l'axe fixe (Oz), puisque la composante $P\gamma$, parallèle en A à cet axe, ne saurait tourner le solide dans un sens plutôt qu'en sens contraire. Ainsi chacune de ces trois équations exprime et démontre que le moment de la résultante autour d'un axe quelconque, est égal à la somme des moments des composantes autour du même axe. De plus, en prenant le rayon vecteur $\overline{OA} = r$, $\widehat{AOx} = r, \widehat{x} = \lambda$, $\widehat{AOy} = \mu$, $\widehat{AOz} = \nu$, on a: $x = r\cos\lambda$, $y = r\cos\mu$, $z = r\cos\nu$; et les moments d'une force telle que P, autour des trois axes (Ox, Oy, Oz) censés tour-à-tour fixe, deviennent respectivement:

$$P.r(\cos\gamma.\cos\mu - \cos\beta.\cos\nu), \quad P.r(\cos\alpha.\cos\nu - \cos\gamma.\cos\lambda);$$
$$P.r(\cos\beta.\cos\lambda - \cos\alpha.\cos\mu),$$

ou, plus abrégé, en entendant par les lettres adoptées, les cosinus mêmes des angles:

$$P.r(\gamma\mu - \beta\nu), \quad P.r(\alpha\nu - \gamma\lambda), \quad P.r(\beta\lambda - \alpha\mu),$$

et les équations précédentes prendront la forme:

$$R.r(B\lambda - A\nu) = P.r(\beta\lambda - \alpha\mu) + P'.r(\beta'\lambda - \alpha'\mu) + \text{etc.}$$

Désignons par (λ', μ', ν') la direction de la normale en O au plan principal de la résultante, c'est-à-dire au plan déterminé par le point fixe (O) et par la ligne d'action $\overline{AR}$ de cette force; et soient $\overline{ON}$, $\overline{ON'}$, $\overline{ON''}$ ... les perpendiculaires en ce point aux plans principaux (O, A, P), (O, A, P'), (O, A, P'') .... En nommant encore φ l'angle compris entre R, r, on transforme les resultats obtenus, et d'après le principe établi, en ces autres relations:

$$Rr.\sin\varphi.\nu' = Pr.\sin(\widehat{P',r}).\cos(\widehat{NOz}) + P'r.\sin(\widehat{P',r}).\cos(\widehat{N'Oz}) + \cdots$$
$$Rr.\sin\varphi.\lambda' = Pr.\sin(\widehat{P',r}).\cos(\widehat{NOx}) + P'r.\sin(\widehat{P',r}).\cos(\widehat{N'Ox}) + \cdots$$
$$Rr.\sin\varphi.\mu' = Pr.\sin(\widehat{P',r}).\cos(\widehat{NOy}) + P'r.\sin(\widehat{P',r}).\cos(\widehat{N'Oy}) + \cdots$$

Faisant les carrés et ajoutant membre-à-membre, on a:

$$R^2r^2.\sin^2\varphi = \Sigma P^2r^2.\sin^2(\widehat{P,r}) + 2\Sigma Pr.\sin(\widehat{P,r})P'r.\sin(\widehat{P',r}).\cos(\widehat{NON'})$$

et comme $r.\sin\varphi$, $r.\sin(\widehat{P,r})$, $r.\sin(\widehat{P',r})$ ... sont les perpendiculaires abaissées du point fixe sur les lignes des forces R, P, P', ... respectivement, la formule démontre, que *le carré du moment principal de la résultante de diverses forces concourantes, est égal à la somme des carrés des moments principaux composants, augmentée de la double somme des produits de ceux-ci, pris deux-à-deux, et par le cosinus de l'angle des deux axes ou plans principaux correspondants.*

C'est ce principe général de composition qui répond à la composition générale des forces, resumée par la formule $R^2 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP'\cos(\widehat{P,P'})$: à laquelle il faut ajouter toutefois que la résultante d'un nombre quelconque des forces concourantes agit suivant la ligne droite qui joint leur commun point d'application au centre des moyennes distances des extrêmités de toutes les forces; et qu'elle vaut cette droite autant de fois qu'il est marqué par le nombre de forces partielles. Ce dernièr théorème dû à Mr. *Chastes*, est la vraie généralisation du parallélogramme des forces. Mais cette loi de composition des moments, que j'ai cru utile aussi de démontrer dans mon second mémoire d'après des considérations dynamiques, ne subsiste que pour les forces concourantes, et pour les moments principaux des forces. On peut comparer aussi la démonstration précédente à la démonstration plus géométrique exposée dans le traité de mécanique de Mr. *Gaubert;* ouvrage élaboré d'après les leçons de Mr. *Cauchy*.

Remarque IV.

Le théorème fondamental de l'excellent mémoire de Mr. *Schweins* revient à dire que la quantité $\mu.\cos(\widehat{AOR}).R$, dans laquelle μ exprime le moment principal en (O) d'un système de forces, tandis que $\overline{OA}$ est l'axe principal en ce point, et $\overline{OR}$ la direction de la résultante de transport, conserve une valeur constante, indépendante de la position du centre ou de l'origine (O) et de la direction des axes rectangles de comparaison en ce point; et comme pour des forces données la quantité R est d'elle-même invariable, l'énoncé précédent revient à dire que le moment total de plusieurs forces autour d'un

axe quelconque, parallèle à leur résultante de transport, est le même pour tous les axes de ce genre; et tel est aussi le théorème qui se trouve démontré dans le (§. I.) 3ème partie de *mon essais sur le centre de forces.* En outre, le moment principal ainsi estimé $\mu.\cos(\widehat{AOR})$, est égal au plus petit de tous les moments principaux. En envisageant ensuite ce théorème, ou plutôt l'équation $NX+MY+LZ=\text{const.}=K$, directement établie par l'auteur cité, du simple point de vue analytique, on peut affirmer qu'elle exprime un fait analogue à la condition d'une résultante effective; et ce fait est plus général dans un sens, et plus restreint dans un autre. Car dans l'hypothèse d'une force unique effective, la fonction K devient nulle et conserve cette valeur nulle pour tous les systèmes de forces, reductibles chacun à une force unique. Au contraire, la quantité K, qui est plus grande ou plus petite que zéro, doit varier en général d'un système de forces à un autre, quand cette reduction à une force unique n'a plus lieu.

Remarque V.

Dans les dernières lignes de mon mémoire du centre de forces, j'ai indiqué une espèce de construction géométrique de chaque couple de forces, équivalent à un système de forces données. Depuis lors j'ai trouvé une autre solution géométrique qui me paraît plus satisfaisante, parcequ'elle n'emprunte rien à des équations de condition analytiques: elle repose sur une transformation aussi simple qu'ingénieuse, établie par Mr. *Poncelet* dans sa mécanique industrielle, savoir: Quel que soit le système donné de forces $P, P', P'', \ldots$, on peut toujours choisir trois points quelconques de l'espace, B, C, D, invariablement liés entr'eux et au système rigide, joindre les points d'application $A, A', A'', \ldots$ des forces à chacun de ces trois sommets B, C, D, et substituer à chaque force P ses trois composantes suivant les arêtes $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ du tétraëdre $ABCD$ pour la force P, et de même pour $P', P'', \ldots$. Il est vrai que la ligne d'action de la force P peut laisser d'un même côté de l'espace l'ensemble des trois arêtes correspondantes; mais dès lors il faut décomposer la force P suivant l'une de ces arêtes et suivant les prolongements des deux autres. De cette façon on réduira d'abord toutes les forces données, à trois groupes de forces qui se coupent en un même sommet B pour le premier groupe, au sommet C pour le second, et au sommet D pour le troisième. Soient S, T, U les résultantes respectives (Pl. II. Fig. 1) des groupes en B, C, D. Le système (S, T, U)

est donc équivalent au système primitif de forces. Cela posé: suivant la ligne d'action DU de la force U en D je puis mener un plan (UDr) parallèle à la ligne $\overline{BS}$ de la force S en B, et un second plan $(UD\sigma)$ parallèle à la ligne $\overline{CT}$ de la force T en C; ensuite je mène suivant SB un plan (S, S') parallèle au plan (UDr), et suivant $\overline{TC}$ un plan (T, T') parallèle au plan $(UD\sigma)$. La ligne d'intersection (HK) des deux plans $(S, S'; T, T''')$ ainsi construits, sera une parallèle à la ligne d'action $\overline{DU}$ de la force U en D; et elle percera le plan du triangle BCD quelque part en un point K. De plus, HK, DU formeront un seul et même plan; la force S doit rencontrer l'intersection KH quelque part, et dans le plan même BKH; et la force T doit rencontrer cette même ligne considéré comme appartenant au plan CKH. Prenons sur KH un point quelconque N, et décomposons S en deux, l'une S' suivant BK et laquelle agira de K vers B ou de B vers K, et l'autre suivant $\overline{BN}$ ou $\overline{NB}$. De même la force T peut se remplacer par ses deux composantes, l'une T'' suivant la ligne $(\pm CK)$ et l'autre suivant la ligne $(\pm CN)$. De même encore la troisième force U peut-être remplacée par ses composantes suivantes $\overline{DN}$ et $\overline{KD}$ prolongés. Nous avons ainsi deux groupes de composantes: les unes (S', T'', U') concourent au sommet K et dans le plan même du triangle; les autres concourent au sommet (N) de la droite KH. Le premier groupe est évidemment reductible à une force unique $R_{,}$, passant par le point K et agissant dans le plan du triangle BCD, et le second est reductible à une force unique $R_{,,}$, passant par le sommet (N) et croisant généralement dans l'espace la ligne de $R_{,}$: car cette seconde résultante ne passe pas nécessairement suivant la droite d'intersection NK. Pour avoir un 2ème, 3ème, 4ème ... couple de forces, on peut d'abord conserver les trois points arbitraires choisis B, C, D, et se borner à choisir le point N sur la droite KH plus loin ou plus proche du point K. Pour avoir une seconde suite de couples de forces, on peut choisir un autre plan triangulaire, et ainsi de suite indéfiniment. Faisons remarquer que cette transformation démontre en même temps immédiatement la réductibilité d'un système quelconque de forces à deux autres forces. On pourrait l'employer aussi d'une manière fort simple pour rechercher les conditions d'équilibre d'un système rigide. C'est ce que Mr. *Gaubert* a fait dans son ouvrage, mais sans citer la note et l'ouvrage de Mr. *Poncelet*. (Voir la mécanique industrielle de *Poncelet*. T. II, p. 107, édition Liège 1839. *Gaubert*, traité de mécanique. Paris 1841).

Remarque. VI.

Dans les (§. 13. et 14.) du mémoire cité, Mr. ***Schweins*** resout la question suivante: Étant données la direction $(\alpha\beta\gamma)$ et la position (p, q) d'un axe ou d'une droite (d), on demande de déterminer, si c'est possible, un point $(x_0 y_0 z_0)$ de cet axe pour lequel l'axe (d) soit lui-même l'axe du moment principal en ce point, d'un système donné de forces. Nous croyons devoir reprendre la solution de cette question, dans le but d'obtenir les équations de condition que fournit le problème, en fonction des données immédiates, savoir X, Y, Z, N, M, L, de la direction (α, β, γ), et des constantes (p, q) qui fixent la position de la droite (d) *). Les équations de celles-ci sont:

$$(d.) \qquad \alpha y - \beta x = p, \quad \alpha z - \gamma x = q, \ \ldots$$

et elles donnent:

$$(1.) \qquad \alpha y_0 - \beta x_0 = p, \quad \alpha z_0 - \gamma x_0 = q, \ \ldots$$

Si l'on désigne par N_0, M_0, L_0 les sommes des moments des forces autour de trois axes en (x_0, y_0, z_0) respectivement parallèles aux axes coordonnés (Ox, Oy, Oz), nous avons d'après l'auteur cité, sauf une permutation de lettres:

$$N_0 - N = Yz_0 - Zy_0; \quad M_0 - M = Zx_0 - Xz_0; \quad L_0 - L = Xy_0 - Yx_0.$$

Mais R désignant toujours la résultante de transport, on a d'après le théorème rappelé dans la remarque IV., pour la détermination du moment principal $\mathfrak{N}_0$ au point (x_0, y_0, z_0), l'équation de condition suivante:

$$\mathfrak{N}_0 = K : R\cos(\widehat{R, d}) = K : (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = K : R';$$

R' dénotant pour abréger la projection de la résultante de transport sur la droite donnée (d). Cela donne par le principe fondamental des moments:

$$N_0 = \alpha\mathfrak{N}_0 = \alpha K : R'; \quad M_0 = \beta K : R'; \quad L_0 = \gamma K : R'.$$

Par là les équations en $N_0 - N$ deviennent:

$$Yz_0 - Zy_0 = \frac{\alpha K}{R'} - N; \quad Zx_0 - Xz_0 = \frac{\beta K}{R'} - M; \quad Xy_0 - Yx_0 = \frac{\gamma K}{R'} - L.$$

Si l'on tire des deux dernières les valeurs de y_0, z_0, pour les substituer dans la première, on retrouve la valeur même de K; comme cela doit arriver. Ainsi dans la détermination ultérieure des quantités $(x_0 y_0 z_0)$ il suffira d'employer les deux dernières équations en combinaison des équations (1.). Or l'élimination entre ces quatre équations distinctes pour trois inconnues, conduit d'abord

*) Mr. *Schweins* adopte ici les notations plus symétriques A, B, C, L, M, N.

à l'équation de condition suivante:

$$\frac{\alpha Y-\beta X}{\alpha Z-\gamma X}=\frac{pR'X-\alpha\gamma K+\alpha R'.L}{qR'X+\alpha\beta K-\alpha R'.M},$$

laquelle devient, dans son état le plus général, après la suppression d'un facteur commun X qui n'est pas nul en général:

$$(C.)\qquad -K+R'\{\alpha N+\beta M+\gamma L+q(\alpha Y-\beta X)-p(\alpha Z-\gamma X)\}=0.$$

C'est cette équation qui correspond à l'équation de condition (28.) ou (29.) de l'auteur cité. Faisons observer que l'on ne troublera en rien la généralité des conclusions à établir, en prenant $p=0$, $q=0$; car cela n'assigne pas une position particulière à la droite (d); puisque, quelle que soit cette position, on peut toujours placer l'origine des coordonnées en un point quelconque désigné de (d). En prenant les choses de ce point de vue, on a plus simplement $K-R'(\alpha N+\beta M+\gamma L)=0$, ou bien:

$$(C'.)\qquad K-(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)(\alpha N+\beta M+\gamma L)=0.$$

On peut remarquer que $(\alpha N+\beta M+\gamma L)$ est le moment total des forces autour de la droite (d), de même que $\alpha X+\beta Y+\gamma Z$ est la somme de leurs projections orthogonales sur cette droite. Si les forces n'admettent pas de résultante effective, et que la droite (d) soit située dans le plan principal relatif à l'origine, ou à l'un quelconque de ses points, ce moment devient nul de lui-même, et $(C'.)$ amène le résultat absurde $K=0$. De là résulte la conclusion déjà établie par Mr. *Schweins;* mais à cela on peut ajouter que si les forces admettent une résultante effective dans cette hypothèse de position et de direction de (d), l'équation $(C'.)$ est satisfaite identiquement, quelle que soit d'ailleurs la direction de (d) dans le plan principal en (O). Cette circonstance est évidente d'un autre côté, puisque le moment total des forces, ou ici celui de leur résultante effective, à tourner le système autour d'un axe quelconque situé dans un plan principal quelconque, est évidemment nul; car eu égard à notre premier mémoire, la résultante est toujours dans ce plan même; et soit qu'elle coupe l'axe (d), soit qu'elle lui soit parallèle, elle a une énergie de rotation nulle. L'analyse de la question reproduit aussi cette circonstance, puisqu'elle donne $N_0=0$, $M_0=0$, $L_0=0$ pour $K=0$. En général, l'hypothèse de $K=0$ réduit $(C'.)$ à la condition:

$$(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)(\alpha N+\beta M+\gamma L)=0,$$

ou bien à $\alpha X+\alpha Y+\gamma Z=0$ (car l'égalité à zéro de l'autre facteur ramène à ce qui vient d'être exposé). On voit par là que si les forces admettent une résultante, toute droite (d) admettra seulement un centre principal, si elle

croise à angle droit la direction de cette résultante; car pour une telle direction seulement on peut avoir $\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0$. Mais si les forces données n'admettent pas de résultante effective, on ne saurait plus trouver aucune droite normale à la résultante de transport qui satisfasse à la condition prescrite: puisque toute direction de ce genre, donnant $\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0$, réduirait la condition $(C'.)$ au résultat absurde $K=0$. Supposons en troisième lieu que la droite (d) soit parallèle à la résultante de transport. Dès lors l'équation $(C''.)$ devient identique, car elle revient ainsi à $K-K=0$. Mais il faut encore examiner le lieu du point cherché sur la droite (d). Or on trouve d'abord pour déterminer les valeurs générales de x_0, y_0, z_0, les formules:

$$x_0=\frac{\alpha R'L-\alpha\gamma K+pXR'}{(\alpha Y-\beta X)R'}, \qquad y_0=\frac{Y}{X}\cdot x_0+\left(\frac{\gamma K}{R'}-L\right),$$

$$z_0=\frac{Z}{X}\cdot x_0-\left(\frac{\beta K}{R'}-M\right);$$

et celles-ci donnent dans l'hypothèse admise, $x_0=\infty$, $y_0=\infty$, etc.

Ainsi, sur une droite quelconque, parallèle à la résultante de transport, on ne saurait plus trouver aucun point à distance finie qui puisse être considéré comme centre principal de cette droite même. Néanmoins si l'on avait en même temps $\alpha RL-\alpha\gamma K+pX.R=0$, les quantités x_0, y_0, z_0 deviendraient $\frac{0}{0}$, et eu égard à la valeur de p, résultant de cette nouvelle supposition, on reproduirait par là les équations suivantes:

$$\alpha Ry_0-\beta Rx_0=\frac{KZ}{R^2}-L, \quad \ldots. \quad (O'R')$$

qui caractérisent l'axe du moindre moment principal, ou la ligne des équations que nous avons déjà notées par $(O'R')$ dans notre premier mémoire ($3^{\text{ème}}$ partie §. I.). Du reste, les résultats de cette troisième supposition étaient évidents d'avance, et en vertu du théorème fondamental, rappelé dans la ***Remarque IV.***

Si dans les deux dernières des trois équations précédentes, qui subsistent pour le cas le plus général, je substituais la valeur de x_0 fournie par la première, j'aurais les coordonnées (x_0, y_0, z_0) du centre placé sur une droite $(\alpha\beta\gamma, p, q)$. Si l'on éliminait ensuite de nouveau la quantité p, on retrouverait manifestement les deux mêmes équations $y_0=\frac{Y}{X}\cdot x_0+\text{etc.}$, $z_0=\frac{Z}{X}\cdot x_0-\text{etc.}$ qui conviennent à une ligne droite parallèle à la résultante de transport. Ainsi le lieu des centres d'une série de droites parallèles, de direction (α, β, γ) et soumises, quant aux quantités (p, q) qui en fixent la position, à la condition $(C.)$, est une ligne droite parallèle à la résultante ou à l'axe $(O'R')$. Il est évident

par là que la condition (*C.*), considérée comme ayant lieu entre les deux quantités (p, q), doit exprimer que toutes les droites parallèles $(\alpha\beta\gamma)$ sont dans un même plan. C'est ce qu'on peut en effet vérifier, en remarquant que les équations de l'une quelconque de ces droites sont $\alpha y - \beta x = p$, $\alpha z - \gamma x = q$; et en substituant ces valeurs de p, q dans (*C.*), on trouve:

$$(\beta \mathbf{Z} - \gamma \mathbf{Y})x + (\gamma \mathbf{X} - \alpha \mathbf{Z})y + (\alpha \mathbf{Y} - \beta \mathbf{X})z = \frac{\mathbf{K}}{\alpha \mathbf{R}'} - \frac{\alpha \mathbf{N} + \beta \mathbf{M} + \gamma \mathbf{L}}{\alpha},$$

c'est-à-dire une équation linéaire entre les coordonnées courantes de l'une quelconque de ces droites; et l'on voit que ce plan est lui-même parallèle à l'axe de transport ($\mathbf{O'R'}$). Ainsi, ayant un plan quelconque parallèle à la résultante de transport d'un système de forces, et traçant dans ce plan une série illimitée de droites parallèles, le lieu de leurs centres est la droite même du plan, parallèle à cette résultante. Si l'on se donne la direction (α, β, γ) entre des limites convenables, que nous assignerons plus loin, la direction et la position du plan en résulteront. En effet, soit (λ, μ, ν) la normale au plan, et p_1 la longueur de cette direction, entre l'origine et le plan: nous aurons d'après le théorème de la ***Remarque I:***

$$(\mathit{D}.)\quad \sin\varphi.\lambda = \left(\beta \cdot \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{R}} - \gamma \cdot \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{R}}\right),\quad \sin\varphi.\mu = \gamma \cdot \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{R}} - \alpha \cdot \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{R}},\quad \sin\varphi.\nu = \alpha \cdot \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{R}} - \beta \cdot \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{R}}.$$

φ désigne l'angle entre la direction donnée et celle de ($\mathbf{O'R'}$). Ces équations donnent λ, μ, ν par α, β, γ, $\mathbf{R}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$, et par φ, si toutefois on veut prendre φ comme donnée immédiate; et réciproquement elles feront connaître α, β, γ par $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \lambda, \mu, \nu$.

Dans tout cas on peut mettre l'équation du plan sous la forme

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \frac{\mathbf{K}}{\alpha \mathbf{R}' \mathbf{R} \sin\varphi} - \frac{\alpha \mathbf{N} + \beta \mathbf{M} + \gamma \mathbf{L}}{\alpha \mathbf{R} \sin\varphi},$$

d'où résulte:

$$(\mathit{E}.)\quad p_1 = \frac{\mathbf{K}}{\alpha \mathbf{R}' \mathbf{R} \sin\varphi} - \frac{\alpha \mathbf{N} + \beta \mathbf{M} + \gamma \mathbf{L}}{\alpha \mathbf{R} \sin\varphi}.$$

Mais si le plan est connu, ce qui suppose (λ, μ, ν, p_1) des données immédiates de la question, la quantité $\sin\varphi$ ne doit plus être prise que comme abréviation analytique de sa valeur $\sin\varphi = \sqrt{\left[\left(\beta \cdot \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{R}} - \gamma \cdot \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{R}}\right)^2 + \left(\gamma \cdot \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{R}} - \alpha \cdot \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{R}}\right)^2 + \text{etc.}\right]}$. Les équations (*D.*) fourniront α, β, γ; et l'égalité (*E.*) sera l'équation de condition à laquelle il faut soumettre constamment la direction cherchée (α, β, γ), pour la rendre possible.

Remarque VII.

Dans les paragraphes (17, 18) de son mémoire, Mr. ***Schweins*** démontre que si des plans principaux d'un même système des forces se coupent suivant une droite (d), de direction $(\alpha\beta\gamma)$, le lieu des centres correspondants est une autre droite (d'), de direction $(\alpha', \beta', \gamma')$; et que le lieu des centres des plans principaux, se coupant suivant la droite (d'), est la première droite (d) elle même; de sorte que les deux droites (d, d') sont dans une dépendance mutuelle et parfaitement reciproque. Je crois rendre assez exactement l'idée de MMrs. ***Moebius*** et ***Schweins,*** en nommant les lignes de ce genre des ***droites réciproques*** (Gegenlinien). Je vais essayer de donner la construction géométrique d'une droite (d'), réciproque d'une droite (d), donnée de ***position*** et de ***direction.*** À cet effet soit $\alpha y = \beta x + p$, $\alpha z = \gamma x + q$ ... (d) la ligne donnée. En opérant d'après la méthode même de l'auteur cité, on trouve pour (d') la droite d'intersection des deux plans suivants:

$$(F.)\quad \left(\beta\cdot\frac{X}{R}-\alpha\cdot\frac{Y}{R}\right)z_1+\left(\gamma\cdot\frac{Y}{R}-\beta\cdot\frac{Z}{R}\right)x_1+\left(\alpha\cdot\frac{Z}{R}-\gamma\cdot\frac{X}{R}\right)y_1=\frac{\alpha N+\beta M+\gamma L}{R},$$

$$(G.)\quad (pX+L)z_1+(qY-pZ+N)x_1+(M-qX)y_1 = pM+qL.$$

Or en plaçant l'origine des coordonnées en un point quelconque de (d) même, on a $p=0$, $q=0$; et l'on voit que l'équation du second plan devient celle du plan principal même, relatif à cette origine prise comme centre de moments. De plus, on s'apperçoit aussi aisément par l'équation (F) que le premier plan est à la fois parallèle à la droite (d) (α, β, γ) et à la résultante de transport de direction $(X:R, Y:R, Z:R)$; et que la longeur de la perpendiculaire abaissée de l'origine (O) prise sur (d) à ce premier plan (F), vaut le second membre, divisé par $\sin(\widehat{R, d}) = \sin\varphi$, ou qu'elle équivaut à:

$$(\alpha N+\beta M+\gamma L):R\sin\varphi.$$

En dernier lieu on peut faire observer que l'expression $\alpha N+\beta M+\gamma L$ ou $\mathfrak{M}$, pour abréger, est le moment total de toutes les forces par rapport à la droite (d). De là résulte la construction suivante de (d'), ligne d'intersection des plans (F, G). Par un point quelconque (O) de (d) je mène une droite (OR) parallèle à la résultante de transport; je forme ainsi un plan (dOR) parallèle à (F). Sur ce plan j'élève une perpendiculaire $p_1 = \mathfrak{M}:R\sin\varphi$; par l'extrémité de p_1 ainsi tirée, je mène un plan parallèle à celui (ROd); ce sera le plan (F): je construis enfin en (O) le plan du moment principal des forces, ou le plan (G). La ligne d'intersection des deux plans ainsi construits, donnera en position et en direction la droite (d') ou $(\alpha', \beta', \gamma', p', q')$. Si l'on repète

la même construction pour un second point (O_1) de (d), puis pour un troisème: comme la distance normale p_1 doit rester la même en valeur et en direction, on voit que tous les plans principaux relatifs aux autres successifs $(O, O_1, O_2, \ldots)$ choisis sur (d), doivent se couper mutuellement et le plan fixe (F) suivant une même ligne droite (d'). Il s'ensuit de là que l'on peut même se passer du plan (F), dans la construction de cette droite; et que tout revient à construire les deux plans principaux relatifs à deux points quelconques de la droite donnée; qu'en outre cette droite, d'abord comme ligne d'intersection d'une suite de plans principaux, auquel repond le lieu linéaire de centre (d'), est à son tour le lieu des centres d'une suite de plans principaux se coupant suivant la droite (d'). Cette construction même fait donc ressortir la parfaite reciprocité des deux droites (d, d'). Ajoutons à cela que la quantité géométrique $p_1 = \mathfrak{M} : R \sin\varphi$ a une signification immédiate; elle exprime la plus courte distance entre les deux droites dont-il s'agit.

Remarque VIII. Suite.

Pour obtenir les éléments $(\alpha', \beta', \gamma', p', q')$ relatifs à (d'), par voie d'analyse, on peut procéder de la manière suivante. (λ, μ, ν) étant la direction de la normale p_1 au plan fixe (F), nous avons:

$$(H.)\qquad \begin{cases} \nu \sin\varphi = \beta \cdot \dfrac{X}{R} - \alpha \cdot \dfrac{Y}{R}, \\ \lambda \sin\varphi = \gamma \cdot \dfrac{Y}{R} - \beta \cdot \dfrac{Z}{R}, \\ \mu \sin\varphi = \alpha \cdot \dfrac{Z}{R} - \gamma \cdot \dfrac{X}{R}: \end{cases}$$

formules qui font connaître (ν, λ, μ) et dans lesquelles on peut prendre $\sin\varphi = \sin(\widehat{dOR})$ comme donnée immédiate ou comme simple abréviation d'une signification géométrique immédiate.

Nommons ψ l'angle compris entre l'axe principal OA en (O) et entre la normale p_1 de direction (λ, μ, ν): $\widehat{AOp_1} = \psi$. En remarquant que la droite (d') est à la fois normale à p_1 et à l'axe (OA), et désignant par $\mathfrak{N}$ le moment principal des forces autour de OA, ce qui revient à prendre $N^2 + M^2 + L^2 = \mathfrak{N}^2$, pour abréger, nous obtiendrons, toujours en vertu du théorème de la Remarque I.:

$$(I.)\qquad \sin\psi\alpha' = \frac{\mu L - \nu M}{\mathfrak{N}},\quad \sin\psi\beta' = \frac{\nu N - \lambda L}{\mathfrak{N}},\quad \sin\psi\gamma' = \frac{\lambda M - \mu N}{\mathfrak{N}},$$

d'où

$$\mathfrak{N}^2 \sin^2\psi = (\mu L - \nu M)^2 + (\nu N - \lambda L)^2 + (\lambda M - \mu N)^2.$$

Reste à trouver $(\alpha', \beta', \gamma')$ en fonction des données immédiates $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Or on déduit aisement des équations $(H.)$:

$$\mu L - \nu M = (\alpha K - \mathfrak{M} X) : R \sin\varphi; \quad \nu N - \lambda L = (\beta K - \mathfrak{M} Y) : R \sin\varphi, \ \ldots,$$

ce qui donne par substitution dans $(I.)$:

$$(K.) \quad \alpha' = (\alpha K - \mathfrak{M} X) : R \sin\varphi \mathfrak{N} \sin\psi; \quad \beta' = (\beta K - \mathfrak{M} Y) : R \sin\varphi \mathfrak{N} \sin\psi;$$
$$\gamma' = (\gamma K - \mathfrak{M} Z) : R \mathfrak{N} \sin\varphi \sin\psi,$$

d'où:

$$R^2 \sin^2\varphi \mathfrak{N}^2 \sin^2\psi = K^2 + R^2 \mathfrak{M}^2 - 2 \mathfrak{M} K (\alpha X + \beta Y + \gamma Z).$$

Pour achever la solution analytique du problème, il faut trouver encore les éléments linéaires qui déterminent la position de (d'). Or l'origine étant par hypothèse choisie sur (d), les équations (F, G) deviennent, eu égard aux conditions (H) et aux abréviations admises:

$$\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1 = \mathfrak{M} : R \sin\varphi; \quad N x_1 + M y_1 + L z_1 = 0;$$

et comme la droite $\alpha' y_1 = \beta' x_1 + p', \ \alpha' z_1 = \gamma' x + q' \ldots (d')$, doit se trouver située dans chacun de ces plans, il en résulte les équations de condition nouvelles, (car on néglige celles qui sont déjà établies):

$$\mu p' + \nu q' = \alpha' \mathfrak{M} : R \sin\varphi, \quad M p' + L q' = 0,$$

d'où:

$$p' = \alpha' \mathfrak{M} L : R \sin\varphi (\mu L - \nu M), \ q' = -\alpha' \mathfrak{M} M : R \sin\varphi (\mu L - \nu M),$$

ou bien

$$(K'.) \quad p' = \alpha' M L : (\alpha K - \mathfrak{M} X), \ q' = -\alpha' \mathfrak{M} M : (\alpha K - \mathfrak{M} X).$$

Remarque IX. Suite.

La solution de la question générale étant ainsi établie, examinons le cas particulier remarquable où le système de forces admet une résultante effective, et pour lequel la question pourrait au premier abord paraître illusoire. Comme alors la quantité $K = 0$, on obtiendra par les fourmules trouvées:

$$\alpha' = -X : R; \ \beta' = -Y : R; \ \gamma' = -Z : R; \ p' = -\alpha' L : X = L : R,$$

car la seconde équation $(K.)$ donne $R \sin\varphi \mathfrak{N} \sin\psi = R\mathfrak{M}$ pour $K = 0$; et comme la valeur générale de $q' = -\alpha' \mathfrak{M} M (\alpha K - \mathfrak{M} X)$ peut-être mise aussi sous la forme $q' = -\beta' \mathfrak{M} M : (\beta K - \mathfrak{M} Y)$, elle devient présentement $q' = -M : R$. Il s'ensuit de là que dans ce cas la droite (d') devient indépendante de (d) et qu'elle reste la même quelle que soit cette dernière. Les équations en seront:

$$Yx - Xy = L, \quad Xz - Zx = M,$$

et celles-ci caractérisent la ligne d'action même de la résultante effective.

Ainsi: quand le système de forces admet une telle force unique, on peut dire que la ligne d'action de celle-ci est le lieu des centres de moments de tous les plans principaux imaginables, et qu'elle est en même temps la ligne d'intersection des plans principaux relatifs a tous les points de l'espace, pris tour-à-tour comme centres de moments. ***Autrement dit:*** Dans le cas d'une résultante effective, la ligne d'action de celle-ci et toute autre droite arbitraire de l'espace forment toujours deux droites conjugées ou réciproques. Or ce fait fondamental se trouve déjà établi, dans un sens différent, dans notre mémoire sur le centre de forces.

Remarque. X.

Nous ne nous arrêterons pas aux conséquences qui résultent des formules précédentes et qui se trouvent déjà établies lucidement dans le mémoire de Mr. ***Schweins*** (§. 19, 20, 21, 22, 23 et 24). Il est néanmoins un point sur lequel nous croyons devoir insister de notre côté. La reciproque (d') d'une droite (d), se trouvant placée dans tous les plans principaux relatifs aux divers points de (d), considérés comme centres, il s'ensuit que (d') est également dans le plan principal rélatif au centre principal. Donc toutes les fois que (d) admet un centre principal, sa réciproque (d') doit la croiser à angle droit. À l'inverse la droite (d) doit se trouver dans tous les plans principaux relatifs aux différents points de (d'). Puisque donc (d) croise (d') à angle droit dans l'hypothèse de l'existence d'un centre sur (d), il faut dans cette même hypothèse que l'un de ces plans soit normal à (d'), partant que cette ligne (d') admette un centre principal. De là l'origine de ce qu'on pourrait nommer des ***centres reciproques*** pour le cas de deux droites réciproques orthogonales. Les formules établies donnent pour le cas général la valeur de $\cos(\widehat{d', d})$ par l'équation suivante:

$$\cos(\widehat{d'\,d}) = \frac{K - \mathfrak{M}(\alpha K + \beta Y + \gamma Z)}{R\,\mathfrak{R}\sin\varphi\sin\psi}.$$

En faisant dans celle-ci les hypothéses convenables sur la direction de (d), on peut encore une fois retrouver des propriétés déjà connues, et notamment celle de la remarque IX. Ensuite on voit que la droite (d') croise en général sa réciproque (d) sous un angle droit, si l'on a $\cos(\widehat{d', d}) = 0$, partant:

$$(L.) \qquad K - \mathfrak{M}(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = 0;$$

et cette équation de condition est absolument la même que celle (G') de la ***Remarque VI.*** Ainsi, toute droite seulement qui admet un centre principal,

et qui ne saurait par consequent être ni normale ni parallèle à la résultante de transport, admet une droite réciproque orthogonale.

Remarque XI.

L'identité de l'équation (*L.*) avec celle (*C'.*) étant constatée, et la double signification géométrique en étant reconnue par le rapprochement des Remarques (VI et X), il s'agit de montrer par une espèce de construction géométrique, toute cette *infinité relative* de lignes droites, admettant chacune un autre principal, ou ce qui revient au même, une droite réciproque, d'une direction orthogonale à la direction primitive; et surtout il s'agit d'assigner les limites extrêmes entre lesquelles se trouvent comprises de telles droites pour un ensemble de forces, bien défini. L'origine (*O*) des coordonnées rectangles étant placée en un point désigné de la droite (*d*), rien n'empêche de choisir en ce point (*O*) un axe des abscisses $\overline{Ox}$, parallèle à la résultante de transport; ce qui donne $Y=0$, $Z=0$: 2°. on pourra aussi diriger le plan des (yx) autour de cet axe $\overline{Ox}$, d'après la condition qu'il renferme l'axe principal (*OA*) des forces en ce point. De là résulte la nouvelle simplification $L=0$. Les choses étant ainsi disposées, la condition (*C'.*) ou (*L.*) deviendra, en remettant pour $\mathfrak{M}$ la valeur $\alpha N+\beta M+\gamma L$, ou ici $\alpha N+\beta M$:

$$K-\alpha X(\alpha N+\beta M)=0,$$

ou bien, à cause de $X=R$, et de $K=NX+MY+LZ=NX$:

$$N=\alpha^2 N+\alpha\beta M.$$

Nommons η l'angle compris entre l'axe $\overline{Ox}$ ou $\overline{OR}$ et la projection sur le plan (xOy) ou (xOA) de la droite (*d*) qui est d'abord censée donnée; ϑ l'inclinaison de (*d*) sur ce même plan. Nous pouvons donc remplacer α, β par leurs valeurs en η, ϑ, savoir: $\alpha=\cos\eta.\cos\vartheta$, $\beta=\sin\eta.\cos\vartheta$. Pour exprimer α, β en fonction de tangη, tangϑ seulement, on abrégera encore l'écriture des formules, en prenant tang$\eta=\eta'$, tang$\vartheta=\vartheta'$; et l'on obtiendra ainsi:

$$\alpha=1:\sqrt{(1+\eta'^2)}.\sqrt{(1+\vartheta'^2)},\quad \beta=\eta':\sqrt{(1+\eta'^2)}.\sqrt{(1+\vartheta'^2)}.$$

En reportant ces valeurs dans la condition simplifiée, et posant en outre $\frac{M}{N}=m$, on l'obtient sous cette autre forme:

$$\vartheta'=\pm\frac{\sqrt{(\eta'(m-\eta'))}}{\sqrt{(1+\eta'^2)}}.$$

On voit que pour avoir des valeurs réelles de ϑ', ϑ, il faut prendre η ou η' de manière à avoir constamment une valeur positive de $\eta'(m-\eta')$; on devra

faire par consequent:

$$\eta'(m-\eta') = \varepsilon^2,$$

ε^2 désignant une quantité encore indéterminée dont il faut reconnaître les limites; on obtient ainsi:

$$(M.) \qquad 2\eta' = m \pm \sqrt{(m^2-4\varepsilon^2)}, \quad \vartheta' = \pm\varepsilon : \sqrt{(1+\eta'^2)}.$$

On en conclut que les limites extrêmes de l'indéterminée ε sont $(\pm\frac{1}{2}m)$, partant que l'on peut faire varier ε depuis zéro j'usqu'à chacune de ces limites. Cela démontre que la multiplicité des droites, admettant un centre, est d'autant plus élevée que le rapport m est plus considérable. Les valeurs correspondantes de η', ϑ' sont:

$$\eta' = 0, \quad \eta' = m, \quad \vartheta' = 0 \text{ pour } \varepsilon = 0,$$

$$\eta' = \tfrac{1}{2}m, \quad \vartheta' = \pm\frac{m}{\sqrt{(4+m^2)}} \text{ pour } \varepsilon = \tfrac{1}{2}m,$$

$$\eta' = \tfrac{1}{2}m, \quad \vartheta' = \mp\frac{m}{\sqrt{(4+m^2)}} \text{ pour } \varepsilon = -\tfrac{1}{2}m.$$

En général, en attribuant à ε deux valeurs numériques égales, mais de signes contraires, on obtient à chaque fois le même système de valeurs pour (η', ϑ'), seulement dans un ordre différent pour (ϑ'). Ainsi l'on peut se dispenser de faire varier ε négativement, et admettre parconséquent comme limites 0 et $\frac{1}{2}m$ pour le cas de m positif, ou 0 et $-\frac{1}{2}m$ pour le cas de m négatif. Cela revient encore à faire varier seulement ε entre 0 et $\frac{1}{2}m$, quel que soit m, positif ou négatif. Cela posé, les équations $(M.)$, donnant pour ϑ' deux valeurs égales et contraires pour un même η', et deux valeurs différentes de même signe pour η', lorsqu'on attribue à ε une valeur quelconque comprise entre 0 et $\frac{1}{2}m$: il s'ensuit qu'il y a pour chaque ε bien choisi, quatre solutions différentes, ou quatre droites partant de la même origine: deux de ces droites ont des inclinaisons égales et contraires sur le plan formé par l'axe principal en ce point et par la direction de la résultante de transport, et se trouvent de plus dans un même plan normal en ce point au plan ainsi formé; c'est le cas de

$$\vartheta' = \pm\varepsilon : \sqrt{(1+\eta'^2)}, \quad 2\eta' = m + \sqrt{(m^2-4\varepsilon^2)}.$$

Les deux autres droites ont encore des inclinaisons égales et contraires sur le même plan, et se projettent encore orthogonalement suivant la même droite sur ce plan; elles repondent aux racines

$$\vartheta'' = \pm\varepsilon : \sqrt{(1+\eta''^2)}, \quad 2\eta'' = m - \sqrt{(m^2-4\varepsilon^2)},$$

et il est manifeste que le second couple de droites ne coïncide avec le premier

qu'à la valeur limite de $\varepsilon = \frac{1}{2}m$. On obtient donc de cette manière tous les axes susceptibles d'admettre un centre, en donnant à ε toutes les valeurs possibles depuis $\varepsilon = 0$, jusqu'à $\varepsilon = \frac{1}{2}m$. Quant au cas de $\varepsilon = 0$, qui donne à la fois $\eta' = 0$, $\vartheta' = 0$, il prouve qu'il ne saurait y avoir dans le plan mené suivant $\overline{Ox}$ ou $\overline{OR}$, et normal à (ROA), aucun axe, différent de celui $\overline{OR}$. Nous savons déjà qu'en effet toute droite $\overline{OR}$ admet un centre principal à l'infini, et à toute distance finie, si le point (O) tombe sur l'axe $(O'R')$ lui-même. On pourrait maintenant objecter à cette manière de procéder, qu'elle ne donne pas la construction et les limites de toutes les droites imaginables; mais elle donne tous les axes qui partent d'une même origine désignée; et en choisissant successivement tous les points de l'espace, on parvient à tous les systèmes de solution. Veut-on vérifier ensuite si une droite (d) donnée au hasard, est susceptible d'admettre un centre, et d'avoir parsuite une droite réciproque (d') qui la croise sous l'angle droit, on placera l'origine des coordonnées rectangles en un point quelconque (O) de (d); on menera en (O) une parallèle $\overline{OR}$ à la résultante de transport, on déterminera l'axe $\overline{OA}$ du moment principal en (O), et l'on vérifiera si la direction (α, β, γ) de (d), transformée en (η', ϑ'), est comprise entre les limites $\eta' = \frac{1}{2}m$, $\vartheta' = \pm\frac{m}{\sqrt{(4+m^2)}}$ d'une part, et $\eta' = 0$, m, $\vartheta' = 0$ d'autre part.

Quant à la constante m qui change avec le point fixe donné pour un même système de forces, et d'un système à l'autre pour une même origine (O), comme elle exprime le rapport du moment total autour de l'axe (Oy) normal à (OR) dans le plan (AOR), au moment total autour de OR, on trouve aisément qu'elle se réduit à la quantité $\text{tang}(\widehat{AOR})$. Donc pour chaque point donné (O), la multiplicité des solutions est d'autant plus considérable que l'axe principal (OA) est plus fortement incliné en ce point sur la direction de la résultante de transport; et l'on sait (§. 7. de Mr. *Schweins*) que cette inclinaison augmente avec la distance de (O) à la droite $(O'R')$. Quand (O) se trouve sur cette droite même, on a $m = \text{tang}(\widehat{AOR}) = 0$, partant $\varepsilon = 0$, $\eta' = 0$, $\vartheta' = 0$; ce qui prouve que pour tout point de $(O'R')$, cette ligne est elle-même la droite cherchée et qu'elle est l'unique solution. Mais dans ce cas les formules $(K.)$ donnent $\alpha' = \frac{0}{0}$, $\beta' = \frac{0}{0}$, $\gamma' = \frac{0}{0}$, de sorte que la direction réciproque reste arbitraire.

Pour avoir enfin la direction réciproque, correspondante à l'une quelconque $(\alpha\beta\gamma)$ des solutions précédentes, on remarquera d'abord que la seconde

ligne des équations (**K.**) donne pour $\boldsymbol{Y}=0$, $\boldsymbol{Z}=0$, $\boldsymbol{L}=0$, et à cause de $\mathfrak{M}=\alpha\boldsymbol{N}+\beta\boldsymbol{M}=\frac{\boldsymbol{N}}{\alpha}$, en vertu de la condition du problème, la valeur

$$\boldsymbol{R}\sin\varphi\,.\,\mathfrak{N}\,.\sin\psi = \frac{\boldsymbol{N}.\boldsymbol{R}}{\alpha}\sqrt{(1-\alpha^2)},$$

et la première ligne de (**K.**) réduira ainsi les valeurs α', β', γ' aux suivantes:

$$\alpha' = \sqrt{(1-\alpha^2)}, \quad \beta' = \frac{\alpha.\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2)}}, \quad \gamma' = \frac{\alpha.\gamma}{\sqrt{(1-\alpha^2)}},$$

que l'on calculera aisément après avoir calculé (α, β, γ) ou (η', ϑ').

Les équations (**K'.**) donnent ensuite pour p', q' les valeurs

$$p' = 0, \quad q' = -\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{R}\sqrt{(1-\alpha^2)}}.$$

La valeur $p'=0$ prouve que la projection de la droite conjuguée réciproque (d') sur le plan formé par l'axe principal et une droite parallèle à $(\boldsymbol{O'R'})$ en un point quelconque d'une droite donnée (d) qui admet un centre, passe par l'origine de laquelle partent l'axe principal et la parallèle $(\boldsymbol{OR})$. La droite (d') coupe donc elle-même l'axe en $(\boldsymbol{O})$ normal au plan $(\boldsymbol{AOR})$, et cela en un point qui est le point de rencontre de sa projection sur $(x\boldsymbol{O}z)$ avec le même axe normal $\overline{\boldsymbol{O}z}$. La distance du point de rencontre à l'origine a par conséquent la valeur donnée par l'équation

$$\alpha' z = +q' = -\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{R}\sqrt{(1-\alpha^2)}}; \quad \text{d'ou} \quad z = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{R}(1-\alpha^2)}.$$

Ayant donc une solution (d) en $(\boldsymbol{O})$ ou $(\alpha\beta\gamma)$, on prendra sur la normale en $(\boldsymbol{O})$ au plan $(\boldsymbol{AOR})$ une distance $\boldsymbol{M}:\boldsymbol{R}(1-\alpha^2)$, et par l'extrêmité de cette distance on tirera une droite parallèle à la direction $(\alpha'\beta'\gamma')$; on aura ainsi la position d'une première droite (d'). Nous concluons en même temps de cette construction que les droites réciproques orthogonales d'un système des droites, passant par un même point fixe donné, rencontrent toutes une même droite originaire, perpendiculaire au plan $(\boldsymbol{AOR})$, formé par l'axe principal et par une parallèle à la résultante de transport. Cette propriété des droites réciproques subsiste encore pour le cas plus général où elles ne croisent plus sous des angles droits les lignes primitives; car rien n'empêche de diriger l'axe $\overline{\boldsymbol{O}z}$ du point fixe $(\boldsymbol{O})$ dans un plan normal à l'axe principal $\overline{\boldsymbol{OA}}$; ce qui donne toujours $\boldsymbol{L}=0$, partant $p'=0$.

Remarque XII.

Calculons encore le moment total $\mathfrak{M}'$ des forces autour de la droite réciproque (d') d'une droite (d) en fonction des données générales et immédiates du problème. D'abord il y a à remarquer que (d'), devant se trouver dans le plan principal relatif à l'origine quelconque (O) de (d), la droite (Od'') menée par (O) parallèlement à (d'), doit aussi être dans ce plan; partant que le moment total des forces autour de (Od'') est nulle. Il est en effet aisé de vérifier par les formules obtenues que ce moment total representé par la formule $\alpha' N + \beta' M + \gamma' L$ est nul. Mais en imaginant en un point quelconque $(x_2 y_2 z_2)$ de (d') trois axes parallèles aux axes coordonnés, et nommant N', M', L' les moments des forces autour de ces axes, et $\mathfrak{M}'$ leur moment total autour de (d') même, on a d'abord par le principe fondamental:

$$\mathfrak{M}' = \alpha' N' + \beta' M' + \gamma' L',$$

et comme on a

$$N' = N + Y.z_2 - Z.y_2, \quad M' = M + \text{etc.} \ldots,$$

on obtient par substitution, en tenant compte de l'égalité à zéro de $\alpha' N + \beta' M + \gamma' L$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}' &= \alpha'(Y.z_2 - Z.y_2) + \beta'(Z.x_2 - X.z_2) + \gamma'(X.y_2 - Y.x_2) \\ &= (\alpha' z_2 - \gamma' x_2) Y + (\beta' x_2 - \alpha' y_2) Z + (\gamma' y_2 - \beta' z_2) X,\end{aligned}$$

et comme on a en vertu des équations de (d'): $\alpha' z_2 - \gamma' x_2 = q'$, $\beta' x_2 - \alpha' y_2 = -p'$, partant $\gamma' y_2 - \beta' z_2 = \frac{1}{\alpha'}(\gamma' p' - \beta' q')$, on obtient:

$$\mathfrak{M}' = \frac{X(\gamma' p' - \beta' q')}{\alpha'} + Y.q' - p'.Z.$$

Mais en vertu des valeurs α', β', γ', p', ..., on trouve aisément que le premier terme de ce second membre vaut $-\mathfrak{M} \cdot \frac{NX}{R.\mathfrak{N} \sin\varphi \sin\psi}$, tandis que l'ensemble des deux autres équivaut à $\mathfrak{M} \cdot \frac{NX - K}{R.\mathfrak{N} \sin\varphi \sin\psi}$; ce qui donne pour la quantité cherchée:

$$\mathfrak{M}' = -\mathfrak{M}.K : R.\mathfrak{N} \sin\varphi \sin\psi,$$

ou en remettant pour $R.\mathfrak{N} \sin\varphi \sin\psi$ sa valeur donnée par la seconde ligne des équations $(K.)$:

$$\mathfrak{M}' = -\mathfrak{M} \cdot \frac{K}{\sqrt{(K^2 + R^2\mathfrak{M}^2 - 2\mathfrak{M}.K(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}}.$$

Ainsi, en prenant sur les deux droites originaires (Od, OR), à partir de (O), une ligne K sur $\overline{OR}$, $R.\mathfrak{M}$ sur (Od), on aura le troisième côté égal à $\sqrt{(K^2 + R^2\mathfrak{M}^2 - 2K.\mathfrak{M}.R\cos(d\widehat{OR})}$, et le moment $\mathfrak{M}'$ sera au moment $\mathfrak{M}$, comme le premier côté K est au troisième côté ainsi construit.

Cette loi de composition des moments autour de deux droites ou axes réciproques est analogue à celle des moments principaux que l'on exposera ci-dessous. Nous jugeons inutile de nous arrêter au cas particulier remarquable, déjà examiné par Mr. ***Schweins***, où l'on suppose les droites réciproques à angle droit.

Remarque XIII.

On sait déjà que la plus courte distance entre les lignes réciproques (d, d'), ou la quantité p_1, a la valeur $\mathfrak{M}:\boldsymbol{R}\sin\varphi$. Pour en avoir la vraie position, nommons $(x_1 y_1 z_1)$ l'extrêmité par laquelle elle s'appuie sur (d), et $(x_2 y_2 z_2)$ celle par laquelle elle s'appuie sur (d'). Comme sa direction est évidemment (λ, μ, ν), on a: $x_2 = x_1 + \lambda p_1$; $y_2 = y_1 + \mu p_1$; $z_2 = z_1 + \nu p_1$. Les conditions du problème donnent d'abord l'équation de condition entre constantes connues:

$$(\alpha'\mu - \beta'\lambda)p_1 - p' = ((\alpha'\nu - \gamma'\lambda)p_1 - q')\frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma},$$

et si l'on fait attention à ce que le dernier terme ou facteur de ce second membre se réduit à $-\nu:\mu$, on déduit de là:

$$[(\alpha'\mu - \beta'\lambda)\mu + (\alpha'\nu - \gamma'\lambda)]p_1 = \mu p' + \nu q' = \alpha' p_1;$$

car par le No. 8 on a $\mu p' + \nu q' = \alpha'\mathfrak{M}:\boldsymbol{R}\sin\varphi = \alpha' p_1$; ainsi la condition obtenue devient: $\alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu = 0$, ce qui est évident. On trouve ensuite pour les quantités x_1, y_1, z_1 l'équation suivante:

$$x_1:\alpha = y_1:\beta = z_1:\gamma = -\frac{N}{R\lambda\sin\varphi} - \frac{\mu(K\gamma - \mathfrak{M}Z) - \nu(K\beta - \mathfrak{M}Y)}{R^2\lambda\sin^2\varphi}.$$

Cette méthode de détermination deviendrait illusoire pour le cas où l'on dirigerait l'axe $\overline{Ox}$ parallèlement à la résultante de transport; car on en aurait $\lambda = 0$, $x_1 = \frac{0}{0}$. En éliminant μ, ν, on obtient pour déterminer x_1:

$$(\gamma Y - \beta Z)R^2\sin^2\varphi \cdot \frac{x_1}{\alpha} = -NR^2\sin^2\varphi - (\alpha K + \mathfrak{M}X)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + \alpha\mathfrak{M}.R^2.$$

Remarque XIV.

En concevant en un point quelconque $(O') = (a, b, c)$ de l'espace, trois axes rectangulaires $(O'x', O'y', O'z')$ parallèles à trois axes fixes désignés (Ox, Oy, Oz) qui se coupent au point donné (O), on sait que l'on obtient les moments N', M', L' autour de ces nouveaux axes respectifs $O'x'$, ... par les formules connues:

$$N' = N - (Z.b - Y.c),\quad M' = M - (X.c - Z.a),\quad L' = L - (Y.a - X.b).$$

Mais celles-ci peuvent être présentées sous une autre forme, encore symétrique, et que nous allons indiquer en vue d'une conséquence générale dont elles sont susceptibles. Soit ϱ le rayon vecteur OO' qui joint les deux points données, et (λ, μ, ν) sa direction par rapport aux axes (Ox, Oy, Oz): on a ainsi: $a = \varrho.\lambda$, $b = \varrho.\mu$, $c = \varrho.\nu$, partant:

$$N' = N - R.\varrho\left(\mu.\frac{Z}{R} - \nu.\frac{Y}{R}\right), \quad M' = M - R.\varrho\left(\nu.\frac{X}{R} - \lambda.\frac{Z}{R}\right),$$

$$L' = L - R.\varrho\left(\lambda.\frac{Y}{R} - \mu.\frac{X}{R}\right).$$

Soit $\overline{OR} = R$ en grandeur et en direction la résultante de transport, c'est-à-dire la résultante de toutes les forces ramenées parallèlement à elles-mêmes à l'origine O. Nommons OK l'axe en O normal au plan de (R, ϱ) ou de ROO'. En posant encore $R\widehat{OO'} = \widehat{R, \varrho} = \varphi$, et faisant observer que $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$ sont les cosinus des angles de $\overline{OR}$ avec les axes coordonnées, nous avons:

$$\sin\varphi.\cos(\widehat{KOX}) = \nu.\frac{Y}{R} - \mu.\frac{Z}{R}, \quad \sin\varphi\cos(\widehat{KOY}) = \lambda.\frac{Z}{R} - \nu.\frac{X}{R},$$

$$\sin\varphi\cos(\widehat{KOZ}) = \cdots,$$

ce qui donne par substitution:

$$N' = N + R.\varrho\sin\varphi\cos\widehat{KOX}; \quad M' = M + R.\varrho\sin\varphi\cos\widehat{KOY};$$

$$L' = L + R.\varrho\sin\varphi\cos\widehat{KOZ}.$$

On peut remarquer que $R.\varrho.\sin\varphi$ est le moment principal de la force R appliquée suivant $\overline{OR}$, autour du centre (O'), ou plutôt autour de l'axe et essieu $\overline{O'K'}$ parallèle à $\overline{OK}$. Le terme $R.\varrho\sin\varphi\cos\widehat{KOX}$ exprime donc le moment de la force R ainsi appliquée, autour de l'axe $O'X'$, censé fixe à son tour. Ainsi, connaissant le moment total d'un système de forces autour d'un axe quelconque en un point donné, on obtient leur moment total autour d'un axe parallèle, en ajoutant au premier, celui de la résultante de transport, appliquée au point (O) du système rigide, par rapport à l'axe parallèle. Tel est l'énoncé qui en langage ordinaire renferme chacune des trois égalités précédentes. Ceci posé, dénotons par $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ (la lettre μ a déjà une signification) les moments principaux de l'ensemble de forces, relatifs aux deux centres O, O' respectivement. Nous aurons par ces égalités et en vertu de $\mathfrak{N}^2 = N^2 + M^2 + L^2$, $\mathfrak{N}'^2 = N'^2 + M'^2 + L'^2$, l'équation générale:

$$\mathfrak{N}'^2 = \mathfrak{N}^2 + R^2.\varrho^2\sin^2\varphi + 2R.\varrho\sin\varphi.\mathfrak{N}\cos(\widehat{KOA}) \ \ldots \ (\mathfrak{N}').$$

Ainsi, connaissant le moment principal d'un système de forces, relatif à un centre quelconque (O) donné arbitrairement, on peut déduire de cette formule le moment principal relatif à tout autre centre (O') d'une manière fort simple. Sur l'axe principal $\overline{OA}$ du point (O) et à partir de ce point, on portera une longueur égale numériquement au moment connu $\mathfrak{N}$; on menera une droite $\overline{OK}$ normale au plan que déterminent les deux droites $\overline{OO'}$, $\overline{OR}$; sur $\overline{OK}$ on portera une longueur égale au moment $R.\varrho\sin\varphi$; en joignant les extrémités de ces longueurs ainsi disposées par une droite, on formera un triangle dans lequel cette droite, considérée comme troisième côté, est opposée à l'angle $K\widehat{O}A$, et sera par conséquent la valeur du moment $\mathfrak{N}'$. Telle est la loi générale fort simple de la composition des moments principaux d'un même système de forces, relatifs à deux points quelconques de l'espace, censés invariablement liés au corps rigide sur lequel les forces agissent. Dans notre second mémoire nous croyons seulement l'avoir établie pour le cas d'une force unique; ce qui nous a engagé à y revenir dans le présent travail. Quant à la direction de l'axe principal au point (O'), il faut, comme toujours, la déterminer par les cosinus de ses angles avec les axes coordonnés $(O'x', O'y', O'z')$, ou (Ox, Oy, Oz). Ces cosinus sont pour $\overline{OR}$:

$$\frac{N'}{\mathfrak{N}'} = \frac{N+R.\varrho\sin\varphi\cos(K\widehat{O}x)}{\sqrt{(\mathfrak{N}^2+R^2.\varphi^2\sin^2\varphi+2\mathfrak{N}.R.\varrho\sin\varphi\cos(K\widehat{O}A)}}, \text{ etc.}$$

On peut encore trouver une autre forme et une autre loi de composition, qu'il sera au moins utile d'indiquer rapidement. En nommant P', P', P'', ... les diverses forces données; $\overline{OD}$ la normale au plan que déterminent la ligne $\overline{OO'}$ et une droite en (O) parallèle à P, on trouve par une marche analogue:

$$N' = N+\Sigma.P.\varrho\sin(\widehat{P,\varrho}).\cos(D\widehat{O}x),$$
$$M' = M+\Sigma.P.\varrho\sin(\widehat{P,\varrho}).\cos(D\widehat{O}y), \quad L' = \text{etc. ...},$$

ce qui donne par voie de comparaison:

$$R.\sin(\widehat{OR,OO'})\cos(\widehat{K,Ox}) = \Sigma.P\sin(\widehat{P,\overline{OO'}})\cos(DOx).$$

Mais il serait plus embarassant d'énoncer ces résultats en langage ordinaire; ils offrent quelque chose de moins saisissant. Il est entendu que le signe Σ s'étend à toutes les forces partielles, et que les quantités angulaires $(\widehat{P,\varrho})$ et les directions $\overline{DO}$ changent d'une force à l'autre sous le signe de sommation. Cela étant ainsi établi, reprenons par la loi de la formule $(\mathfrak{N}')$ et examinons en quelques cas particuliers. Elle montre d'abord d'une manière frappante pourquoi le moment principal d'un système de forces dont la résultante de transport est nulle, ne change pas, de quelque façon qu'on déplace le centre de

moments, attendu que les deux derniers termes du second membre de $(\mathfrak{N}')$ renferment chacun la quantité $\boldsymbol{R}$ comme facteur.

Mais quelque remarquable que paraisse ce fait de l'invariabilité du moment principal des forces, pour $\boldsymbol{R} = 0$, il ne sera jamais qu'un fait tout particulier, une conséquence immédiate de la théorie des moments; et nous ne saurions parconsequent admettre ni la nécessité ni l'opportunité de l'ériger en quelque sorte en nouveau principe et comme une de bases de la science.

Supposons en second lieu que les forces admettent une résultante effective, et plaçons l'origine primitive $(\boldsymbol{O})$ en un point quelconque de sa ligne d'action: la formule $(\mathfrak{N}')$ devient alors, en vertu de $\varphi = 0$: $\mathfrak{N}' = \boldsymbol{R}.\varrho.\sin\varphi$; ce qui était évident d'avance. Supposons que le point $(\boldsymbol{O}')$ soit l'un quelconque des points situés dans le plan mené par $(\boldsymbol{O})$ suivant l'axe principal et la direction $\overline{\boldsymbol{OR}}$ de la résultante de transport; dans ce cas l'axe $\overline{\boldsymbol{OK}}$ se trouve nécessairement dans le plan principal, et la formule $(\mathfrak{N}')$ devient:

$$\mathfrak{N}'^2 = \mathfrak{N}^2 + \boldsymbol{R}^2.\varrho^2\sin^2\varphi,$$

et il serait très facile d'énoncer ce résultat en langage ordinaire. Supposons que les forces aient une résultante effective et que le centre $(\boldsymbol{O}')$ soit placé dans le plan principal: on a alors $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} + \boldsymbol{R}.\varrho\sin\varphi$, car $\cos(\widehat{\boldsymbol{KOA}})$ devient $= \boldsymbol{r}$, puisque $\overline{\boldsymbol{OK}}$ coïncidera avec $\overline{\boldsymbol{OA}}$.

Supposons que $(\boldsymbol{O}')$ soit placé en un point quelconque de $\boldsymbol{OR}$, ce qui donne $\sin\varphi = 0$, partant $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$. Ainsi, conformément à ce qui est déjà connu par les résultats de Mr. ***Schweins,*** les moments principaux relatifs aux divers points d'une droite $\overline{\boldsymbol{OR}}$, parallèle à la résultante de transport, sont égaux; et comme le moment total des forces autour de l'axe $\boldsymbol{OR}$ lui-même, ne peut avoir qu'une valeur fixe unique, tous les axes principaux relatifs aux divers points d'une telle droite sont parallèles entr'eux.

Remarque XV.

On fait souvent consister l'analogie de la composition des moments avec celle des forces dans la manière dont le moment principal dépend des moments $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{L}$, comparée à la loi qui lie la résultante de transport $\boldsymbol{R}$ avec ses composantes rectangles. C'est là une analogie qui me paraît bien vague et defectueuse. Il est bien vrai qu'au préalable on peut décomposer une force parallèlement à trois axes rectangles, et estimer de même son moment autour de ces trois axes; et que dès lors son moment principal se déduit des moments composants, de la même manière que la force totale se déduit des com-

posantes rectangles: mais quand il faut trouver le moment autour d'un axe originaire, différent de l'axe principal, il faut déjà modifier cette espèce d'analogie, et dire que ce nouveau moment se déduit maintenant du moment principal, de la même manière que la composante orthogonale d'une force suivant une droite, se déduit de la force principale. D'un autre côté, les forces partielles qui sont données immédiatement, n'étant pas généralement rectangulaires entr'elles, on tombe sur l'inconvient de devoir les décomposer ainsi, avant que de refaire la composition en une force unique, pour arriver à cette analogie de composition. Mais l'analogie véritable entre la composition des moments et celle des forces, nous paraît être celle que nous avons indiquée *à la troisième remarque.*

Quant à la composition du moment principal d'un système quelconque de forces, relatif à un centre (O'), en fonction du moment principal relatif à un autre point donné (O), elle est énoncée à la suite de la formule $(\mathfrak{N}')$ qui la résume. Elle a encore une analogie manifeste avec celle de deux forces seulement qui se coupent; mais avec les forces elles-mêmes qui sont données, il n'y a plus d'autre analogie que celle de la formule dont il s'agit.

Remarque XVI.

Élevons en l'origine (O) une droite OH, perpendiculaire au plan, formé par l'axe principal $\overline{OA}$ et par la direction $\overline{OR}$ de la résultante de transport; et sur cette normale prenons, à partir de O, une distance $p = \mathfrak{N} : R \sin(\widehat{ROA})$. Par l'extrêmité de p ainsi formé, menons un plan, parallèle au plan originaire AOR: ce plan ainsi construit, sera le lieu géométrique de tous les centres en chacun desquels l'axe principal des forces données croise à angle droit l'axe principal relatif à l'origine. En effet: en cherchant le point O' ou (a, b, c) de l'espace pour lequel l'axe principal correspondant $O'A'$ soit à angle droit avec l'axe OA, on doit poser la condition

$$N.N' + M.M' + L.L' = 0$$

laquelle devient par la substitution des valeurs de N', M', L', en fonction de N, M, L, a, b, c:

$$\left(\frac{L}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{Y}{R} - \frac{M}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{Z}{R}\right)a + \left(\frac{N}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{Z}{R} - \frac{L}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{X}{R}\right)b + \left(\frac{M}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{X}{R} - \frac{N}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{Y}{R}\right)c = \frac{\mathfrak{N}}{R}.$$

Mais $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ dénotant la direction de la ligne p_1 normale au plan (OA, OR), on a encore une fois:

$$\alpha_1 . \sin(\widehat{AOR}) = \frac{L}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{Y}{R} - \frac{M}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{Z}{R}, \quad \beta_1 . \sin(\widehat{AOR}) = \frac{N}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{Z}{R} - \frac{L}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{X}{R}, \text{ etc.}$$

et le lieu des points (a, b, c) s'exprime par l'équation précédente qu'on peut mettre sous la forme

$$\alpha_1.a+\beta_1.b+\gamma_1.c = \mathfrak{R}:R\sin(\widehat{AOR});$$

ce qui est le plan même de la construction indiquée ci-dessus. Réciproquement, étant donné un plan quelconque parallèle à la direction de la résultante de transport, les axes principaux d'un même système de forces, relatifs aux différents point de ce plan, croisent toujours et tous une seule et même droite sous des angles droits. Cela revient à dire que le plan formé par l'axe OA, relatif à un point (O) du plan, et par une droite $\overline{OA_1}$ menée par (O), parallèlement à l'axe principal $O'A'$ relatif à un autre point (O') du plan, est indépendant de la position particulière de (O') sur le plan donnée: Soit ce dernier:

$$\alpha_1.a+\beta_1.b+\gamma_1.c = 0,$$

la condition de renfermer la direction $\overline{OR}$ donne

$$\alpha_1.X+\beta_1.Y+\gamma_1.Z = 0.$$

En nommant $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$ la direction normale au plan AOA_1, et N', M', L' les moments partiels en (O'), on obtient:

$$\alpha_2.\sin(\widehat{A_1OA})=\frac{L'.M-M'.L}{\mathfrak{R}.\mathfrak{R}'},\ \beta_2.\sin(\widehat{A_1OA})=\frac{N'L-L'N}{\mathfrak{R}.\mathfrak{R}'},\gamma_2\sin(\widehat{A_1OA})=\cdots.$$

L'équation de ce plan, passant par l'origine (O), a parconséquent la forme

$$(L'.M-M'.L)x+(N'.L-L'.N)y+(M'.N-N'.M).z = 0.$$

Or en réduisant d'après les équations de condition de la question, on a:

$$L'.M-M'.L = \frac{1}{\alpha_1}(L\beta_1-M\gamma_1)(Zb-Y.c),$$

$$N'.L-L'.N = \frac{1}{\alpha_1}(N\gamma_1-L\alpha_1)(Zb-Y.c),$$

$$M'.N-N'.M = \frac{1}{\alpha_1}(M\alpha_1-N\beta_1)(Zb-Y.c);$$

ce qui ramène l'équation du plan (OA, OA_1) à la forme suivante:

$$(L\beta_1-M\gamma_1)x+(N'\gamma_1-L\alpha_1)y+(M\alpha_1-N\beta_1)z = 0,$$

laquelle se trouvant indépendante des coordonnées (a, b, c) du point (O') choisi dans le plan $\alpha_1a+\beta_1b+\gamma_1c=0$, démontre le théorème énoncé; et le tout se réduit à dire, qu'étant donné un plan parallèle à la résultante de transport, et d'une direction normale $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, arbitraire quant au reste, toutes les droites originaires, menées parallélement aux axes principaux, relatifs aux divers points du plan, sont dans un même nouveau plan dont on obtient la direction normale $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$ de cette manière. Nommons $\overline{OG}$ la direction normale $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$

au plan donné, et N le moment principal, nous aurons:

$$\alpha_2 . \sin(\widehat{OG, OA}) = \frac{L}{\mathfrak{N}} \cdot \beta_1 - \frac{M}{\mathfrak{N}} \cdot \gamma_1, \quad \beta_2 . \sin(\widehat{OG, OA}) = \frac{N}{\mathfrak{N}} \cdot \gamma_1 - \frac{L}{\mathfrak{N}} \cdot \alpha_1,$$

$$\gamma_2 . \sin(\widehat{OG, OA}) = \frac{M}{\mathfrak{N}} \cdot \alpha_1 - \frac{N}{\mathfrak{N}} \cdot \beta_1,$$

et ces valeurs démontrent que ce plan nouveau se trouve déterminé par l'axe principal des forces en (O), et par la droite $\overline{OG}$, normale au plan donné.

Remarque XVII.

On donne le lieu des centres pour chacun desquels on a le plan principal correspondant, d'un système donné de forces. Pour trouver le lieu des intersections ou l'enveloppe de tous ces plans, il faut faire varier dans l'équation qui les exprime d'une manière générale, les coordonnées du centre correspondant. Soit $f(a, b, c) = 0$ une surface, et $Ada + Bdb + Cdc = 0$ son équation différentielle, A, B, C désignant des fonctions connues de (a, b, c) à la fois. Nommons N', M', L' les moments des forces autour des trois axes en (a, b, c), parallèles aux axes coordonnés; on obtient par là:

$$N' = N + Y.c - Z.b, \quad M' = M + Z.a - X.c, \quad L' = L + X.b - Y.a.$$

Le plan principal, relatif à (a, b, c), et aux coordonnées courantes x, y, z, a par conséquent la forme:

$$N'(x - a) + M'(y - b) + L'(z - c) = 0,$$

en y substituant les valeurs de N', M', L' en $N \ldots a, b, c,$ et différentiant ensuite suivant (a, b, c), on obtient:

$$(N + Y.z - Z.y)\,da + (M + Z.x - X.z)\,db + (L + X.y - Y.x)\,dc = 0,$$

ce qui donne, en combinaison avec l'équation différentielle de la surface, les deux équations de condition:

$$(N + Y.z - Z.y)B - (M + Z.x - X.z)A = 0,$$
$$(N + Y.z - Z.y)C - (L + X.y - Y.x)A = 0;$$

lesquelles déterminent, en association à l'équation $f(a, b, c) = 0$, les valeurs de $a, b, c,$ en fonction des données N, M, L, X, Y, Z et des variables x, y, z; et en substituant ces valeurs dans l'équation du plan principal, on obtient le lieu des intersections consécutives de tous les plans principaux relatifs aux divers points de la surface proposée $f(a, b, c) = 0$. Quand celle-ci est simplement plane, les quantités A, B, C sont constantes; et eu égard aux équations de conditions obtenues, on pourrait avoir l'idée de conclure de là que les plans prinicipaux, relatifs aux divers points d'un plan fixe donné, se

coupent suivant une droite; mais cette conclusion serait inexacte, puisque l'on peut démontrer par la méthode spéciale de Mr. ***Schweins*** que dans ce cas tous ces plans se coupent en un même point.

La méthode différentio-paramétrique des enveloppes tomberait encore en défaut, ou du moins elle nous semblerait offrir une difficulté analogue, si par son moyen on voulait rechercher le lieu des intersections des plans principaux relatifs aux divers points d'une droite donnée. Dès lors il faut concevoir avec l'auteur cité, deux points désignés sur cette droite, et démontrer par là que la ligne d'intersection des deux plans principaux correspondants est indépendante de la position particulière de chacun de ces points.

Remarque XVIII.

La ligne d'intersection des plans principaux relatifs aux divers points d'une ligne droite fixe qui coïncide avec l'axe des abscisses $\overline{Ox}$, est déterminée, eu égard à la méthode qu'on vient d'indiquer, par l'intersection des deux plans

$$(I.)\quad Nx+My+Lz=0,\quad Y.z-Z.y=0.$$

Les équations de l'axe principal des moments, relatif à un point $b=0$, $c=0$, $a=a$ de cet axe $\overline{Ox}$, seront

$$N'.y-M'(x-a)=0,\quad N'.z-L'(x-a)=0,$$

où l'on a maintenant

$$N'=N,\quad M'=M+Z.a,\quad L'=L-Y.a.$$

Delà résulte:

$$N.y-(M+Za)(x-a)=0,$$
$$N.z-(L-Ya)(x-a)=0.$$

Ainsi, en éliminant la quantié a, qui change d'un point à l'autre de $\overline{Ox}$, on obtient le lieu des axes principaux, relatifs aux divers points d'une même droite $\overline{Ox}$. On trouve ainsi la surface gauche du second degré:

$$Y.xy+Z.xz+M.z-L.y-\frac{N(Y.x+Z.z)^2}{M.Y+LZ}=0.$$

C'est aussi, ***autrement dit***, le lieu des perpendiculaires indéfinies à tous les plans passant suivant une droite fixe (*I.*) et chacun par un point de l'axe $\overline{Ox}$ où l'on élève au plan la perpendiculaire correspondante. Ainsi, en faisant glisser une droite indéfinie (δ) sur une droite fixe $\overline{Ox}$, avec l'attention de conserver la direction de (δ), normale au plan déterminé par une droite fixe (*I.*), et par le point d'intercection actuel de (δ) avec $\overline{Ox}$, on peut engen-

drer le paraboloïde hyperbolique. C'est là une propriété géométrique de cette surface gauche que sa génération bien connue ne met pas en évidence.

Remarque XIX.

Le principe de la composition des forces étant censé démontré, je dis qu'on en peut déduire le théorème fondamental de la théorie des forces parallèles, sans avoir besoin de recourir à cette méthode de transformation indirecte qui introduit dans le système deux forces égales et diamétralement opposées. Pour justifier cette assertion, nous commencerons par énoncer et démontrer un théorème subsidiaire de géométrie (Fig. 2 et Fig. 2 bis): qu'une transversale indéfinie, connue de position et de direction, coupe deux parallèles π, π' aux deux points a, b respectivement. Je joins le point b de rencontre avec π', à un point quelconque g de π; à partir du point g je porte sur π une ligne gk égale à une longueur donnée p; sur π' et à partir de b, je porte, en sens contraire par exemple, une ligne bc égale à une longueur donnée q. Sur bc, comme diagonale, je construis un parallélogramme dont les côtés, partant de b, soient dirigés suivant ba, et bd qui est le prolongement de gb; je porte le côté bd, ainsi obtenu, sur gb, à partir de g, ce qui donne gh; sur les deux lignes (gh, gk) je construis un second parallélogramme; sa diagonale $\overline{gn}$, partant du sommet g, coupera la transversale ba en un point O dont la position, indépendante de la distance ag, dépend uniquement des quantités p, q et de la longueur $\overline{ab}$ interceptée par les deux parallèles sur la transversale. En effet, en prolongeant $\overline{Ogn}$ jusqu'à sa rencontre en m avec la droite π', j'obtiens par les triangles semblables:

$$\overline{Oa}:\overline{ag} = \overline{Oa}+\overline{ab}:\overline{bm}, \quad \text{d'où} \quad \overline{Oa} = \overline{ab}.\overline{ag}:(\overline{bm}-\overline{ag}),$$

$$\overline{bm}:\overline{bg} = p:\overline{bd}; \quad \overline{bm} = p.\overline{bg}:\overline{bd} = p.\overline{ag}:\overline{bc} = p.\overline{ag}:q.$$

De là on conclut, en portant cette valeur de bm dans celle de Oa:

$$Oa = \frac{ab.q}{b-q}, \quad \overline{Ob} = \frac{\overline{ab}.p}{p-q};$$

ce qui démontre le théorème énoncé, et assigne la position du point. Mais la construction suppose que les longueurs p, q soient prises en sens contraire l'une de l'autre. Si elles sont prises dans le même sens, le point de rencontre O tombe entre les deux parallèles, à une distance de π marquée par $\overline{ab}.g:(p+q)$, et à une distance de π' marquée par $\overline{ab}.p:(p+q)$. Pour distinguer et resumer abréviativement ces deux cas, on peut nommer ce dernier point de concours, *centre direct*, et le premier, *centre inverse*. Celui-ci étant

déjà désigné par (O), on peut désigner l'autre par (O'). Il est manifeste que quand les lignes p, q sont égales, le centre inverse passe à l'infini, à gauche ou à droite des deux parallèles, tandis que le centre direct (O') tombe alors sur le milieu de ab, au centre même des extrêmités de ab. En construisant les deux points (O, O') à la fois, pour deux parallèles et une transversale donnée, et avec les mêmes longueurs $(p, \pm q)$, on a ce qu'on peut nommer les ***deux centres conjugués.***

Pour compléter le théorème, supposons que l'on repète pour le point de rencontre a et pour la droite π' la construction effectuée plus haut pour le point b et pour la droite π. Les nouvelles diagonales ainsi formées, passeront encore par le point O d'une part, et par le point O' d'autre part. À cet effet on porte sur π, à partir de a, une longueur p; on joint (a) avec un point arbitraire f de π'; sur p, comme diagonale, on construit le parallélogramme dont les côtés se dirigent suivant aO, af; sur π', et à partir de f, on porte une longueur q en sens contraire de p: sur af prolongé, on prend une longueur égale au côté, suivant af du premier parallélogramme. La diagonale du second parallélogramme ainsi déterminé, ira passer encore par le centre inverse, quelle que soit la position du point f sur π'; et il en est de même encore du centre direct.

Cela posé: concevons deux forces parallèles et contraires, par exemple P, Q, appliquées respectivement aux points a, b d'un corps rigide ou d'une simple barre baO. On peut toujours joindre le point d'application b de la force Q à un point quelconque g de la ligne d'action de P, ligne qu'on nomme encore π, et substituer à la force Q ses deux composantes, l'une $b\varepsilon$ suivant $\overline{ba}$, l'autre $\overline{bd}$ suivant $\overline{gb}$ prolongé. La dernière peut être considérée comme appliquée au point g où elle se compose avec la force $P = \overline{gk}$, et donne, en combinaison avec celle-ci, une résultante gn qui change avec la position du point g sur π, sans cesser de passer par le point O dont la distance à la ligne de P, mesurée suivant Oab, est donnée par l'égalité $\overline{Oa} : \overline{ab} = Q : P - Q$. De plus, la force $\overline{b\varepsilon}$ pousse le système rigide de b vers O suivant la droite $\overline{bO}$. Ainsi les deux forces parallèles se trouvent réduites aux deux forces $\overline{b\varepsilon}$, $\overline{gn}$, dont les lignes d'action se coupent au point O. Mais à la force $\overline{gn}$ appliquée en O, je puis de nouveau substituer ses deux composantes égales et parallèles à $\overline{gk}$, $\overline{gh} = \overline{bd}$, ce qui en O donne finalement la force P et la force Q, résultante de $\overline{b\varepsilon}$, $\overline{bd}$; ou en résultat la force unique $P - Q$. Pour le cas où les deux forces proposées auraient le même sens d'action, elles auraient un

point de concours direct O' et une résultante $P+Q$. Ainsi, deux forces parallèles ont toujours une résultante égale à leur somme algébrique, laquelle résultante passe par le point de concours inverse ou direct de la transversale de leurs points d'action, selon que leurs sens d'action sont contraires, ou dans la même direction. Il est clair d'après cela que deux forces parallèles, égales, et contraires, mais non-diamètralement opposées, ont une résultante $P-P=0$, appliquée à l'infini; qu'ensuite l'effet de deux forces parallèles quelconques sur un corps rigide doit être détruit, si l'on fixe un point quelconque de la ligne d'action de leur résultante, ou le centre O, ou O', selon les deux cas. Puisque donc la distance de ce point doit se calculer par la formule $(\overline{Oa}, \overline{O'a}) = \overline{ab}.Q:(P \mp Q)$, on obtient $P.\overline{Oa} = Q.\overline{Ob}$ pour le premier cas, et $P.\overline{O'a} = Q.\overline{O'b}$ pour le second; ce qui constitue une seule et même loi pour les deux cas: la loi d'équilibre connue du levier. On voit de plus que la pression du point fixe est égale à la somme algébrique des forces parallèles; et que la ligne d'action de leur résultante est le lieu des divers points, censés tour-à-tour fixes, autour desquels les forces partielles se font équilibre.

Remarque XX.

Le théorème que nous avons énoncé dans la ***première remarque*** s'applique aussi avec une remarquable simplicité au mouvement de turbination d'un corps solide, pourvu d'un point fixe; et mène immédiatement à l'expression analytique simplifiée de la variation instantanée de coordonnées de l'un quelconque des points du solide. Mais pour ne pas refaire inutilement ce qui se trouve exposé par divers auteurs, nous pouvons admettre ici le théorème de l'immortel ***Euler***, à savoir, que tout déplacement instantané du solide est un mouvement de rotation de tous ses points autour d'un même axe, passant par le point fixe. Soit (O) le point fixe, partant le centre de gyration du solide; $\overline{OI}$ l'axe instantané de rotation en (O); A_1, B_1, C_1 les trois angles de sa direction avec trois axes coordonnés fixes OX, OY, OZ qui ont le point (O) pour origine et sont rectangles entr'eux. Nommons D un point matériel quelconque du solide, et (x, y, z) ses coordonnées rectangles, le point étant rapporté aux axes dont il s'agit. Soit ϱ la distance normale du point D à l'axe $\overline{OI}$; r sa distance invariable à l'origine (O). Nous aurons par conséquent:

$$\cos D\widehat{O}I = \frac{x}{r}\cos A_1 + \frac{y}{r}\cos B_1 + \frac{z}{r}\cos C_1,$$

$$\varrho^2 = r^2 - r^2.\cos^2(DOI) = x^2 + y^2 + z^2 - (x.\cos A_1 + y.\cos B_1 + z.\cos C_1)^2.$$

De plus, le plan de rotation, c'est-à-dire le plan perpendiculaire en O à l'axe $\overline{OI}$, aura pour équation:

$$x.\cos A_1 + y.\cos B_1 + z.\cos C_1 = 0.$$

Le changement total de distance éprouvé par le point D du solide, tournant d'un angle $d\Omega$ sur l'axe $\overline{OI}$, est évidemment $\varrho.d\Omega$; et pour avoir les variations de coordonnées dx, dy, dz qui sont dûes à ce changement, on n'a qu'à projeter l'élément linéaire $\varrho.d\Omega$ orthogonalement sur les trois axes fixes (Ox, Oy, Oz). Ainsi, en désignant par A'_1, B'_1, C'_1 les trois angles de sa direction avec les mêmes axes, on obtient:

$$dx = \varrho.d\Omega.\cos A'_1, \quad dy = \varrho.d\Omega.\cos B'_1, \quad dz = \varrho.d\Omega.\cos C'_1.$$

Mais eu égard à ce que $\sin(\widehat{DOI}) = \varrho : r$, et à ce que $\cos \widehat{DOx} = x : r, \ldots$, on obtient en vertu du théorème cité:

$$\varrho.\cos A'_1 = z\cos B_1 - y.\cos C_1; \quad \varrho.d\Omega.\cos B'_1 = x\cos C_1 - z\cos A_1,$$
$$\varrho.\cos C'_1 = y\cos A_1 - x.\cos B_1,$$

ce qui donne par la substitution de ces valeurs, les formules symétriques:

$$dx = (z\cos B_1 - y\cos C_1)d\Omega, \quad dy = (x\cos C_1 - z\cos A_1)d\Omega,$$
$$dz = (y\cos A_1 - x\cos B_1)d\Omega.$$

Mais en faisant tourner le solide successivement de trois rotations élémentaires $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ autour des axes (Ox, Oy, Oz) respectivement, ces axes étant pris tour-à-tour comme essieux fixes, et dénotant par $d'x$, $d'y$, $d'z$ les changements de coordonnées qui en résultent pour le point D qu'on considère, on obtient:

$$d'x = z\,d\omega - y\,d\varphi, \quad d'y = x\,d\varphi - z\,d\psi, \quad d'z = y\,d\psi - x\,d\omega.$$

Pour que ces mouvements successifs ou simultanés partiels soient équivalents en résultat, et quant au déplacement total produit, à un seul et même mouvement élémentaire quelconque désigné, il faut qu'il soit toujours possible de rendre identiques entr'elles les variations de coordonnées dx, dy, dz d'une part, et $d'x$, $d'y$, $d'z$ d'autre part. Cela donne:

$$z\,d\omega - y\,d\varphi = z\cos B_1 d\Omega - y\cos A_1.d\Omega,$$
$$x\,d\varphi - z\,d\psi = x\cos A_1 d\Omega - z\cos C_1.d\Omega,$$
$$y\,d\psi - x\,d\omega = y\cos C_1 d\Omega - x\cos B_1.d\Omega;$$

et celles-ci devant être satisfaites pour des valeurs quelconques de (x, y, z), on doit avoir:

$$d\psi = d\Omega.\cos A_1, \quad d\omega = d\Omega.\cos B_1, \quad d\varphi = d\Omega.\cos C_1.$$

Ces équations de condition qui sont ***nécessaires*** et ***suffisantes***, ramenent au principe de la composition des mouvements de rotation.

Remarque XXI. Centre d'inertie.

L'idée du *centre d'inertie* d'un corps ou d'un système quelconque de corps, est incontestablement plus générale que celle du *centre de gravité* qui ne s'applique à la rigueur qu'aux corps pesants. En effet, ce dernier point ne se définit habituellement que pour le cas où toutes les molécules d'un corps sont censées sollicitées par des forces parallèles seulement: au contraire la première idée subsiste indépendamment de toute considération de forces et de toute notion de mécanique. Cette assertion de notre part trouve déjà en partie sa justification dans les idées d'*Euler* *); et quoique *Lagrange* et *Laplace* ont adopté de préférence la dénomination de *centre de gravité,* il n'est pas difficile de se convaincre que leur manière de voir est assez conforme à celle d'*Euler*. *Laplace* définit en effet **) ce centre par des équations de condition purement analytiques; et *Lagrange* procède d'une manière analogue dans sa mécanique analytique ***).

Pour montrer que l'idée du centre d'inertie peut en effet être dégagée des principes de mécanique, on peut procéder de la manière suivante. Une quantité de matière quelconque, censée concentrée en un point, ou dans un espace, infiniment petit suivant toutes les dimensions, est ce qu'on peut nommer un *point matériel*. *Le moment* d'un point matériel par rapport à un plan, est le produit de sa quantité de matière par sa distance normale à ce plan. Le moment total d'un corps, relatif à un point de concentration arbitraire, et par rapport à un plan quelconque de l'espace, est le produit de sa masse par la distance de ce point au plan dont il s'agit. Le *centre d'inertie d'un corps ou système de corps, est ce point spécial pour lequel le moment de la masse entière est égale à la somme des moments des parties infiniment petites dans lesquelles on divise cette masse, par rapport à un même plan de comparaison.* Pour le cas des corps terrestres seulement, le centre d'inertie peut se nommer centre de gravité parceque de tels corps sont constamment soumis à l'action de la gravité, et qu'alors les masses sont proportionnelles aux poids correspondants. Cette manière de procéder montre en même temps que le centre en question pour les corps d'ici-bas est indépendant de toute hypothèse de parallélisme de forces de la pesanteur; et l'on conçoit encore immédiatement ce point pour un système de corps soustraits

*) Theoria motus corporum rigidorum.
**) Mécanique céleste. T. I. p. 46, les dernières lignes du No. 15.
***) Tome I. page 63.

à l'influence de la pesanteur terrestre, et soumis ou non soumis à leurs attractions et repulsions mutuelles. Mais de quelque façon qu'on envisage la définition du point dont il s'agit, il reste à démontrer généralement le théorème suivant dont un cas particulier a été énoncé par Mr. *Steiner* de Berlin, et démontré par Mr. *Clausen* dans ce journal (tome 7 p. 33).

„*Pour construire le centre d'inertie de n points matériels, il suffit „de construire celui des n—1 premiers points; de le joindre par „une droite au $n^{ième}$ point, et de diviser cette droite en deux parties „inversement proportionnelles à la masse du $n^{ième}$ point et à la somme „des masses des n—1 premiers. Le point de division ainsi obtenu, „sera toujours le même, dans quelqu'ordre qu'on compte les points „donnés; ce sera leur centre d'inertie ou de masse.*

Si tous les points donnés ont des masses égales, leur centre d'inertie devient identique au centre des moyennes distances, et l'énoncé précédent se réduit au théorème de Mr. *Steiner*. D'abord il résulte de la définition du centre d'inertie, qui se traduit analytiquement par des équations linéaires, que pour chaque corps ce point est unique; de sorte qu'il suffit de prouver que dans une première manière de compter et de combiner les points proposés, le point de division obtenu d'après la règle énoncée, coïncide avec leur centre d'inertie.

Soient $m, m', m'', \ldots m^{(n-1)}$ les masses respectives de n points proposés; M leur somme; x_1, y_1, z_1 les coordonnées de leur centre d'inertie; x, y, z celles de m; x', y', z' celles de m', etc.; on aura par définition:

$$Mx_1 = mx + m'.x' + m''.x'' + \cdots + m^{(n-1)}.x^{(n-1)}, \quad My_1 = my + \ldots,$$
$$Mz_1 = mz + \ldots.$$

Mais en nommant x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées du centre d'inertie des $n-1$ premiers points, on doit avoir encore:

$(m+m'+\cdots+m^{(n-2)})x'_1 = mx+m'x'+\cdots+m^{(n-2)}.x^{(n-2)}$; $(m+m'+\cdots)y'_1 = \cdots$; etc.

ce qui donne par substitution dans les trois premières égalités:

$$M.x_1 = (m+m'+\cdots+m^{(n-2)})x'_1 + m^{(n-1)}).x^{(n-1)}, \quad My_1 = \cdots, \quad Mz_1 = \ldots.$$

Or en nommant S, T, U les coordonnées du centre d'inertie des deux masses $(m+m'+m''+\cdots+m^{(n-2)})$ et $m^{(n-1)}$ placées respectivement aux deux points (x'_1, y'_1, z'_1) et $(x^{(n-1)}, y^{(n-1)}, z^{(n-1)})$, on doit avoir encore par définition:

$$MS = (m+m'+\cdots+m^{(n-2)})x'_1 + m^{(n-1)}.x^{(n-1)}, \quad M.T = \cdots, \quad M.U = \ldots.$$

Et en comparant ces valeurs de S, T, U, avec celles de x_1, y_1, z_1, on en conclut immédiatement:

$$x_1 = S, \quad y_1 = T, \quad z_1 = U, \quad \text{ou} \quad S = x_1, \quad T = y_1, \quad U = z_1;$$

donc le centre d'inertie des deux masses $[m+m'+\cdots+m^{(n-2)}]$, et $m^{(n-1)}$ placées respectivement en (x'_1, y'_1, z'_1) et en $(x^{(n-1)}, y^{(n-1)}, z^{(n-1)})$, coïncide avec celui des n masses primitives, et réciproquement; ce qui mène en effet au théorème énoncé plus haut, que nous avons déjà établi dans notre cours de statique, et que nous avons jugé utile de réproduire avec de nouveaux développements; car le passage cité de ce Journal nous porte à croire que le théorème est nouveau; du moins quant à la démonstration qu'on vient d'exposer. D'ailleurs nos observations sur le centre de gravité acquièrent une certaine importance, quand on veut commencer l'étude de la mécanique par la démonstration du principe des vitesses virtuelles, basée sur l'idée de centre de gravité, et dégagée de toute notion sur la théorie des forces parallèles; ce qui est précisément le cas de la mécanique analytique de ***Lagrange***.

Remarque XXII. Centre d'inertie.

Voici maintenant quelques autres développements concernant une propriété générale de ce centre, et que ***Lagrange*** et ***Laplace*** présentent sous des formes tellement différentes qu'on a de la peine à reconnaître l'équivalence de résultats exprimés par leurs formules générales. De plus, le résultat donné par ***Poisson*** (tome I, p. 117) de son ouvrage, n'est qu'un cas particulier de cette propriété générale dont ***Lagrange*** (?) paraît être le premier auteur et que nous allons développer et démontrer d'après ses propres notations. La méthode de déterminer le centre d'inertie d'un système quelconque de corps matériels dont on connaît déjà les centres partiels, par l'évaluation des moments de masse, peut suffire dans tous les cas. Mais on peut la remplacer aussi dans de certains cas par ce qui suit. Soient $P, P', P'', \ldots$ les poids des corps partiels; (xyz), $(x'y'z')$, ... leurs centres d'inertie respectifs. En entendant par $f, g, h,$ trois quantités arbitraires, et par X la somme des moments de $P, P', P'', \ldots$ par rapport au plan coordonnée yz, on aura d'après ***Lagrange*** et en vertu de la valeur de $X = Px + P'x' + \text{etc.}$, en commençant par deux poids seulement:

$$\begin{aligned}
[X-(P+P')f]^2 &= P^2.(x-f)^2+P'^2(x'-f]^2+2PP'.(x-f)(x'-f)\\
&= [P(x-f)^2+P'(x'-f)^2](P+P')\\
&\quad -PP'(x-f)^2-PP'(x'-f)^2+2PP'(x-f)(x'-f)\\
&= [P(x-f)^2+P'(x'-f)^2](P+P')-P.P'.(x-x')^2.
\end{aligned}$$

Or si cette équation est vraie pour le cas de n poids $P, P', P'', \ldots,$ elle l'est encore pour $n+2$ poids; de sorte qu'étant vraie pour deux, elle

doit l'être pour un nombre entier quelconque. Pour le démontrer, soit fait dans le cas de n masses ou poids:

$$P.x+P'.x'+P''.x''+\cdots+P^{(n-1)}.x^{(n-1)}=X,$$

et supposons qu'on ait:

$$\text{(I.)}\quad \{X-f.(P+P'+\cdots+P^{(n-1)}\}^2$$
$$=[P(x-f)^2+\cdots+P^{(n-1)}.(x^{(n-1)}-f)^2](P+\cdots+P^{(n-1)})-\Sigma_0^{n-1}.P.P'.(x-x')^2.$$

Nous désignons par $\Sigma_0^{n-1}.PP'(x-x')^2$ la somme de toutes les quantités analogues à $PP'(x-x')^2$, que l'on obtient par toutes les combinaisons des n poids, deux-à-deux, et des différences d'abscisses correspondantes: je dis que l'égalité (I.) étant vraie pour n, l'est encore pour $n+1$, et qu'on doit avoir par conséquent:

$$\text{(II.)}\quad \{X-f(P+P'+\cdots P^{(n)}\}^2$$
$$=[P(x-f)^2+\cdots+P^{(n)}(x^{(n)}-f)^2]P+P'+\cdots+P^{(n)})-\Sigma_0^{n}.P.P'.(x-x')^2.$$

En effet, en représentant d'abord par V le premier membre de l'égalité (I.), j'aurai évidemment:

$$[X+P^{(n)}.x^{(n)}-f(P+P'+\cdots+P^{(n)}]^2$$
$$=[V+P^{(n)}(x^{(n)}-f)]^2=V^2+2V.P^{(n)}.x^{(n)}-2V.P^{(n)}.f+(P^{(n)})^2.(x^{(n)}-f)^2;$$

ou en mettant pour V sa valeur $X-f(P+P'+\cdots+P^{(n-1)})$, on transforme le second membre en cet autre:

$$\text{(III.)}\left\{\begin{array}{r} V^2+2.P^{(n)}.x^{(n)}.[Px+P'x'+\cdots+P^{(n-1)}.x^{(n-1)} \\ -f.(P+P'+\cdots+P^{(n-1)})] \\ -2.P^{(n)}.f.[Px+P'x'+\cdots+P^{(n-1)}.x^{(n-1)} \\ -f.(P+P'+\cdots+P^{(n-1)})] \end{array}\right\}+P^{(n)}.P^{(n)}.(x^{(n)}-f)^2.$$

Mais en substituant à V^2 sa valeur, on obtient:

$$V^2+P^{(n)}.P^{(n)}.(x^{(n)}-f)^2$$
$$=[P(x-f)^2+\cdots+P^{(n-1)}(x^{(n-1)}-f)^2](P+P'+\cdots+P^{(n-1)})$$
$$-\Sigma_0^{n-1}.P.P'(x-x')^2+P^{(n)}.P^{(n)}.(x^{(n)}-f)^2$$
$$=[P(x-f)^2+\cdots+P^{(n)}(x^{(n)}-f)^2](P+P'+\cdots+P^{(n)})$$
$$-P^{(n)}[P(x-f)^2+\cdots+P^{(n-1)}(x^{(n-1)}-f)^2]$$
$$-P^{(n)}(P+P'+\cdots+P^{(n-1)})(x^{(n)}-f)^2-\Sigma_0^{n-1}.P.P'.(x-x')^2.$$

Ainsi la quantité marquée (III.) devient:

$$[P(x-f)^2+\cdots+P^{(n)}(x^{(n)}-f)^2](P+P'+\cdots+P^{(n)})$$
$$-P^{(n)}[P(x-f)^2+\cdots+P^{(n-1)}(x^{(n-1)}-f)^2]-P^{(n)}(P+\cdots+P^{(n-1)}(x^{(n)}-f)^2$$
$$+2P^{(n)}.x^{(n)}.(Px+\cdots+P^{(n-1)}.x^{(n-1)})-2P^{(n)}.x^{(n)}.f.(P+P'+\cdots+P^{(n-1)})$$
$$-2P^{(n)}.f.(Px+P'x'+\cdots+P^{(n-1)}.x^{(n-1)})+2P^{(n)}.f^2.(P+P'+\cdots+P^{(n-1)}).$$

Or en formant tous les termes en f, f^2 des trois dernières lignes de ce tableau, et même sans les former, on s'apperçoit que tous ces termes se détruisent, et que ces lignes se réduisent à l'expression suivante:

$$-P^{(n)}P.x^2 - P^{(n)}.P'.x'^2 - \cdots - P^{(n)}.P^{(n-1)}.x^{(n-1)}.x^{(n-1)}$$
$$-P^{(n)}.P.x^{(n)}.x^{(n)} - P^{(n)}.P'.x^{(n)}.x^{(n)} - \cdots - P^{(n)}.P^{(n-1)}.x^{(n)}.x^{(n)}$$
$$+2P^{(n)}.P.x^{(n)}.x + 2P^{(n)}.P'.x^{(n)}.x' + \cdots + 2P^{(n)}.P^{(n-1)}.x^{(n)}.x^{(n-1)},$$

laquelle se réduit elle-même à la forme:

$$-P.P^{(n)}.(x-x^{(n)})^2 - P'.P^{(n)}(x'-x^{(n)})^2 - \cdots - P^{(n)}.P^{(n-1)}.(x^{(n-1)}-x^{(n)})^2.$$

Ainsi le premier membre de l'équation (II.) se ramène en effet à la valeur

$$[P(x-f)^2 + \cdots + P^{(n)}.(x^{(n)}-f)^2](P+P'+\cdots+P^{(n)})$$
$$-\Sigma_0^{n-1}P.P'.(x-x')^2 - P^{(n)}.P.(x-x^{(n)})^2 - \ldots.$$

En remarquant que toute la ligne de termes de cette expression qui viennent après le premier, se réduit à $\Sigma_0^n.P.P'(x-x')^2$, on conclut que toute l'expression elle-même devient précisement le second membre de l'équation (II.), laquelle se trouve donc démontrée. Si l'on nomme Y, Z la somme des moments des n poids par rapport aux plans (zx, xy), on a aussi, quel que soit n:

$$\text{(I'.)}\quad \{Y-g(P+\cdots+P^{(n-1)})\}^2 = [P(y-g)^2+P'(y'-g)^2+\cdots$$
$$+P^{(n-1)}(y^{(n-1)}-f')^2](P+\cdots+P^{(n-1)}) - \Sigma_0^{n-1}.P.P'(y-y')^2\ldots$$
$$\text{(I''.)}\quad \{Z-h(P+\cdots+P^{(n-1)})\}^2 = [P(z-h)^2+P'(z'-h)^2+\cdots$$
$$+P^{(n-1)}(z^{(n-1)}-h)^2](P+\cdots+P^{(n-1)}) - \Sigma_0^{n-1}.P.P'(z-z')^2\ldots$$

Les équations (I, I', II'') étant admises, concevons que l'origine des coordonnées, jusqu'ici arbitraire, coïncide avec le centre de gravité G des n poids $P, P', \ldots P^{(n-1)}$, et que l'on entende par f, g, h les coordonnées d'un point quelconque K de l'espace. On aura dans cette supposition $X=0$, $Y=0$, $Z=0$. Les trois équations citées deviendront, ou donneront du moins:

$$f^2 = \frac{P(x-f)^2+P'(x'-f)^2+\ldots}{\Sigma.P} - \frac{\Sigma.P.P'.(x-x')^2}{(\Sigma.P)^2},$$
$$g^2 = \frac{P(y-g)^2+P'(y'-g)^2+\ldots}{\Sigma.P} - \frac{\Sigma.P.P'.(y-y')^2}{(\Sigma.P)^2},$$
$$h^2 = \frac{P(z-h)^2+P'(z'-h)^2+\ldots}{\Sigma.P} - \frac{\Sigma.P.P'.(z-z')^2}{(\Sigma.P)^2},$$

Ajoutant ces trois équations membre-à-membre, et faisant remarquer que $f^2+g^2+h^2 = \overline{KG}^2$, nous obtenons ce qui suit:

$$\text{(IV.)}\quad \overline{KG}^2 = \frac{\Sigma.P\{(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2\}}{\Sigma.P} - \frac{\Sigma.PP'\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}}{(\Sigma.P)^2}.$$

Si l'on désigne par $A, A', A'', \ldots A^{(n-1)}$ les positions des centres de gravité des poids $P, P', P'', \ldots P^{(n-1)}$, on peut écrire ce résultat sous la forme purement géométrique:

$$\text{(V.)} \qquad \overline{KG}^2 = \frac{\Sigma.P.\overline{AK}^2}{\Sigma.P} - \frac{\Sigma.P.P'.\overline{AA'}^2}{(\Sigma.P)^2}.$$

$\Sigma.P.\overline{AK}^2$ désigne la somme des produits des poids par les carrés des distances de leurs centres au point arbitraire K; et $\Sigma P.P'.\overline{AA'}^2$ exprime la somme des produits des poids deux-à-deux par les carrés des distances mutuelles des centres. Quand le point K coïncide avec le centre G, on obtient:

$$0 = (\Sigma.P)(\Sigma.P.\overline{AG}^2) - \Sigma.P.P'.\overline{AA'}^2.$$

En combinant celle-ci avec celle (V.) du cas général, on trouve

$$\text{(VI.)} \qquad \Sigma.P.\overline{AK}^2 = \Sigma.P.\overline{AG}^2 + \overline{GK}^2 x(\Sigma P).$$

On conclut delà que la somme des produits des poids de plusieurs corps, par les carrés de leurs distances au centre de gravité général, est plus petite que la somme analogue relative à tout autre point de l'espace; partant que cette première somme est un ***minimum***. Mais c'est là une vérité purement géométrique, ce que l'on conçoit mieux, en substituant dans ces équations et énoncés, les *masses* aux *poids*, et l'idée du *centre d'inertie* ou de *masse* à celle de *centre de gravité*. Et dès lors les transformations faites ci-dessus, n'empruntent rien évidemment aux principes de mécanique; elles sont purement géométriques ou analytiques, et reposent sur la simple supposition que les corps sur lesquels ou raisonne, sont *matériels*. Mais cette supposition offre l'avantage de pouvoir introduire dans la géométrie même, de nouvelles conceptions, et de généraliser par exemple immédiatement l'idée du centre des moyennes distances, et de la transformer en celle du centre d'inertie.

Pour donner à la formule (IV.) une autre forme analytique, désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de P, rapporté à trois axes rectangles, ayant leur origine en un point arbitraire K; par x'_1, y'_1, z'_1 celles du centre de P', ..., et par X_1, Y_1, Z_1 celles du centre général; le tout étant rapporté aux axes rectangles en K. On aura donc:

$$\overline{KG}^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2; \quad (x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-g)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;$$
$$x - x' = x_1 - x'_1, \quad y - y' = y_1 - y'_1, \quad z - z' = z_1 - z'_1, \ldots,$$

et la formule (IV.) devient, en substituant encore les masses $m, m', \ldots$ aux poids $P, P', \ldots$:

$$\text{(VII.)} \qquad X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$$
$$= \frac{\Sigma.m(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}{\Sigma.m} - \frac{\Sigma.m.m'\{(x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2 + (z_1 - z'_1)^2\}}{(\Sigma.m)^2};$$

et telle est, aux notations près, la formule donnée par ***Laplace*** (tome I, p. 45). Quant au résultat de transformation établi par ***Poisson*** (tome I, p. 117), il n'est qu'un cas particulier de l'équation (IV.), et il en résulte par l'hypothèse déjà faite de $\overline{KG} = 0$.

Remarque XXIII.

On sait que la méthode d'***Euler***, d'exposer les lois générales de l'équilibre des fluides est basée sur le principe experimental de l'égalité de pression en tout sens. Mais ***Lagrange***, qui ne considère pas cette propriété comme indispensable dans cet exposé, déduit en effet ces lois du principe des vitesses virtuelles et de la nature des fluides, considérés comme des amas de molécules très déliées, indépendantes les unes des autres, et parfaitement mobiles en tout sens. Toutefois l'on ne voit pas bien comment la démonstration qu'il donne de ce principe, est valable pour le cas d'un liquide et d'un fluide élastique. On ne saurait éviter la difficulté, en suivant la marche de ***Poisson*** qui démontre le principe, en admettant celui de l'égalité de pression en tout sens. D'un autre côté, la méthode d'***Euler*** est d'une simplicité et d'une lucidité telle qu'elle a eu jusqu'à ce jour, et qu'elle aura sans doute long-temps encore la préference sur toute autre; dans l'enseignement surtout, où il convient de ne jamais s'écarter trop des résultats immédiats de la science. Nous essayerons dans ce qui suit de démontrer à la fois le principe des moments virtuels, et celui de la transmission des pressions pour le cas des fluides.

Concevons plusieurs forces $P, P', P'', \ldots$ appliquées par le moyen de pistons à un amas de molécules fluides, censé incompressible, et contenu par les parois solides d'un vase absolument fixe; et supposons que l'équilibre subsiste. Soient $S, S', S'', \ldots$ les surfaces des pistons, susceptibles de glisser dans des cylindres qui les emboîtent exactement. Si par l'intervention d'une force étrangère ajoutée à P, on trouble l'équilibre, en enfonçant le piston S d'un chemin dp, le volume fluide diminue de ce côté d'une quantité infiniment petite dV, tandis que du côté des pistons $S', S'', \ldots$ qui seront refoulés du dedans en dehors des chemins $dp', dp'', \ldots$ il augmente des quantité $dV', dV'', \ldots$, et l'on a en vertu de l'incompressibilité:

$$dV - dV' - dV'' - \ldots = 0, \text{ mais } dV = S dp,\ dV' = S' dp', \text{ d'où:}$$

$$S dp - S' dp' - S'' dp'' - \ldots = 0.$$

Or comme l'équilibre général subsiste dans l'amas fluide, il faut que chaque molécule soit en équilibre, tant sous l'action de la force élémentaire

propre $\varphi.dm$ qui la sollicité, que sous l'action des pressions qu'elle reçoit des molécules adjacentes, et lesquelles pressions sont dûes aux forces propres de celles-ci et aux forces extérieures $P, P', P'', \ldots$. Il faut donc que la somme des projections orthogonales de toutes ces forces, relatives à une même molécule, sur un axe quelconque, soit nulle, ou ce qui revient encore au même ici, que la somme de leurs moments virtuels soit égale à zéro. Il s'ensuit de là que la *somme totale* des moments virtuels des forces extérieures $P, P', P'' \ldots$, des forces propres $\varphi dm, \varphi' dm'', \varphi'' dm'', \ldots$ qui sollicitent les molécules, et des forces de pression qui peuvent leur être transmises, est aussi égale à zéro. Mais la somme des moments de ces forces de pression doit être nulle identiquement, comme étant composée d'une suite indéfinie de termes égaux deux-à-deux et contraires. Car si une molécule, prise où l'on veut dans la masse fluide, souffre sur une face $d\omega$, dirigée d'une manière quelconque, une pression $\pi.d\omega$, il faut qu'elle exerce pour l'équilibre, sur la face $d\omega$ de la molécule adjacente une pression $-\pi.d\omega$. Or dans le déplacement élémentaire que suppose le principe des vitesses virtuelles, ces deux molécules ne cesseront pas de rester juxtà-posées; et quoique l'on conçoive qu'elles puissent glisser l'une sur l'autre par la face commune $d\omega$, il est manifeste que leur déplacement dans le sens normal au plan de $d\omega$, doit être le même; de sorte que la somme des moments virtuels des pressions mutuelles qu'elles se communiquent, est nulle. Si donc on dénote par $d\xi$ le chemin décrit par la masse dm dans les sens de sa force élémentaire propre $\varphi.dm$, lors du déplacement des pistons et de la masse fluide dans le vase fixe, il restera simplement pour somme totale:

$$\Sigma.Pdp + S.\varphi dm.d\xi = 0 \ldots \text{ c. q. f. d.}$$

Le signe de sommation S s'étendant à toutes les molécules de la masse pour le cas particulier où les molécules fluides sont censées dépourvues de toute force propre, on a en chaque point $\varphi = 0$, ce qui donne:

$$\Sigma.P.dp = 0.$$

Pour le cas de deux forces seulement, P, P', on déduit delà $Pdp - P'dp' = \frac{P}{S}dV - \frac{P'}{S'}dV' = 0$, et comme $dV' = dV$ pour les fluides incompressibles, on obtient $P:S = P':S'$. Il s'ensuit delà que si la force P agit seule, S' étant alors une paroi fixe, elle doit transmettre par unité de surface une pression $P:S$, et sur S' une pression $P.S':S$, quelle que soit la position de S'; ce qui démontre *l'égalité de pression.*

Bruxelles ce 15 Mars 1849.

13.

Über die Sätze vom Parallelogramm der Kräfte und vom Hebel; so wie vom Parallelepipedum der Kräfte.

(Vom Herausgeber.)

Vorbemerkung.

1.

Der Satz vom ***Parallelogramm der Kräfte*** läfst sich auf den Satz ***vom Hebel*** gründen, also ***mittelbar*** beweisen; wie es z. B. ***Poinsot*** in seiner Statik versuchte. Eben so läfst sich umgekehrt der Satz vom Hebel auf den vom Parallelogramm der Kräfte gründen, also ebenfalls ***mittelbar*** beweisen; wie es z. B. ***Eytelwein*** in seiner Statik gethan hat. Auch fehlt es nicht an mancherlei ***unmittelbaren*** Beweisen des einen und des andern Satzes, unabhängig von einander. Die unmittelbaren Beweise des Satzes vom ***Hebel*** sind einfach, und bedürfen nur gewöhnlich des Überganges vom Rationalen zum Irrationalen. Diejenigen vom ***Parallelogramm der Kräfte*** sind zum Theil sehr künstlich, und beschreiten gewöhnlich ebenfalls jenen Übergang. Kürzlich hat ***Möbius*** den unabhängigen Beweisen des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte noch einen neuen, sehr sinnreichen Beweis hinzugefügt, welchen auch dieses Journal im 2ten Heft 42ten Bandes (S. 179 etc.) mittheilte.

Wir wollen hier versuchen, die ***mittelbaren*** Beweise der beiden Sätze, die man für die Elemente gewöhnlich vorzieht, noch etwas schärfer und einfacher zu geben; dann aber andere, ***unmittelbare*** Beweise der beiden Sätze anheimstellen, aus deren jedem der andere folgt. Endlich werden wir einige Bemerkungen über den Satz vom ***Parallelepipedum der Kräfte*** beifügen.

Da ein so ausgezeichneter Mathematiker wie ***Möbius*** noch neuerdings es nicht verschmäht hat, sein Nachdenken auf diese elementaren Dinge zu richten, so wird es dem Herausgeber dieses Journals erlaubt sein, auch ***seine*** Ansichten darüber hier möglichst kurz mitzutheilen. In der That ist die möglichst feste und einfache ***Begründung*** der Mathematik ***nicht minder*** wichtig, als die immer weitere ***Entwicklung*** derselben. Auch ist sie wohl eben so schwierig, als diese, ja selbst eben so ***unmöglich,*** als der Abschlufs der

weitern Entwicklung. Die Mathematik bewegt sich, gleich allem menschlichen Wissen, zwischen zwei unbegrenzten Unendlichen. Sie hebt sich aus der unergründlichen Tiefe des einen Unendlichen hervor, und strebt, immer weiter sich entwickelnd, nach oben zu einem andern Unendlichen. Beide sind unbegrenzt. In der Geometrie z. B. sucht man vergebens seit Jahrtausenden nach einer genügenden Theorie der Parallelen; und eine Erklärung der ***Ebene***, die strenge und zugleich für das Weitere ***brauchbar*** wäre, giebt es nicht, obgleich schon die Elemente sich überall in der ***Ebene*** bewegen. Sie sprechen immerfort von der ***Ebene***, und sagen doch nicht deutlich, was sie eigentlich sei. Wenn Jemand sagt: die Geometrie habe keinen sichern ***Grund***, sondern müsse wohl nur deshalb richtig sein, weil alle ihre, auf den ***vorausgesetzten*** Grund aufgeschichteten strengen Schlüsse nirgends auf Widersprüche führen, so dürfte sich dagegen nicht viel einwenden lassen. Daher möge man denn auch fortgesetzte Bemühungen um die ***möglichst*** feste, wenigstens klare und einfache Begründung der Elemente nicht verwerfen und nicht etwa gleichgültig darauf hinabsehen.

Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte, wenn der Satz vom Hebel als bewiesen vorausgesetzt wird.

2.

A. Der Satz vom ***Hebel*** besagt, dafs zwei Kräfte p und q, die in beliebigen, aber ***parallelen*** Richtungen AA_2 und BB_2 (Fig. 1, Taf. III.) auf den Hebel ACB wirken, um denjenigen Punct C im ***Gleichgewicht*** sind, dessen Entfernungen $CA = a$ von A und $CB = b$ von B sich verhalten, wie q zu p, so dafs

$$(1.) \qquad ap = bq \text{ ist.}$$

B. Wenn man von Kräften p und q spricht, so meint man unter den Buchstaben p und q ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale ***Zahlen***, deren ***Einheit*** irgend eine zur Einheit ***angenommene Kraft*** ist. Eben so, wenn man von den Entfernungen a und b des Puncts C von A und B spricht, so meint man unter den Buchstaben a und b ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale ***Zahlen***, deren ***Einheit*** irgend eine zur Einheit ***angenommene Länge*** der geraden Linie ist.

Offenbar ist es aber ganz gleichgültig, ***welche*** Kraft man zur Einheit der Kräfte und ***welche*** Linienlänge man zur Einheit der Linienlänge setzt, wenn man nur stets ***dieselben*** Einheiten beibehält.

C. Hat man nun für die auf den Hebel wirkenden beiden ***Kräfte*** irgend eine ***Kraft-Einheit angenommen,*** so läfst sich, da auch die Längen-Einheit für die ***Linien willkürlich*** ist, offenbar eine ***solche Längen-Einheit*** annehmen, dafs die Linie $CB = b$ durch ***dieselbe Zahl*** p ausgedrückt wird, durch welche man die Kraft p gemessen hat, so dafs also die ***Zahl*** b der ***Zahl*** p ***gleich*** ist. Dann aber mufs hier, ***vermöge des Satzes vom Hebel*** (1.), wegen $b = p$, auch ***nothwendig*** $a = q$ sein; denn $ap = bq$ giebt für $b = p$, $ap = pq$, folglich $a = q$.

So drücken nun die ***Zahlen*** p und q vollständig die Gröfse der beiden Kräfte und ***zugleich*** die ***Länge*** der Linien BC und AC aus, und die ***Figur*** giebt ihre ***Richtung*** an.

D. Man lege jetzt in der Richtung der geraden Linie ACB an A die Kraft $AA_1 = p$ und an B die *gleiche* Kraft $BB_1 = p$, so ändern diese neu hinzukommenden Kräfte an der Wirkung auf den Hebel nichts; denn sie heben sich auf.

E. Statt der beiden *gleichen* Kräfte $AA_1 = p$ und $AA_2 = p$ setze man eine ***mittlere*** Kraft AA_3, die ***eben so*** auf den Punct A wirkt, wie jene beiden Kräfte. Die ***Richtung*** dieser mittlern Kraft macht nothwendig mit AA_1 und AA_2 ***gleich grofse*** Winkel $A_1AA_3 = A_2AA_3$. Denn da die Kräfte AA_1 und AA_2 ***gleich grofs*** sind, so ist kein Grund vorhanden, weshalb die Richtung der mittlern Kraft derjenigen der einen Kraft näher liegen sollte, als der der andern. Die ***Gröfse*** der mittlern Kraft bleibe einstweilen dahingestellt.

F. Eben so setze man statt der beiden Kräfte $BB_1 = p$, und $BB_1 = q$ eine ***mittlere*** Kraft, die eben so auf den Punct B wirkt, wie jene beiden. Von dieser mittlern Kraft sind sowohl ***Richtung*** als ***Gröfse*** noch ***unbekannt.*** Von der ***Richtung*** weifs man blofs, dafs sie, wie z. B. die Linie BB_3, ***zwischen*** die Linien BB_1 und BB_2 fallen mufs; denn sie kann weder ***in*** eine dieser Linien, noch ***aufserhalb*** des Winkels B_1BB_2 fallen.

G. Da aber auf diese Weise die Winkel A_3AB und B_3BA zusammen jedenfalls gröfser als zwei rechte sind, indem A_2AB und B_2BA zusammen zwei rechte ausmachen, so müssen sich A_3A und B_3B nothwendig oberhalb AB irgendwo ***schneiden.*** Es geschehe in ***M;*** von wo nun auch eine Linie MM_3, mit AA_2 und BB_2 parallel gezogen, die Linie ***AB zwischen A*** und ***B treffen*** mufs.

H. Nun stelle man sich AM und BM etwa als feste ***Stangen*** vor. Legt man dann an den Punct ***M dieselben*** vier Kräfte, welche an A und B

wirken, nach denselben ***Richtungen***, nemlich die Kraft $MM_1 = p = AA_1$ ***parallel*** mit AA, die Kraft $MM_2 = p = BB_1$, ***parallel*** mit BB_1, und die Kräfte $MM_3 = p = AA_2$ und $MM_4 = q = BB_2$ ***parallel*** mit p und q, so werden diese vier Kräfte MM_1, MM_2, MM_3 und MM_4 eben so auf den Hebel AB wirken, wie die vier Kräfte AA_1, AA_2, BB_1 und BB_2, und folglich auch eben so, wie blofs die beiden gegebenen Kräfte $AA_2 = p$ und $BB_2 = q$, indem die beiden übrigen Kräfte $AA_1 = p$ und $BB_1 = p$ sich aufheben (*D.*). Und da auch in M die beiden gleichen Kräfte $MM_1 = p$ und $MM_2 = p$ sich ***aufheben***, so bleiben nur die beiden Kräfte $MM_3 = p$ und $MM_4 = q$ übrig, die also nun eben so auf den Hebel wirken, wie die $AA_2 = p$ und $BB_2 = q$. Sie fallen in eine und dieselbe Linie, nach gleicher Richtung, und folglich machen sie ***zusammen*** die Kraft

$$(2.) \qquad p + q$$

aus, die von $AA_1 = p$ und $BB_1 = q$ in der Richtung MM_3 parallel mit AA_2 und BB_2 hervorgebracht wird. Deshalb wird dann auch, wenn man in demjenigen Punct, in welchem MM_3 die AB schneidet, eine Kraft $p + q$ in entgegengesetzter Richtung M_3M an den Hebel anbringt, diese Kraft den Kräften $AA_2 = p$ und $BB_2 = q$ das ***Gleichgewicht*** halten und folglich jener ***Schneidepunct*** der ***Ruhepunct*** des Hebels sein.

I. Da die für die ***mittlere*** Kraft von $BB_1 = p$ und $BB_2 = q$ ***vorausgesetzte*** Richtung BB_3 noch ***unbekannt*** ist, so ist auch der Punct M ***unbekannt***, wo B_3B verlängert, die Verlängerung der ihrer ***Richtung*** nach ***bekannten*** mittlern Kraft A_3A schneidet, mithin auch der ***Schneidepunct*** von MM_3 und AB, und folglich auch der ***Ruhepunct*** des Hebels.

Aber der Punct M ergiebt sich aus dem als bewiesen ***vorausgesetzten*** Satz vom ***Hebel***. Nach diesem Satze liegt der Ruhepunct C um q von A und um p von B entfernt. Also folgt umgekehrt, dafs der Punct M, in welchem sich die Richtungen A_3A und B_3B der ***mittleren Kräfte*** von $AA_1 = p$, $AA_2 = p$ und von $BB_1 = p$ und $BB_2 = q$ verlängert schneiden, ***derselbe*** ist, in welchem eine mit AA_2 oder BB_2 durch C gezogene Parallele die Verlängerung von A_3A trifft.

Dadurch ist der Punct M ***vollständig bestimmt.*** Und da die Winkel CAM, A_1AA_3, A_2AA_3 und MAC einander gleich sind, so ist das Dreieck AMC über AM ***gleichschenklig***, und folglich ist $MC = AC = q$ und M_4 fällt in C, wegen $MC = AC = q$.

K. Da jetzt der Punct ***M bekannt*** ist, so ist nun auch die ***Richtung MB*** der Verlängerung der vorausgesetzten ***Richtung*** BB_3 der ***mittleren*** Kraft von $BB_1 = p$ und $BB_2 = q$ ***bekannt.*** Sie ist die der ***Diagonal*** des ***Vierecks*** MM_2CB; und dieses Viereck ist ein ***Parallelogramm,*** weil $MM_2 = CB = p$ und parallel mit CB ist. Dem Parallelogramm M_4M_2 ist aber, wenn man B_2B_3 mit BB_1 und B_1B_3 parallel mit BB_2 zieht, die sich dann in der verlängerten MB schneiden, das Parallelogramm B_2B_1 ***gleich:*** also ist die ***Richtung*** der mittleren Kraft von $BB_1 = p$ und $BB_2 = q$ die der ***Diagonal*** des über p und q beschriebenen ***Parallelogramms.*** So ist die ***Richtung*** der mittleren Kraft von p und q gefunden.

L. Es kommt nun noch auf die ***Gröfse*** der mittlern Kraft von p und q an, die durch z bezeichnet werden mag.

Man setze, es sei z ***nicht gleich*** der Diagonal BB_3 des Parallelogramms B_1B_2, sondern z. B. ***kleiner,*** und gleich BN. Dann müfste eine Kraft $z = BN_1 = BN$, in entgegengesetzter Richtung von BN, mit den beiden Kräften $BB_1 = p$ und $BB_2 = q$ im ***Gleichgewicht*** sein. Also müfste auch die ***mittlere*** Kraft der beiden Kräfte $BN_1 = z$ und $BB_2 = q$ grade die entgegengesetzte ***Richtung*** der dritten Kraft $BB_1 = p$ haben. Aber die ***mittlere*** von zwei Kräften hat immer, wie oben gefunden, die ***Richtung*** der Diagonal des über den beiden Kräften beschriebenen ***Parallelogramms.*** Also würde hier die ***mittlere*** Kraft von $BN_1 = z$ und $BB_2 = q$ die ***Richtung*** der Diagonal BN_2 des Parallelogramms $BN_1N_2B_2$ haben. Diese Richtung ist aber offenbar ***nicht*** die Verlängerung von BB_1. Also kann nicht $z < BB_3$ sein.

Setzt man $z > BB_3$, z. B. $= BL$ und $BL_1 = BL$, so müfste die ***mittlere*** Kraft von $BL_1 = z$ und $BB_2 = q$ die Richtung der Diagonal BL_2 des über BL_1 und BB_2 beschriebenen Parallelogramms $BL_1L_2B_2$ haben. Diese Richtung ist aber wiederum ***nicht*** die Verlängerung von BB_1. Mithin kann auch nicht $z > BB_3$ sein.

Folglich kann nur z ***gleich*** BB_3 sein, und die Diagonal BB_3 des über $BB_1 = p$ und $BB_2 = q$ beschriebenen Parallelogramms $BB_1B_2B_3$ drückt die mittlere Kraft von p und q sowohl nach ***Gröfse*** als nach ***Richtung*** aus; welches der Satz vom ***Parallelogramm der Kräfte*** ist, begründet auf dem Satz vom Hebel.

Beweis des Satzes vom *Hebel*, wenn der Satz vom Parallelogramm der Kräfte als bewiesen vorausgesetzt wird.

3.

A. Es ist zu diesem Beweise nicht der *vollständige* Satz vom Parallelogramm der Kräfte, sondern nur der Satz (§. 2. *K.*) nöthig, nemlich, dafs die mittlere Kraft zweier Kräfte p und q die *Richtung* der Diagonal des über $p = q$ beschriebenen Parallelogramms hat.

B. Man lege nemlich, wie oben, an den Hebel noch die beiden sich aufhebenden Kräfte $AA_1 = p$ und $BB_1 = p$, so kommt es nur darauf an, in welchem Puncte M die Richtungen A_3AM und B_3BM der mittleren Kräfte von $AA_1 = p$, $AA_2 = q$ und von $BB_1 = p$ und $BB_2 = q$ sich schneiden. Denn legt man an diesen Punct M, wie oben, die vier Kräfte $MM_1 = p$, $MM_2 = p$ parallel mit AB, und $MM_3 = p$ und $MM_4 = q$ parallel mit AA_2 oder BB_2, so wirken dieselben eben so auf den Hebel, wie die beiden gegebenen Kräfte p und q, und der Punct C, in welchem eine Parallele mit AA_2 oder BB_2, durch M gezogen, die Linie AB schneidet, ist der Ruhepunct des Hebels, in welchem eine Kraft $MM_3 + MM_4 = p + q$, in entgegengesetzter Richtung von p und q angebracht, den Kräften p und q das Gleichgewicht hält.

C. Ist nun bewiesen, dafs die mittleren Kräfte von $BB_1 = p$ und $BB_2 = q$ und von $AA_1 = p$ und $AA_2 = p$ die *Richtungen* BB_3 und AA_3 der *Diagonalen* der Parallelogramme B_1B_2 und A_1A_2 haben, so werden die Richtungen der Linien AM und BM durch die Winkel α und β in den Dreiecken ACM und BCM bestimmt. Zieht man daher MC durch M mit AA_2 oder BB_2 parallel, so mufs

$$(3.) \quad \frac{BC}{MC} = \frac{BB_1}{B_1B_2} = \frac{p}{q} \quad \text{und} \quad \frac{AC}{MC} = \frac{AA_1}{AA_2} = \frac{p}{q} = 1$$

sein. Dies giebt, Eins durch das Andere dividirt:

$$(4.) \quad \frac{BC}{AC} = \frac{p}{q};$$

und dies ist der Satz vom *Hebel*.

Vorbemerkungen zu andern unabhängigen Beweisen der Sätze vom Parallelogramm der Kräfte und vom Hebel.

4.

A. Eine *Kraft* wird durch die *Zahl*, welche angiebt, wievielmal sie eine zur *Einheit* angenommene Kraft enthält, und durch eine gerade *Linie*

bestimmt, welche die ***Richtung*** der Kraft hat. Giebt man dieser Linie eine bestimmte ***Länge***, welche ihrerseits durch die ***Zahl*** der in der Länge enthaltenen ***Längen-Einheiten*** gemessen wird, so läfst sich, wenn man die Zahl der Längen-Einheiten der Zahl der in der Kraft enthaltenen Kraft-Einheiten entweder gleich setzt, oder beide in ein bestimmtes Verhältnifs bringt, die Kraft durch die Linie, nach ***Richtung*** und Stärke vollständig ***bildlich*** darstellen. Also wird eine Kraft überhaupt durch ***Zahl*** und ***Form***, oder durch ***Zahl*** und ***Raum*** dargestellt.

B. Dies reicht in den Fällen, wo Kräfte einander das ***Gleichgewicht*** halten, und wo folglich ***keine Bewegung*** entsteht, also in der ***Statik***, völlig aus; wie es sich z. B. beim Parallelogramm der Kräfte zeigt. Aber wenn Kräfte ***nicht*** einander das Gleichgewicht halten, sondern ***Bewegung*** erfolgt, reicht die obige bildliche Darstellung der Kräfte nicht hin, weil die Bewegung durch Richtung und Ausdehnung, also durch ***Zahl*** und ***Raum*** noch nicht vollständig gemessen wird, sondern auch noch die ***Zeit*** in Betracht kommt; denn es kommt darauf an, in welcher ***Zeit*** diese oder jene Ausdehnung in dieser oder jener Richtung durchlaufen wird. Die ***Zeit*** wird ihrerseits durch eine ***Zahl*** von willkürlich angenommenen ***Zeit-Einheiten*** gemessen. Also sind zum Messen der ***Bewegung*** zusammen ***Zahl***, ***Richtung*** oder ***Raum***, und ***Zeit*** nöthig.

Die ***Zahl*** oder ***Menge*** ist ein ***Urbegriff;*** die ***Richtung*** oder die Form des ***Raums*** ist es gleichfalls, und die ***Zeit*** ebenfalls. Alle ***drei*** (nicht blofs die beiden: ***Raum*** und ***Zeit***) sind für die Gröfsenlehre, wenn man es so nennen will, ***Formen*** der ***Wahrnehmung***.

Die ***Analysis*** oder ***Rechenkunst*** beschäftigt sich blofs mit der ***Zahl***, ohne weitere Anwendung auf die Dinge. Die ***Geometrie*** verbindet bei ihren Untersuchungen ***Zahl*** und ***Raum;*** die ***Mechanik: Zahl***, ***Raum*** und ***Zeit***. ***Rechenkunst***, ***Geometrie*** und ***Mechanik*** sind auf diese Weise die drei wesentlichen Theile der ***Mathematik*** oder Gröfsenlehre.

C. Für denjenigen Theil der ***Mechanik***, welcher blofs das ***Gleichgewicht*** der Kräfte, nicht die ***Bewegung*** betrachtet, ist der Begriff der ***Zeit*** ***gleichgültig;*** sie kann, von Null bis Unendlich, sein was man will. Die ***Statik*** stellt, wie schon bemerkt, die ***Stärke der Kräfte*** durch die ***Länge*** von geraden Linien ***bildlich***, und die ***Richtungen*** der Kräfte durch die ***Richtung*** dieser Linien vor, und bedarf so nur der Urbegriffe von ***Zahl*** und ***Raum***.

D. Aber es hindert nichts, das ***Gleichgewicht*** von Kräften auch auf die Weise zu untersuchen, dafs man annimmt, diese oder jene, ***zugleich*** wir-

kenden Kräfte kämen ***neben einander*** wirklich zu ihrer Wirkung und erzeugten ***Bewegung.*** Ist dann das ***End-Ergebnifs dasselbe,*** wie das von der Wirkung dieser oder jener ***andern*** zugleich wirkenden, ebenfalls neben einander zur Wirkung gelangenden Kräften, so darf man mit Grunde schliefsen. dafs die erste Gruppe von Kräften, ***zugleich*** wirkend, der zweiten Gruppe (die letzte in grade entgegengesetzten Richtungen angenommen) das ***Gleichgewicht*** halten werde, weil die zweite Gruppe, ***nach*** der ersten und in entgegengesetzten Richtungen wirkend, die Masse, auf welche die Wirkung geschieht, grade wieder nach ***demselben Orte*** zurückführen würde, von welchem die erste Gruppe sie entfernte.

Diese Ansicht wollen wir auf den vorliegenden Gegenstand anzuwenden versuchen. Es werden dazu folgende Lehnsätze nöthig sein.

Lehnsätze.

5.

A. ***Wirkungen*** verhalten sich unter sonst gleichen Umständen wie die ***Ursachen;*** und umgekehrt. Wenn man will, kann man diesem Satze auch noch erst den einfacheren Satz vorausschicken, dafs ***gleiche*** Ursachen ***gleiche*** Wirkungen haben, und umgekehrt; was offenbar ohne Beweis richtig und folglich ***Grundsatz*** ist; und dann den Satz erst für ***rationale*** Verhältnisse von Ursachen und Wirkungen, hierauf, nach der gewöhnlichen Art des Überganges vom Rationalen zum Irrationalen, auch für ***irrationale*** Verhältnisse beweisen.

B. Die ***Geschwindigkeiten*** c und C, welche eine auf ***eine und dieselbe*** träge Masse M unveränderlich stark fortwirkende, sich gleich bleibende Kraft P also auch die sich gleichbleibende ***beschleunigende Kraft*** $p = \frac{P}{M}$ (nemlich der auf die ***Einheit der Masse*** kommende Theil der Kraft) in ***verschiedenen*** Zeiträumen t und T hervorbringt, verhalten sich wie diese ***Zeiträume,*** und umgekehrt, so dafs

$$(5.) \qquad \frac{C}{c} = \frac{T}{t} \quad \text{und} \quad \frac{C}{T} = \frac{c}{t} \text{ ist.}$$

Denn die ***verschiedene Dauer*** der sich gleichbleibenden Kraft und die Masse sind hier die ***Ursachen*** und die hervorgebrachten Geschwindigkeiten die ***Wirkungen,*** und diese verhalten sich wie jene (***E.***).

C. Die ***Geschwindigkeiten*** c und C, welche verschiedene, auf eine

und dieselbe träge Masse M unveränderlich stark fortwirkende, sich gleich bleibende Kräfte Q und P, also auch die sich gleichbleibenden ***beschleunigenden*** Kräfte $p = \frac{P}{M}$ und $q = \frac{Q}{M}$ in ***gleichen*** Zeittheilen t hervorbringen, verhalten sich wie die ***Kräfte,*** und umgekehrt, so dafs

$$(6.) \qquad \frac{c}{C} = \frac{Q}{P} = \frac{q}{p} \text{ ist.}$$

Denn die ***verschiedenen,*** für dieselbe Masse und Zeit sich gleichbleibenden Kräfte sind hier die ***Ursachen:*** die in den ***gleichen*** Zeittheilen hervorgebrachten Geschwindigkeiten sind wieder die ***Wirkungen;*** und diese verhalten sich wie jene (*A.*).

D. Die ***Räume r*** und R, durch welche eine und dieselbe ***Masse M*** von zwei verschiedenen, unveränderlich stark fortwirkenden ***bewegenden Kräften*** Q und P, deren zugehörige beschleunigende Kräfte q und p also $q = \frac{Q}{M}$ und $p = \frac{P}{M}$ sind, in ***gleichen Zeittheilen T*** fortgetrieben wird, verhalten sich wie die Kräfte, und umgekehrt; so dafs also

$$(7.) \qquad \frac{R}{r} = \frac{P}{Q} = \frac{p}{q} \text{ ist.}$$

a. Denn man stelle, ***bildlich,*** durch die Abscissen At_1, At_2, ... AT (Fig. 2) verschiedene ***Zeiträume*** t_1, t_2, ... T, und durch die auf diese Abscissen senkrechten Ordinaten t_1c_1, t_2c_2, ... Tc und t_1C_1, t_2C_2, ... TC die von zwei verschiedenen ***bewegenden Kräften*** Q und P auf eine und dieselbe Masse M, also die von den ***beschleunigenden Kräften*** $q = \frac{Q}{M}$ und $p = \frac{P}{M}$ in den Zeiträumen t_1, t_2, ... T hervorgebrachten ***Geschwindigkeiten*** c_1, c_2, ... c und C_1, C_2, ... C vor, so bezeichnen offenbar, eben so bildlich, die ***Flächen f*** und F der beiden ***Figuren*** $TAc_1c_2 \ldots c$ und $TAC_1C_2 \ldots C$ die ***Räume r*** und R, durch welche der Körper von den beiden beschleunigenden Kräften q und p in der ***gleichen*** Zeit T fortgetrieben wird.

b. Nun ist für die Kraft q nach (5. ***B.***) $\frac{c_1}{t_1} = \frac{c_2}{t_2} \cdots = \frac{c}{T}$ und für die Kraft p, $\frac{C_1}{t_1} = \frac{C_2}{t_2} \cdots = \frac{C}{T}$, also ist in der Figur:

$$(8.) \qquad \frac{c_1 t_1}{At_1} = \frac{c_2 t_2}{At_2} \cdots = \frac{cT}{AT} \quad \text{und} \quad \frac{C_1 t_1}{At_1} = \frac{C_2 t_2}{At_2} \cdots = \frac{CT}{AT},$$

und folglich sind $Ac_1c_2 \ldots c$ und $AC_1C_2 \ldots C$ ***gerade Linien*** und die Figuren $TAc_1c_2 \ldots c$ und $TAC_1 \ldots C$ sind ***geradlinige rechtwinklige Dreiecke.***

c. Die Flächen f und F dieser Dreiecke sind

$$(9.) \quad f = \tfrac{1}{2}AT \times Tc \quad \text{und} \quad F = \tfrac{1}{2}AT \times TC.$$

Und da AT die Zeit T und Tc und TC die Geschwindigkeiten c und C vorstellen, so ist

$$(10.) \quad f = \tfrac{1}{2}Tc \quad \text{und} \quad F = \tfrac{1}{2}TC.$$

d. Die Flächen f und F stellen aber die ***Räume*** vor, durch welche die Kräfte p und Q den Körper in der gleichen Zeit T getrieben haben (a); also ist

$$(11.) \quad r = \tfrac{1}{2}Tc \quad \text{und} \quad R = \tfrac{1}{2}TC.$$

e. Hieraus folgt

$$(12.) \quad \frac{r}{R} = \frac{c}{C},$$

und da zufolge (6. *C.*) $\frac{c}{C} = \frac{Q}{P} = \frac{q}{p}$ ist:

$$(13.) \quad \frac{R}{r} = \frac{P}{Q} = \frac{p}{q},$$

wie (7.).

E. Wenn die bewegende Kraft S die Masse M in der Zeit T durch den Raum r zu treiben vermag, so vermag sie die Masse m in *derselben* Zeit T durch den Raum $R = \frac{Mr}{m}$ zu treiben, so dafs

$$(14.) \quad Mr = mR \text{ ist.}$$

Denn die ***beschleunigenden Kräfte,*** welche S auf M und m hervorbringt, seien

$$(15.) \quad q = \frac{S}{M} \quad \text{und} \quad p = \frac{S}{m}.$$

Diese ***beschleunigenden Kräfte*** wirken auf *gleiche* Massen, nämlich auf die gemeinschaftliche ***Einheit der Massen*** M und m; also ist nach (13.)

$$(16.) \quad \frac{R}{r} = \frac{p}{q}$$

und, hierin die Ausdrücke von p und q (15.) gesetzt:

$$(17.) \quad \frac{r}{R} = \frac{S}{M} : \frac{S}{m} = \frac{m}{M} \quad \text{oder} \quad Mr = mR,$$

wie (14.)

Unabhängiger Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte; ohne den Satz vom Hebel.

6.

A. Wenn auf eine Masse in C (Fig. 3) zwei *gleiche* Kräfte $D_1C = r$ und $D_2C = r$ ***zugleich*** wirken, so wird es immer eine *mittlere* Kraft $AC = p$

geben, welche auf C ***dieselbe*** Wirkung hervorbringt, wie die beiden gleichen Kräfte r. Ihre ***Richtung*** AC wird den Winkel D_1CD_2 ***halbiren***; ihre Gröfse oder Stärke bleibt einstweilen dahingestellt.

Wenn nemlich die beiden Kräfte r auf C ***zugleich*** wirken, so kann C offenbar weder in der Richtung D_1CD_4, noch in der Richtung D_2CD_3 fortgetrieben werden. Die Kraft D_2C *lenkt* C von der Richtung D_1CD_4 nach *oben* hin, und die Kraft D_1C von der Richtung D_2CD_3 nach ***unten*** hin ab, so dafs sich C in einer Richtung ACE fortbewegen wird, welche ***zwischen*** D_1C und D_2C fällt. Aber es ist kein Grund vorhanden, warum AC ***näher*** an DC_1 als an D_2C liegen sollte, und folglich wird AC den Winkel D_1CD_2 *halbiren*. Und da nun C wirklich in dieser Richtung AC sich fortbewegen mufs, so wird es auch nothwendig irgend eine nach AC selbst wirkende Kraft p geben, welche C ***eben so*** forttreibt, wie die beiden ***zugleich*** wirkenden gleichen Kräfte $D_1C = r$ und $D_2C = r$.

B. Wenn auf eine, von einer bewegenden Kraft P, oder von einer beschleunigenden Kraft $p = CA$ (Fig. 4) in der Richtung AC fortgetriebene Masse in C, eine zweite beschleunigende Kraft $q = BC$ in der auf AC ***senkrechten*** Richtung BC wirkt, so behält p in allen mit AC ***parallelen*** Richtungen ihre ***volle Wirkung***. Sie wird in allen diesen Richtungen durch q weder verstärkt noch geschwächt; p wirkt in allen diesen Richtungen so, als wenn q gar nicht da wäre.

Denn es sei erst blofs p ohne q vorhanden und man lasse auf C noch zwei andere *gleiche* Kräfte $D_1C = r$ und $D_2C = r$ in Richtungen wirken, die mit AC *gleiche* Winkel machen. Dann wird die Richtung der ***mittleren*** Kraft, welche zufolge (*A.*) die Stelle der beiden Kräfte r vertritt in AC fallen. Jede der beiden *gleichen* Kräfte r aber wird zu der mittleren Kraft offenbar einen *gleichen* Theil s beitragen: also wird p durch die beiden gleichen Kräfte r um die Kraft $2s$ ***verändert*** werden. Nun lasse man den beiden gleichen Kräften $D_1C = r$ und $D_2C = r$ zwei andere *gleiche* Kräfte $D_3C = r$ und $D_4C = r$ *grade entgegen* wirken: so wird auch die die Stelle dieser gleichen Kräfte $D_3C = r$ und $D_4C = r$ vertretende mittlere Kraft die Kraft p um 2σ ***verändern*** und ihre Richtung wird in die gerade Linie ECA fallen. Aber die Kräfte $D_1C = r$ und $D_4C = r$, so wie $D_2C = r$ und $D_3C = r$, ***heben sich gegenseitig auf.*** Also müssen auch ihre ***mittleren*** Kräfte $2s$ und 2σ sich *aufheben*, so dafs $s = \sigma$ sein mufs; und die Wirkung auf C wird so sein, als wenn die vier Kräfte r gar nicht da wären. Aber, da $s = \sigma$

sein mufs, so werden auch die ***Theile*** s und σ, welche die Kräfte $D_2C = r$ und $D_4C = r$ zu der Wirkung auf C in der Richtung AC beitragen, *einzeln* sich *aufheben,* und diese beiden Kräfte werden auf C *in der Richtung* ACE *gar keine* Wirkung haben. Die Stelle der beiden Kräfte $D_2C = r$ und D_4C kann nun zufolge (*A.*) eine *mittlere* Kraft, welche $= q$ sein mag, vertreten, die dann Dasselbe thut, wie jene beiden. Die Richtung BC dieser mittleren Kraft q wird zufolge (*A.*) den Winkel D_2CD_4 *halbiren,* also auf ACE *senkrecht* stehen. Mithin hat die nach BC *senkrecht* auf die Richtung AC von p wirkende Kraft q auf die Bewegung der Masse in C nach AC, und nach allen Richtungen die mit AC parallel sind, *gar keine* Wirkung.

C. Wenn zwei beschleunigende Kräfte p und q, deren Richtungen AC und BC (Fig. 5) auf einander *senkrecht* stehen und deren Stärke durch die Linie AC und BC vorgestellt wird, *gleichzeitig* auf C wirken, so wird eine *mittlere* Kraft s, deren Richtung und Stärke durch die Richtung und Länge der ***Diagonal*** Dc des ***Rechtecks*** $ABCD$ vorgestellt wird, auf C *dieselbe* Wirkung haben, wie p und q zusammen.

a. Denn man setze, die Kraft p könne die Masse in C in einer Ebene, in welcher ACB liegt, frei in der Richtung AC, so wie in jeder damit parallelen Richtung, forttreiben, und sie treibe sie wirklich in *der Zeit* T durch die Länge $CA_1 = R$ fort. Ferner stelle man sich vor, q könne C, *nur zusammen mit der Ebene* ACB *selbst,* in der Richtung BC, so wie in allen damit parallelen Richtungen, frei forttreiben und sie treibe so die Masse in *derselben* Zeit T durch die Länge $CB_1 = r$ fort. Dann gelangt C durch die *gleichzeitige* Wirkung von p und q nach einem Puncte D_1 in der verlängerten Ebene durch ACB, der von der Linie BCB_1 um die Länge $CA_1 = R$ und von der Linie ACA, um die Länge $CB_1 = r$ *senkrecht* entfernt ist. Denn während die Masse in C durch p von C bis A_1 fortgetrieben wurde, hat q sie, *sammt der Ebene,* um $CB_1 = r$ von der Linie ACA_1 senkrecht entfernt, so dafs die Linie ACA_1 in die um r von ihr entfernte Parallele EBE_1 und also C nach einem Puncte D_1 gelangt ist, der um R von BCB_1 und um r von ACA_1 senkrecht absteht. Dieser Punct D_1 ist der C gegenüberliegende Eckpunct des ***Rechtecks*** A_1B_1 unter R und r.

b. Bei der gleichzeitigen Wirkung von p und q ist die Richtung von p immer mit AC und die Richtung von q immer mit BC *parallel,* also immer *senkrecht* auf AC geblieben. Nun haben zufolge (*B.*) zwei Kräfte, deren Richtungen auf einander *senkrecht* stehen, jede auf die andere, in *dieser*

ihrer Richtung gar keinen Einflufs: also ist die Masse in C von p frei und ganz so fortgetrieben worden, als wenn q gar nicht da wäre, und von q ganz so, als wenn p gar nicht da wäre. Und da also auf diese Weise die Kräfte p und q ihre volle Wirkung hatten, so verhalten sich die Räume R und r, durch welche sie eine und dieselbe Masse in der Zeit T fortgetrieben haben, zufolge (§. 5. *D.*), wie ***die Kräfte selbst*** und folglich ist

$$(18.) \qquad \frac{R}{r} = \frac{B_1D_1}{A_1D_1} = \frac{p}{q} = \frac{AC}{BC}.$$

Mithin ist A_1B_1 ein dem Reckteck AB ***ähnliches*** Rechteck.

c. Da auch, wenn für irgend einen ***andern*** Zeitraum t die durchlaufenen Räume $Ca = R_1$ und $Cb = r_1$ sind, eben so

$$(19.) \qquad \frac{R_1}{r_1} = \frac{bd}{ad} = \frac{p}{q} = \frac{AC}{BC}$$

ist, so ist

$$(20.) \qquad \frac{Ca}{ad} = \frac{CA_1}{A_1D},$$

und folglich ist, da dies für ***alle*** Puncte von CA_1 und CB_1 gilt, CD_1 eine ***gerade Linie,*** und die Masse in C hat unter der Wirkung der Kräfte p und q die ***Diagonal*** CD_1 des dem Rechteck AB ähnlichen Rechtecks A_1B_1 durchlaufen.

d. Soll jetzt statt der beiden Kräfte p und q eine ***mittlere*** Kraft s Statt finden, welche ***dieselbe*** Wirkung auf C hat wie p und q, und die also die Masse in C in der Zeit T ***allein*** durch die gerade Linie CD_1 treibt, so mufs sie zunächst die ***Richtung*** der Diagonal CD_1 des Rechtecks A_1B_1 und folglich auch die ***Richtung*** der Diagonal des ***ähnlichen*** Rechtecks AB haben. Ihre ***Stärke*** ergiebt sich aus dem Umstande, dafs, da die Masse in C von p durch den Raum R und von q durch den Raum r getrieben wird, die Kraft s diese Masse durch den Raum $\Delta = CD_1$ mufs zu treiben vermögen. Deshalb ist denn vermöge (13. §. 5. *D.*):

$$(21.) \quad \frac{s}{p} = \frac{\Delta}{CA_1} \text{ und } \frac{s}{q} = \frac{\Delta}{CB_1}, \quad \text{also} \quad (22.) \quad s = \frac{p\Delta}{CA_1} = \frac{q\Delta}{CB_1}.$$

e. Nimmt man endlich grade eine ***solche*** Zeit T an, dafs R oder $CA_1 = AC = p$, also auch r oder $CB_1 = BC = q$, und mithin auch CD_1 oder $\Delta = CD$ ist, so giebt (21.)

$$(23.) \qquad s = \frac{CD.p}{p} = \frac{CD.q}{q} = CD;$$

also stellt die Diagonal ***CD*** des ***Rechtecks AB***, sowohl durch ihre ***Richtung*** als durch ihre ***Länge***, diejenige mittlere Kraft s vor, welche auf eine Masse in ***C dieselbe*** Wirkung hat, wie die beiden ***auf einander senkrechten*** Kräfte p und q.

D. Wenn endlich zwei Kräfte $AC = p$ und $BC = q$ (Fig. 6), deren Richtungen mit einander einen ***beliebigen*** Winkel ***ACB*** machen, ***gleichzeitig*** auf eine Masse in C wirken, so stellt die ***Diagonal DC*** des ***Parallelogramms AB***, unter ***AC*** und ***BC***, sowohl nach ***Richtung*** als ***Länge***, die ***Richtung*** und ***Stärke*** der ***mittlern*** Kraft vor, die, ***allein*** auf die Masse in C wirkend, das ***Nemliche*** thut, wie p und q zusammen.

a. Denn man ***beschreibe*** das ***Parallelogramm AB*** unter $AC = p$ und $BC = q$, ziehe die Diagonal ***CD***, fälle auf dieselbe aus A und B die Perpendikel ***AE*** und ***BF***, ziehe durch C die mit den beiden parallelen Perpendikeln parallele gerade Linie ***GCH***, und dann noch ***BG*** und ***AH*** mit ***CD*** parallel, also senkrecht auf ***GCH:*** so ist $AE = BF = HC = CG$, und ***EH*** und ***FG*** sind ***Rechtecke***.

b. Nun sind ***AC*** und ***BC*** die ***Diagonalen*** der Rechtecke ***EH*** und ***FG***: also stellt ***AC***, nach ***Richtung und Gröfse***, vermöge (C.), eine ***mittlere*** Kraft vor, welche auf C eben so wirkt, wie es zwei Kräfte ***EC*** und ***HC***, zugleich wirkend, thun würden; und ***BC*** stellt, nach ***Richtung und Gröfse***, eine ***mittlere*** Kraft vor, welche auf C eben so wirkt, wie es zwei Kräfte ***FC*** und ***GC***, zugleich wirkend, thun würden. Mithin würden die ***vier*** Kräfte ***EC***, ***HC***, ***FC*** und ***GC***, wenn sie vorhanden wären, eben so auf C wirken, wie die beiden Kräfte ***AC*** und ***BC***. Aber die zwei Kräfte ***HC*** und ***GC***, unter den vieren, sind einander ***gleich*** und ***entgegengesetzt***; sie heben sich also auf und wirken auf C ***gar nicht***. Es bleiben von den auf C eben wie p und q wirkenden vier Kräften nur die beiden ***EC*** und ***FC*** übrig. Beide haben die Richtung ***DC*** und machen also zusammen eine Kraft $EC + FC$ aus, oder, weil $FC = DE$ ist, eine Kraft $EC + DE = DC$. Mithin stellt die ***Diagonal DC*** des Parallelogramms ***AB*** unter $AC = p$ und $BC = q$, nach ***Richtung*** und ***Gröfse***, die ***mittlere*** Kraft vor, welche eben so auf C wirkt, wie die beiden Kräfte p und q.

Dies ist der Satz vom Parallelogramm der Kräfte.

Unabhängiger Beweis des Satzes vom Hebel; ohne den Satz vom Parallelogramm der Kräfte.

7.

A. Man stelle sich die Rollen AC und BC (Fig. 7.) mit einander verbunden und frei um die Axe C beweglich, desgleichen ohne Reibung und Masse vor. In dem Puncte A wirke nach der Richtung AP, senkrecht auf die gerade Linie ACB, eine *bewegende Kraft* P auf die *Masse* M, und in B, nach der mit AP parallelen Richtung BQ, eine *bewegende Kraft* Q auf die *Masse* m; und zwar sollen P und Q von der Art sein, dafs die *beschleunigenden Kräfte* p und q, welche P in M und Q in m hervorbringen, *einander gleich* sind, also so, dafs

$$24. \quad \frac{P}{M} = p = \frac{Q}{m} = q \text{ ist.}$$

B. Nun setze man, M und Q seien nicht da, sondern blofs P und m; das heifst: P wirke *allein, mittelbar* durch den Hebel ACB, auf die Masse m: so mufs, wenn P auf m *dieselbe* Wirkung hervorbringen soll, wie wenn es ohne den Hebel *unmittelbar* auf M wirkte, $m = M \cdot \frac{AC}{BC}$ oder, wenn man

$$(25.) \quad AC = a, \quad BC = b \text{ und } \frac{b}{a} = k$$

setzt.

$$(26.) \quad m = \frac{M}{K}$$

sein. Denn gesetzt, die Kraft P treibe, *unmittelbar* auf M wirkend, mit ihrer *beschleunigenden* Kraft p, den Punct A in der Zeit T durch die Länge des Kreisbogens $A\alpha = r$, so mufs es, *mittelbar* durch den Hebel auf m wirkend, den Punct B durch die Länge des Kreisbogens $B\beta = R$ zu treiben vermögen, wo $\alpha C \beta$ eine gerade Linie ist. Und da nun

$$(27.) \quad \frac{B\beta}{A\alpha} \text{ oder } \frac{R}{r} = \frac{b}{a} = k$$

ist (25.), so mufs, vermöge (14. §. 5. *E.*), $m = M \cdot \frac{r}{R}$, also nach (27.) $m = \frac{M}{k}$ sein; wie (26.).

C. Nun wirke andrerseits auf diese Masse m *allein* die Kraft Q *unmittelbar* und mit *derselben* beschleunigenden Kraft p, wie P auf M, und P und M seien nicht da, so wird Q die Masse m in der Zeit T ebenfalls durch den Raum $r\,(= A\alpha)$ treiben, wie P die Masse M. Man nehme jetzt die

Masse m weg und setze links eine Masse N, auf welche Q *dieselbe* Wirkung *mittelbar* durch den Hebel hervorbringen soll, wie auf m, so mufs sie diese Masse in der Zeit T durch den Raum $r \cdot \frac{AC}{BC} = r \cdot \frac{a}{b} = \frac{r}{k}$ zu treiben vermögen. Also mufs zufolge (14. §. 5. *E.*)

$$(28.) \qquad mr = N \cdot \frac{r}{k} \quad \text{oder} \quad N = mk,$$

mithin vermöge (26.)

$$(29.) \qquad N = M$$

sein.

D. Demnach vermag die Kraft Q, welche mit der *beschleunigenden* Kraft p auf m *unmittelbar* wirken soll, *mittelbar* durch den Hebel, die Masse M links, in der Zeit T durch den Raum $\frac{r}{k}$ zu treiben; und zwar mit derjenigen *beschleunigenden* Kraft q_1, die sie auf M hervorbringt. Dieselbe verhält sich zu p nach (13. §. 5. *D.*) wie die durchlaufenen Räume r und $\frac{r}{k}$, so dafs

$$(30.) \qquad \frac{p}{q_1} = \frac{r}{r:k} = k \quad \text{also} \quad q_1 = \frac{p}{k} \quad \text{ist.}$$

E. Mit dem $k$fachen $k \cdot \frac{p}{k} = p$ dieser *beschleunigenden* Kraft $q_1 = \frac{p}{k}$ würde in derselben Zeit T die Masse M nach (13. §. 5. *D.*) durch das $k$fache $k \cdot \frac{r}{k} = r$ des Raums $\frac{r}{k}$ getrieben werden, durch welchen Q nach *D*, *mittelbar* durch den Hebel, die Masse M treibt. Da nun P, unmittelbar mit ihrer beschleunigenden Kraft $p = \frac{P}{M}$ auf M wirkend, das Gleiche thut, so bringt Q, mit ihrer der p *gleichen beschleunigenden* Kraft $\frac{Q}{m}$ (24.) auf m wirkend, wenn sie statt dessen *mittelbar* durch den Hebel auf M wirkt, auf die Masse M *dieselbe* Wirkung hervor, wie P *unmittelbar; aber in entgegengesetzter Richtung.* Also halten sich die *bewegenden* Kräfte $P = Mp$ und $Q = mp$, die mit *gleichen beschleunigenden* Kräften p auf die Massen M und m wirken, das *Gleichgewicht*, wenn nach (26.)

$$(31.) \qquad \frac{M}{m} = k = \frac{b}{a} \quad \text{oder auch} \quad \frac{Mp}{mp} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{Q} = \frac{b}{a} = \frac{BC}{AC} \quad \text{ist.}$$

F. Läfst man den Hebel, statt aus der geraden unbiegsamen *Linie ACB*, aus zwei *festen* rechtwinkligen Dreiecken CAA_1 und CBB_1 (Fig. 8) bestehen, die beide und in C ebenfalls nicht biegsam sind, so ist es offenbar

gleichgültig, ob die Kräfte P und Q in A und B, oder in A_1 und B_1 angebracht sind. Da nun vermöge der Ähnlichkeit der Dreiecke CAA_1 und CBB_1,

$$(32.) \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C}{A_1C}$$

ist, so sind die Kräfte P und Q auch an dem Hebel A_1CB_1 im Gleichgewicht, wenn

$$(33.) \quad \frac{P}{Q} = \frac{B_1C}{A_1C}$$

ist. Und dies ist der Satz vom Hebel.

Anmerkung.

8.

A. Dafs die Beweise (§. 6. und 7.) der Sätze vom Parallelogramm der Kräfte und vom Hebel Begriffe und Sätze aus der ***Dynamik*** vorausnehmen, ist allerdings ***ungewöhnlich;*** aber daraus folgt nicht, dafs es ***unangemessen*** sei. In der That ist die Sonderung der Statik von der Dynamik eigentlich doch fast nur etwas Willkürliches. Die Statik beschäftigt sich, in der Lehre von den Wirkungen der Kräfte (der Mechanik), mit einem *besondern einzelnen* Falle: dem, in welchem sich die Kräfte aufheben oder ***Gleichgewicht*** Statt findet, und von diesem besondern einzelnen Falle geht man zu dem Allgemeinen, der Dynamik, weiter. Mag nun gleich das Verfahren, vom Besondern zum Allgemeinen aufzusteigen, allerdings für den Unterricht in der Regel das passendste sein, so ist doch auch der umgekehrte Weg keinesweges verboten; und es giebt der Fälle mehrere, wo man durch das Allgemeine für das Besondere *leichter* zum Ziele kommt, als unmittelbar. Zum Beispiel: aus dem *allgemeinen* Ausdruck einer veränderlichen Gröfse lassen sich ihre culminirenden Werthe (ihre Maxima und Minima) viel leichter finden, als unmittelbar. Stellte man in der Algebra den allgemeinen *Taylor*schen Satz (von der Entwicklung einer Function durch Differenzen) an die Spitze, so hätte man Manches, was ohne ihn viel Mühe macht, sehr leicht; wie z. B. den allgemeinen binomischen Lehrsatz, und Anderes; und zugleich wäre schon zu der Differentialrechnung der Grund gelegt. In der Planimetrie leisten bekanntlich stereometrische Sätze, z. B. bei der Untersuchung der Schneidepuncte von Linien, gute Dienste u. s. w. Hier oben zeigt es sich, dafs man durch dynamische Sätze zu einem vom Hebel unabhängigen Beweise des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte offenbar einfacher und leichter gelangt, als vielleicht

auf irgend eine Weise durch blofs statische Mittel. Es wäre vielleicht gar nicht unangemessen, in der Mechanik, und eben so in der Analysis und Geometrie, die ***ersten Grundzüge*** dieser drei Theile der Mathematik, ***in so weit*** es für das weiter erst abzuhandelnde ***Besondere*** nützlich sein kann, an die Spitze zu stellen, darauf erst das Besondere, die Buchstabenrechnung und Algebra, die Planimetrie und die Statik weiter abzuhandeln, und dann zu dem Allgemeineren überzugehen.

B. Sollte indessen das obige Verfahren nicht beliebt werden, besonders nicht für den Beweis des Satzes vom ***Hebel,*** und man bestände auf blofs statische Beweise, so ist für diesen Fall zu bemerken, dafs es jedenfalls besser sein wird, erst den Satz vom ***Hebel,*** unabhängig von dem vom Parallelogramm der Kräfte, zu beweisen, und dann aus ihm den Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte herzuleiten; (was nach (§. 2.) elementar und leicht geschieht): besser, als umgekehrt nach (§. 3.) den Satz vom Hebel auf irgend einen unabhängigen statischen Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte zu gründen. Denn von den unabhängigen Beweisen der beiden Sätze ist jedenfalls der vom Hebel der leichteste.

C. Gewöhnlich bedürfen die unabhängigen, blofs statischen Beweise beider Sätze, wie in (§. 1.) bemerkt, des ***Überganges vom Rationalen zum Irrationalen.*** Allein es dürfte bei dem Beweise des ***Satzes vom Hebel*** vielleicht nicht unmöglich sein, diesen Übergang zu ersparen. Nemlich auf folgende Weise.

Unabhängiger statischer Beweis des Satzes vom Hebel, ohne den Übergang vom Rationalen zum Irrationalen.

9.

A. Es sei ***ACB*** (Fig. 9) eine ***unbiegsame*** gerade Linie, aber ***nicht ohne Masse,*** sondern ***mit Masse,*** die ***gleichförmig*** vertheilt ist, so dafs ***gleiche*** Längentheile der Linie ***gleichviel*** Masse enthalten. Ferner sollen alle ***gleichen*** Theile der Masse von ***gleichen Kräften,*** alle in Richtungen, die auf ***ACB*** senkrecht sind, nach unten getrieben werden; jeder Theil der Masse M der Linie soll von derselben ***beschleunigenden*** Kraft p getrieben werden, so dafs die gesammte ***bewegende*** Kraft P, welche die Masse M der Linie nach unten treibt,

$$P = pM \tag{34.}$$

ist. Der Einwand etwa, dafs es eine ***unbiegsame blofse Linie mit Masse***

in der Wirklichkeit ***nicht gebe,*** ist nicht gültig; denn es giebt in der Wirklichkeit auch keine ***unbiegsame Linie ohne Masse,*** und überhaupt keine blofse Linie. Mit demselben Rechte aber, wie ***solche*** Linien ***vorausgesetzt*** werden, kann auch eine unbiegsame gerade Linie ***mit Masse*** vorausgesetzt werden.

B. Da die Kraft P die Linie ACB, senkrecht auf sie, ***nach unten*** zieht, so wird offenbar eine ***in der Mitte C*** von AB senkrecht auf ACB ***nach oben*** ziehende Kraft $CC_1 = P$ allen den Kräften, die auf die Masse der Linie wirken, das ***Gleichgewicht*** halten, und die Linie wird, von P gleichsam ***getragen,*** vollkommen in Ruhe bleiben. Denn da alle Wirkungen auf die Masse der Linie auf beiden Seiten von C vollkommen ***dieselben*** sind, so ist kein Grund vorhanden, weshalb sich die Linie um den durch die Kraft P gleichsam *fest* gewordenen Punct drehen sollte. Aus ***demselben*** Grunde, aus welchem A z. B. ***nach unten*** sich bewegen möchte, müfste sich auch B ebenfalls ***nach unten*** bewegen; und da beides zugleich wegen der ***Unbiegsamkeit*** der Linie nicht angeht, so bleibt die Linie in Ruhe.

C. Läfst man nun der Kraft $CC_1 = P$ eine *gleiche* Kraft $CC_2 = P$ in gerade entgegengesetzter Richtung entgegenwirken, die also jener das Gleichgewicht hält, so folgt, dafs diese Kraft $CC_2 = P$ die Linie ***eben so*** nach unten zieht, wie die auf die Masse der Linie ***gleichförmig*** vertheilte Kraft $P = pM$ (34.). Die Wirkung ist dieselbe, und man kann daher, statt die Linie *mit* Masse und mit gleichförmig auf dieselbe wirkenden Kräften anzunehmen, auch setzen, die unbiegsame Linie sei ***ohne*** Masse und in ***ihrer Mitte*** treibe eine Kraft P sie nach unten.

D. Nun sei AB (Fig. 10) eine unbiegsame gerade Linie, wiederum mit gleichförmig vertheilter ***Masse,*** auf welche überall die ***beschleunigende*** Kraft p wirkt. Man theile die Länge AB der Linie in zwei ***willkürliche*** Theile $AD = m$ und $BD = n$, die sich also zu einander verhalten wie m zu n, so dafs

$$(35.) \qquad \frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}$$

ist; wo m und n eben so wohl ***irrational,*** als ganze und gebrochene Zahlen sein können.

E. Nimmt man jetzt die unbiegsame Linie ***ohne*** Masse an, und setzt nach (*C.*), statt der Käfte, mit welchen die Theile AD und BD, wenn sie Masse haben, nach unten gezogen werden, in der Mitte der Linien und senkrecht auf AB zwei Kräfte P und Q angebracht, die zufolge (*C.*) die Theile AD und

BD ganz ***eben so*** nach unten ziehen, und die also jenen Kräften *gleich sind*, so müssen sich diese beiden Kräfte ***P*** und ***Q*** wie die ***Längen AD*** und ***BD*** verhalten: denn so verhalten sich die Kräfte, welche die Theile *mit Masse* nach unten ziehen, weil auf jeden gleichen Theil der Länge die gleiche Kraft kommt: also mufs

$$(36.) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{m}{n} = \frac{AD}{BD} \text{ sein.}$$

F. Aber auch der Kraft, welche die *ganze* Linie ***AB***, falls sie ***Masse*** hat, nach unten treibt, hält, zufolge ***B*** in ihrer ***Mitte C*** eine senkrecht auf ***AB*** nach oben ziehende Kraft CC_1 das Gleichgewicht, wenn diese Kraft eben so stark ist, wie die Kraft, welche die *ganze* Linie, *mit Masse*, nach unten treibt. Und da nun der Theil ***AD***, *mit Masse*, von der Kraft ***P*** und der Theil ***BD***, *mit Masse*, von der Kraft ***Q***, also die *ganze* Linie, *mit Masse*, zusammen mit der Kraft $P+Q$ nach unten getrieben wird, so hält eine Kraft $CC_1 = P+Q$, in der Mitte ***C*** von ***AB***, senkrecht auf ***AB*** nach oben ziehend, den Kräften, mit welchen die *ganze* Linie, *mit Masse*, nach unten getrieben wird, das ***Gleichgewicht***, folglich auch den beiden Kräften ***P*** und ***Q*** in der Mitte ***F*** und ***E*** von ***AD*** und ***BD***, welche die ganze Linie *ohne Masse* *eben so stark* nach unten ziehen.

G. Nun ist $AD = m$, $BD = n$, $AB = m+n$, also $AC = \frac{1}{2}(m+n)$, $AF = DF = \frac{1}{2}m$ und $BE = ED = \frac{1}{2}n$ und folglich $FC = AC - AF = \frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}n$ und $EC = BC - BE = \frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}m$, also ist

$$(37.) \qquad \frac{EC}{FC} = \frac{\frac{1}{2}m}{\frac{1}{2}n} = \frac{m}{n}$$

und vermöge (36.)

$$(38.) \qquad \frac{EC}{FC} = \frac{P}{Q};$$

und dies ist der Satz vom *senkrechten* Hebel. Dafs der Ruhepunct ***C*** von der Kraft $P+Q$ gedrückt werde, zeigt sich in (*F.*). Der Übergang zum *schiefen* Hebel kann wie in (§. 7. *F.*) geschehen.

10.

Will man die Vorstellung einer unbiegsamen geraden Linie nicht *mit Masse*, sondern nur *ohne Masse* gestatten (wozu es freilich keinen hinreichenden Grund geben dürfte), so ist, auf die Weise wie z. B. ***Poinsot*** in seiner Statik verfährt, zuerst zu beweisen:

a. Dafs zweien ***gleichen*** Kräften P und P, die in ***gleichen*** Entfernungen $AC = BC$ von C (Fig. 9) in parallelen Richtungen auf einen Hebel wirken, von einer Kraft $2P$, die in C, ***zwischen*** A und B, parallel mit P und P diesen gerade entgegenwirkt, das Gleichgewicht gehalten wird. Dies geschieht durch ***Zusammensetzung*** und ***Wiederzerlegung*** von Kräften, auf die Weise wie in (§. 2. *F. G. H.*), also mit Hülfe und Vorausnahme von Begriffen und Sätzen, welche schon zum Beweise des Satzes vom ***Parallelogramm der Kräfte*** gehören.

b. Ist Dies bewiesen, so folgt weiter, dafs, wenn man AB (Fig. 10) z. B. in $m+n$ ***gleiche*** Theile theilt (wo m und n ***ganze*** Zahlen sind) und je mitten zwischen zwei Theilungspuncten eine gleiche Kraft p, desgleichen alle diese $m+n$ Kräfte in ***parallelen*** Richtungen auf AB wirken läfst: dafs dann eine in der ***Mitte*** C von AB, parallel mit den Kräften p, in entgegengesetzter Richtung auf AB wirkende Kraft $(m+n)p$ allen den $m+n$ Kräften das Gleichgewicht hält. Desgleichen, dafs, wenn von den $m+n$ gleichen Theilen von AB m Theile auf AD und n Theile auf BD kommen, eine Kraft $P = mp$ in der ***Mitte*** F von AD und eine Kraft $Q = np$ in der ***Mitte*** E von BD, parallel mit den p wirkend, eben so viel thun, wie die m Kräfte p, die auf AD und die n Kräfte p, die auf BD wirken, so dafs also die Kraft $(m+n)p$ in C den beiden in F und E wirkenden Kräften P und Q das Gleichgewicht hält.

c. Hierauf wird endlich, ganz ähnlich wie in (§. 9. *D.* bis *G.*), bewiesen, dafs sich P und Q zu einander verhalten müssen, wie EC zu FC, oder wie m zu n.

d. Aber da vorausgesetzt worden, dafs m und n ***ganze*** Zahlen sind, so wird der Satz vom Hebel auf diese Weise nur erst für den Fall bewiesen, wo $\frac{m}{n}$ ***rational*** ist. Um zu den Fall, wo $\frac{m}{n}$ ***irrational*** ist, überzugehen, ist zunächst zu beweisen, dafs, wenn z. B. in (Fig. 10) Q ***zunimmt***, während P ***bleibt***, der Ruhepunct C des Hebels von F sich ***weiter entfernt***, also dafs FC mit Q ***zugleich*** wächst. Dies folgt aus dem Umstande, dafs, wie sich bei dem Theile des Beweises (§. 2. *F. G. H.*) ergeben hat, der ***Ruhepunct*** des Hebels immer ***zwischen*** den Angriffspuncten der beiden Kräfte P und Q, die auf ihn wirken, liegen mufs: das heifst, dafs der Angriffspunct C einer Kraft $R = P+Q$, die nach CC_2 auf den Hebel FE ***eben so wirkt*** wie P und Q, immer ***zwischen*** E und F fällt; was auch P und Q sein mögen.

Vermöge dessen wird, da $R = P + Q$ in C so viel thut als P und Q in F und E, falls Q z. B. um K *zunimmt*, eine Kraft $R + K = P + Q + K$ so viel thun als P und $Q + K$. Aber R in C thut schon so viel als $P + Q$, also mufs die neue Kraft $R + K$ so viel thun als R und K, und der Angriffspunct dieser Kraft $R + K$ liegt *zwischen* C und E: also rückt der Ruhepunct des Hebels E näher, wenn Q zunimmt, und FC und Q nehmen *zugleich* zu.

e. Nachdem auch Dies bewiesen worden, schreitet man nun auf die gewöhnliche Weise zu dem Beweise des Überganges von der Rationalität zur Irrationalität von $\frac{m}{n}$.

Aber die Wiederholung dieses Beweises, auch hier in diesem Falle, ist völlig *unnöthig*, da der Beweis leicht *allgemein* und ein für allemal für alle *ähnliche* Fälle gegeben werden kann, die in der Rechenkunst und Geometrie, eben so wohl wie in der Mechanik, häufig vorkommen. *Wiederholt* man ihn in jedem ähnlichen Falle, so thut man in der That nicht viel anders, als wenn man z. B. den Beweis dieser oder jener Gleichung, der allgemein durch Buchstaben gegeben werden kann, stets für diese oder jene besondern Zahlenwerthe der Buchstaben wiederholt.

Ich habe hierauf schon in meinem Lehrbuche der Elemente der Geometrie (Berlin, bei G. Reimer. 1826.) aufmerksam gemacht und im ersten Bande dieses Buchs (S. 125) den *allgemeinen* Beweis gegeben. Für den Fall, dafs Dies nicht beachtet sein sollte, setze ich die Stelle, welche den Beweis enthält, hieher, nur mit veränderter Buchstabenbezeichnung und noch etwas vervollständigt.

Übergang vom Rationalen zum Irrationalen.

11.

„Erklärung. Wenn *ungleichartige* Gröfsen, z. B. Linien und Winkel, „Winkel und Flächen, Winkel und Körper" (hier Linien und Kräfte), „die „auf irgend eine Weise von einander abhangen, die Eigenschaft haben, dafs, „so lange die eine wächst, oder abnimmt, die andere ebenfalls immer wächst, „oder immer abnimmt, und umgekehrt, nie die zweite vom Wachsen zum „Abnehmen übergeht, so lange es nicht die erste auch thut, so sollen die „Gröfsen *zusammengehörig* heifsen; und zwar, wenn sie beide zugleich „immerfort wachsen, oder immerfort abnehmen, *gleichförmig-zusammengehörig*, „wenn die eine abnimmt, während die andere wächst, *entgegengesetzt-zusam-* „*mengehörig*".

„Lehrsatz. Wenn von zwei ***ungleichartigen***, aber ***gleichförmig-***
„***zusammengehörigen***, von einander abhängigen Gröfsen c und a bewiesen
„werden kann, dafs während c in das $k$fache c oder in $kc = c_1$ übergeht,
„aus a ebenfalls grade das $k$fache ka oder $ka = a_1$ wird, ***wo k eine ganze***
„***Zahl oder einen rationalen Bruch bedeutet,*** so dafs also $c_1 = a_1$ ***commen-***
„***surable Gleichvielfache*** von c und a sind, so gilt das Nämliche auch, wenn
„kc mit c ***incommensurabel***, oder wenn k eine ***irrationale*** Zahl ist; das
„heifst: auch dann gehört grade ka zu kc, und kc und ka sind also ***immer***
„***Gleichvielfache*** von c und a, k mag ***rational*** oder ***irrational*** sein, mithin
„für ***jede beliebige*** Zahl k."

„Beweis. Ginge, im Fall k ***irrational*** ist, a nicht grade in ka über,
„wenn c in kc übergeht, so ginge es in eine ***gröfsere*** oder ***kleinere*** Gröfse
„als ka über, z. B. in die ***gröfsere*** $(k+e)a$; wo e irgend eine" (rationale
oder irrationale) „Zahl ist. Es lassen sich aber" (rationale) „Zahlen, nament-
„lich Brüche, so nahe bei einander annehmen, als man will; z. B. zwei Brüche
„p und q, die um ***weniger als*** e von einander verschieden sind, was auch
„e sein mag. Nun können zwischen den beiden Zahlen p und q nicht zwei
„andere zugleich liegen, deren Unterschied gröfser ist, als der Unterschied
„von p und q: also lassen sich Brüche p und q annehmen, zwischen welchen
„k und $k+e$ ***nicht zugleich*** liegen können. Ist daher p kleiner und q gröfser
„als k, so liegt q nothwendig ***zwischen*** k und $k+e$, und folglich ist ***qa gröfser***
„als ka und ***kleiner*** als $(k+e)a$; desgleichen ist ***qc gröfser*** als kc."

„Nun nehme man an, c und a wachsen, und c gehe zuerst in qc über,
„so mufs nothwendig qa aus a werden, weil der ***Voraussetzung*** nach be-
„wiesen werden kann, dafs für alle ***ganzen Zahlen und Brüche, wie q,***
„a in das ***Gleichvielfache*** übergeht. Geht darauf weiter c von qc in kc über,
„so müfste qa in $(k+e)a$ übergehen, weil nach der obigen Voraussetzung,
„wenn kc aus c wird, a in $(k+e)a$ übergeht. Aber qc ist ***gröfser*** als kc,
„hingegen qa ist ***kleiner*** als $(k+e)a$: also würde die eine Gröfse c von qc
„nach ***kc abnehmen***, während die andere von qa bis ***$(k+e)a$ wächst.*** Dieses
„ist der Voraussetzung entgegen, weil die Gröfsen c und a ***gleichförmig***
„***zusammengehören***, also immer nur zugleich wachsen oder abnehmen sollen,
„***nie abwechselnd.*** Folglich ist es unmöglich, dafs a in ***etwas Gröfseres***
„als ka übergeht, während c von c nach kc gelangt."

„Auf ähnliche Art wird besiesen, dafs aus ***a nichts Kleineres*** als ka
„werden kann, wenn kc aus c wird. Also mufs nothwendig immer a in

„$ka = a_1$ übergehen, wenn $kc = c_1$ aus c wird; auch wenn k *irrational* ist; „das heifst: auch dann sind c_1 und a_1 Gleichvielfache von c und a. Folglich „gilt die ***Gleichvielfachheit,*** die für gleichförmig zusammengehörige *commen-* „***surable*** Gröfsen bewiesen wurde, auch ohne Ausnahme für gleichförmig „zusammengehörige *incommensurable* Gröfsen."

Für *entgegengesetzt-zusammengehörige* Gröfsen ist der Beweis ohne Weiteres in dem vorigen enthalten. Denn man darf nur, wenn c und a entgegengesetzt-zusammengehörige Gröfsen sind, z. B. $b - a$ statt a schreiben, wo $b > a$ und willkürlich ist. Alsdann sind c und $b - a$ *gleichförmig*-zusammengehörige Gröfsen, und was von $b - a$ wie oben bewiesen wird, gilt auch von a.

Anwendung auf den Beweis des Satzes vom Hebel (§. 10.).

12.

A. Hier ergab sich in (§. 10. *d.*), dafs FC (Fig. 10) immer *wächst,* also EC immer abnimmt, folglich auch $\frac{FC}{EC}$ immer *zunimmt,* wenn Q *zunimmt,* während P und FE Dasselbe bleiben. Setzt man daher

$$(39.) \qquad \frac{FC}{EC} = a \quad \text{und} \quad \frac{Q}{P} = c,$$

so sind die von einander abhangenden ungleichartigen Gröfsen a und c *gleichförmig-zusammengehörige* Gröfsen (§. 11.).

B. Nun ist ferner bewiesen worden, dafs

$$(40.) \qquad \frac{FC}{EC} = \frac{n}{m} = a$$

für alle *ganze* Zahlen m und n *gleich* $\frac{Q}{P} = c$ ist: also dafs die *rationalen* Zahlen a und c einander *gleich* sind. Demnach sind auch ka und kc einander gleich, insofern k eine *rationale* Zahl ist, damit ka und kc ebenfalls rational sein mögen.

C. Es nehmen aber $\frac{FC}{EC} = a$ und $\frac{Q}{P} = c$ nach (***A.***) immer *zugleich* zu, niemals das eine ab, wenn das andere zunimmt. Also findet Das was von ka und kc gilt, wenn k oder ka und kc *rational* sind, nach dem allgemeinen Beweise in (§. 11.) auch dann Statt, wenn ka und kc *irrational* sind; folglich ist auch dann $ka = kc$. Das heifst: auch dann, wenn das Verhältnifs kc der Kräfte P und Q zu einander *irrational* ist, ist dieses Verhältnifs dem ka

der Hebels-Arme um den Ruhepunct umgekehrt ***gleich;*** was dann der vollständige Satz vom Hebel ist.

Da dieser vollständige Beweis des Satzes vom Hebel viel weitläuftiger ist, als der in (§. 9.), so dürfte es für die Elemente der Statik, wenn man darin nur statische Beweise zulassen will, rathsam sein, den Satz vom Hebel wie in (§. 9.) und dann weiter mit Hülfe dieses Satzes den Satz vom Parallelogramm der Kräfte wie in (§. 2.) zu beweisen. Dann ist auch der Übergang vom Rationalen zum Irrationalen nirgends nothwendig.

Einiges vom Parallelepipedum der Kräfte.

13.

Da zwei Kräfte a und b, die in der Ebene des Papiers nach Richtung und Gröfse durch die Linien AB und AC (Fig. 11) vorgestellt werden, eben so auf den Punct A wirken, wie eine Kraft welche die ***Diagonal Ad*** des ebenen Parallelogramms $ABCD$ nach Richtung und Gröfse ausdrückt, so wirkt, wenn eine dritte Kraft $AE = c$ hinzukommt, die ***nicht*** in der Ebene des Papiers, sondern *über* derselben, von A aus schräg nach oben gerichtet ist, und man zieht $DH = AE$ mit AE im Raume ***parallel,*** so dafs $ADEH$ ein ebenes Parallelogramm ist, die durch die ***Diagonal AH*** dieses Parallelogramms nach Richtung und Gröfse vorgestellte Kraft eben so stark auf A, wie die beiden Kräfte AD und $AE = c$, und folglich eben so stark auf A, als alle drei Kräfte $AB = a$, $AC = b$ und $AE = c$ zusammen.

Die ***Raum-Diagonal AH*** des ***Parallelepipedums,*** welches entsteht, wenn man durch a und b, b und c und c und a drei Ebenen legt, von welchen drei andere durch die Endpuncte B, C und E von a, b und c mit jenen *parallel* gelegte Ebenen die Parallelogramme $BDHF = ACGE$, $CDGH = ABEF$ und $EGHF = ACDB$ abschneiden, stellt also nach Richtung und Gröfse die *mittlere* ***Kraft*** vor, welche auf A eben so wirkt, wie die drei, durch die in A zusammenlaufenden ***Kanten*** des Parallelepipedums nach Richtung und Gröfse vorgestellten drei Kräfte $AB = a$, $AC = b$ und $AE = c$.

Wir wollen hier die mannichfaltigen *geometrischen* Eigenschaften dieses Parallelepipedums der Kräfte etwas *vollständiger,* als es gewöhnlich geschieht, und dabei so *einfach* und ***kurz*** als möglich entwickeln, weil Dies für die Elemente vielleicht von Nutzen sein könnte.

14.

Was bei dem Gegenstande vorkommt, soll, wie folgt, bezeichnet werden.

A. Linien.

a. Durch $d_a = \boldsymbol{AG} = \boldsymbol{BH}$, $d_b = \boldsymbol{AF} = \boldsymbol{CH}$, $d_c = \boldsymbol{AD} = \boldsymbol{EH}$ die den Kanten a, b und c gegenüberliegenden ***Diagonalen der Seitenflächen***. Die Summe ihrer Quadrate sei

$$(41.) \qquad \Sigma d^2 = d_a^2 + d_b^2 + d_c^2.$$

b. Durch $\delta_\alpha = \boldsymbol{CE} = \boldsymbol{DF}$, $\delta_\beta = \boldsymbol{EB} = \boldsymbol{GD}$, $\delta_\gamma = \boldsymbol{CB} = \boldsymbol{GF}$ die den Winkeln $\boldsymbol{CAE}$, $\boldsymbol{EAB}$, $\boldsymbol{CAB}$, in diesen ***Seitenflächen*** selbst, gegenüber liegenden ***Diagonalen***. Die Summe ihrer Quadrate sei

$$(42.) \qquad \Sigma\delta^2 = \delta_\alpha^2 + \delta_\beta^2 + \delta_\gamma^2.$$

c. Durch $\Delta_1 = \boldsymbol{AH}$, $\Delta_2 = \boldsymbol{BG}$, $\Delta_3 = \boldsymbol{CF}$, $\Delta_4 = \boldsymbol{DE}$ die vier ***Raum-Diagonalen*** des Parallelepipedums. Die Summe ihrer Quadrate sei

$$(43.) \qquad \Sigma\Delta = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2.$$

d. Durch

$$(44.) \qquad \Sigma k^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

die Summe der Quadrate der drei verschiedenen Kanten.

B. Winkel.

e. Durch $\alpha = \boldsymbol{CAE}$, $\beta = \boldsymbol{EAB}$, $\gamma = \boldsymbol{BAC}$ die Winkel, welche die ***Kanten*** a, b, c an der Ecke A einschliefsen. Die Winkel, welche ***dieselben*** drei Kanten an den andern Ecken einschliefsen, sind theils α, β, γ ***selbst***, theils die ***Supplemente*** davon; wovon weiter unten.

f. Durch $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ die Winkel, welche die ***Seitenflächen*** an den Kanten a, b, c einschliefsen.

g. Alle übrigen Winkel zwischen zwei zusammenstofsenden Linien sollen durch diese beiden Linien bezeichnet und es soll, wo es nöthig, noch ***zwischen*** dieselben die Linie gesetzt werden, welche dem Winkel ***gegenüber*** liegt, Alles zusammen in Klammern geschlossen; so dafs also z. B. $\boldsymbol{CDB} = (a, \delta_\gamma, b)$, $\boldsymbol{EAD} = (c, \Delta_4, \delta_\gamma)$, $\boldsymbol{AMB} = (\Delta_1, a, \Delta_2)$ ist. U. s. w.

C. Flächen-Inhalte.

h. Durch $s_1 = \boldsymbol{ABCD} = \boldsymbol{EFGH}$, $s_2 = \boldsymbol{AECG} = \boldsymbol{BFDH}$, $s_3 = \boldsymbol{ABEF} = \boldsymbol{CGHD}$ die Inhalte der ***drei verschiedenen Seitenflächen*** des Parallelepipedums, welche a und b, b und c, c und a zu Seiten haben; die Summen

ihrer Quadrate durch

$$(45.) \quad \Sigma s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

i. Durch $D_{a,d_a} = ABGH$, $D_{b,d_b} = ACHF$, $D_{c,d_c} = AEHD$ und $\mathfrak{D}_{a,\delta_a} = CEFD$, $\mathfrak{D}_{b,\delta_\beta} = BEGD$, $\mathfrak{D}_{c,\delta_\gamma} = CGFB$.

Die Inhalte der sechs ***Diagonalflächen*** des Parallelepipedums mit a, d_a, b, d_b, c, d_c und a, δ_a, b, δ_β, c, δ_γ zu Seiten; die Summen ihrer Quadrate durch

$$(46.) \quad \begin{cases} 1. & \Sigma D^2 = D_{a,d_a}^2 + D_{b,d_b}^2 + D_{c,d_c}^2 \text{ und} \\ 2. & \Sigma \mathfrak{D}^2 = \mathfrak{D}_{a,\delta_a}^2 + \mathfrak{D}_{b,\delta_\beta}^2 + \mathfrak{D}_{c,\delta_\gamma}^2. \end{cases}$$

k. Durch $\varphi_1 = BCE$, $\varphi_2 = ADF$, $\varphi_3 = GDA$ und $\varphi_4 = CHB$ die Inhalte der ***vier*** durch die Endpuncte der Kanten a, b, c, den vier Ecken A, B, C, D ***gegenüber,*** gelegten dreieckigen Flächen; die Summe ihrer Quadrate durch

$$(47.) \quad \Sigma\varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_2^3 + \varphi_4^2.$$

l. Durch $\psi_1 = GDF$, $\psi_2 = CEH$, $\psi_3 = EHB$, $\psi_4 = AGF$ die Inhalte der vier, den Ecken A, B, C, D ***gegenüber,*** durch die Endpuncte der in denselben zusammenstofsenden Seiten-Diagonalen gelegten dreieckigen Flächen; die Summe ihrer Quadrate durch

$$(48.) \quad \Sigma\psi^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2.$$

Auch die Flächen (h, i, k, l) ***selbst*** sollen durch s, D, $\mathfrak{D}$, φ und ψ bezeichnet werden.

D. Raum-Inhalte.

m. Durch P den Raum-Inhalt des ***Parallelepipedums.***

n. Durch $p_1 = ABCE$, $p_2 = BADF$, $p_3 = CGDA$, $p_4 = DCHB$ die Raum-Inhalte der vier ***Pyramiden,*** welche φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4 zu Grundflächen und A, B, C, D zu Spitzen haben; die Summe ihrer Quadrate durch

$$(49.) \quad \Sigma p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4.$$

o. Durch $q_1 = AGDF$, $q_2 = BCEH$, $q_3 = CEHB$, $q_4 = DAGF$ die Raum-Inhalte der vier ***Pyramiden,*** welche ψ_1, ψ_2, ψ_3 und ψ_4 zu Grundflächen und A, B, C, D zu Spitzen haben; die Summe ihrer Quadrate durch

$$(50.) \quad \Sigma q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4.$$

p. Der Kürze wegen soll die Gröfse

$$(51.) \quad 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) = \lambda^2$$

gesetzt werden. Dafs die beiden Ausdrücke von λ einander gleich sind, ist bekannt.

Durch diese Bezeichnungen ausgedrückt, gedenken wir folgender Sätze und ihrer Beweise.

15.

Zunächst ist für die bequeme Aufstellung der Formeln Folgendes zu bemerken.

A. In jeder der vier verschiedenen Ecken A, B, C, D stöfst eine ***Raumdiagonal*** mit den drei ***Kanten***, mit drei ***Seitendiagonalen***, mit drei ***Seitenwinkeln*** und mit drei Flächenwinkeln zusammen; die Kanten und die Seitenflächen unter verschiedenen Winkeln. Und zwar gehören zusammen:

(52.)
$$\begin{cases} 1.\ \Delta_1 \text{ mit } a,b,c, & \alpha, & \beta, & \gamma, & d_a,d_b,d_c, & A, & B, & C; \\ 2.\ \Delta_2 \text{ mit } a,b,c, & \alpha, & 2\varrho-\beta, & 2\varrho-\gamma, & d_a,\delta_\beta,\delta_\gamma, & A, & 2\varrho-B, & 2\varrho-C; \\ 3.\ \Delta_3 \text{ mit } a,b,c, & 2\varrho-\alpha, & \beta, & 2\varrho-\gamma, & \delta_a,d_b,\delta_\gamma, & 2\varrho-A, & B, & 2\varrho-C; \\ 4.\ \Delta_4 \text{ mit } a,b,c, & 2\varrho-\alpha, & 2\varrho-\beta, & \gamma, & \delta_a,\delta_\beta,d_c, & 2\varrho-A, & 2\varrho-B, & C. \end{cases}$$

Um daher Das, was für die erste ***Ecke*** Statt findet, auf die folgenden zu übertragen, darf man nur die Werthe der Buchstaben nach (52.) verändern.

B. Für Das, was für *dieselbe* Ecke Statt findet, darf man nur die Buchstaben in ihrer Ordnung ***weiterrrücken.***

16.

Es ist (§. 14. *a.* und *b.*):

I.

(53.)
$$\begin{cases} 1.\ d_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha, \\ 2.\ d_b^2 = c^2 + a^2 + 2ca\cos\beta, \\ 3.\ d_c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma. \end{cases}$$

(54.)
$$\begin{cases} 1.\ \delta_a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ 2.\ \delta_\beta^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta, \\ 3.\ \delta_\gamma^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{cases}$$

(55.)
$$\begin{cases} 1.\ d_a^2 + \delta_\alpha^2 = 2(b^2 + c^2), \\ 2.\ d_b^2 + \delta_\beta^2 = 2(c^2 + a^2), \\ 3.\ d_c^2 + \delta_\gamma^2 = 2(a^2 + b^2). \end{cases}$$

(56.) $\Sigma d^2 + \Sigma\delta^2 + 4\Sigma k^2.$

a. Wenn nemlich CC_1, EE_1, DD_1, FF_1 und HH_1 auf ABH senkrecht sind, so ist $BD_1 = \cos\gamma$ und $DD_1 = \sin\gamma$, also

(57.) $$AD^2 = (a + b\cos\gamma)^2 + b^2\sin\gamma^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma = d_c^2.$$

Dies ist der Ausdruck (53. 3.). Die andern (53. 1. und 2.) finden sich nach (§. 15. ***B.***).

b. So wie in (53. 1.) d_a mit b, c und α zusammengehört, so gehört nach (52. 3.) δ_α mit b, c und $2\varrho - \alpha$ zusammen. Also erhält man (54. 1.) aus (53. 1.), wenn man $2\varrho - \alpha$ statt α setzt. Die andern Ausdrücke (54. 2. u. 3.) ergeben sich nach (§. 15. ***B.***).

c. Die Ausdrücke (55. und 56.) folgen aus denen (53. und 54.) unmittelbar.

II.

Es ist für (§. 14. *c.*):

$$(58.)\quad \begin{cases} 1.\ \ \Delta_1^2 = \Sigma k^2 + 2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha + 2ca\cos\beta, \\ 2.\ \ \Delta_2^2 = \Sigma k^2 - 2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha - 2ca\cos\beta, \\ 3.\ \ \Delta_3^2 = \Sigma k^2 - 2ab\cos\gamma - 2bc\cos\alpha + 2ca\cos\beta, \\ 4.\ \ \Delta_4^2 = \Sigma k^2 + 2ab\cos\gamma - 2bc\cos\alpha - 2ca\cos\beta. \end{cases}$$

$$(59.)\quad \Sigma\Delta^2 = 4\Sigma k^2.$$

$$(60.)\quad \begin{cases} 1.\ \ d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = \Sigma k^2 + \Delta_1^2, \\ 2.\ \ d_a^2 + \delta_\beta^2 + \delta_\gamma^2 = \Sigma k^2 + \Delta_2^2, \\ 3.\ \ \delta_\alpha^2 + d_b^2 + d_\gamma^2 = \Sigma k^2 + \Delta_3^2, \\ 4.\ \ \delta_\alpha^2 + \delta_\beta^2 + d_c^2 = \Sigma k^2 + \Delta_4^2, \end{cases} \qquad (61.)\quad \begin{cases} 1.\ \ \delta_\alpha^2 + \delta_\beta^2 + \delta_\gamma^2 = 3\Sigma k^2 - \Delta_1^2, \\ 2.\ \ \delta_\alpha^2 + d_b^2 + d_c^2 = 3\Sigma k^2 - \Delta_2^2, \\ 3.\ \ d_a^2 + \delta_\beta^2 + d_c^2 = 3\Sigma k^2 - \Delta_3^2, \\ 4.\ \ d_a^2 + d_b^2 + \delta_\gamma^2 = 3\Sigma k^2 - \Delta_4^2, \end{cases}$$

$$(62.)\quad \Sigma d^2 + \Sigma\delta^2 = \Sigma\Delta^2.$$

a. Denn in dem Dreiecke ABH ist

$$AH^2 = AB^2 + BH^2 - 2AB.BH\cos ABH,$$

das heifst, weil $ABH = 2\varrho - HBH_1$ ist:

$$(63.)\quad \Delta_1^2 = a^2 + d_a^2 + 2a.d_a\cos HBH_1.$$

Nun ist $BD_1 = AC_1 = b\cos\gamma$, und da $DH = c$ mit $AE = c$ im Raume *parallel* ist, $D_1H_1 = AE_1 = c\cos\beta$; also ist $BD_1 + D_1H_1$ oder $BH_1 = b\cos\gamma + c\cos\beta$ und folglich, da $BH_1 = HB\cos HBH_1 = d_a\cos HBH_1$ ist,

$$(64.)\quad d_a\cos HBH_1 = b\cos\gamma + c\cos\beta.$$

Dies, nebst $d_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$ (53. 1.), in (63.) gesetzt, giebt

$$(65.)\quad \Delta_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha + 2ab\cos\gamma + 2ca\cos\beta;$$

wie (58.). Hierin weiter nach (52. 2. 3. 4.) α, $2\varrho-\beta$, $2\varrho-\gamma$; $2\varrho-\alpha$, β, $2\varrho-\gamma$ und $2\varrho-\alpha$, $2\varrho-\beta$ und γ statt α, β, γ gesetzt, giebt (58. 2. 3. 4.).

b. Der Ausdruck (59.) folgt unmittelbar aus (58.), und (60. 61. u. 62.) folgen aus (53. 54. u. 56.).

III.

Es ist für (§. 14. *h.*):

$$(66.)\quad s_1 = ab\sin\gamma, \quad s_2 = bc\sin\alpha, \quad s_3 = ca\sin\beta.$$

Z. B. s_1 ist gleich $AB.CC_1 = ab\sin\gamma$. Nach (§. 15. *B.*) folgen die andern.

IV.

Es ist für (§. 14. *f.*):

$$(67.)\quad \begin{cases} 1.\ \ \cos A = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}, \\ 2.\ \ \cos B = \dfrac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}, \\ 3.\ \ \cos C = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}. \end{cases} \qquad (68.)\quad \begin{cases} 1.\ \ \sin A = \dfrac{\lambda}{\sin\beta\sin\gamma}, \\ 2.\ \ \sin B = \dfrac{\lambda}{\sin\gamma\sin\alpha}, \\ 3.\ \ \sin C = \dfrac{\lambda}{\sin\alpha\sin\beta}. \end{cases}$$

a. Zieht man YX und ZX, wo $AX=1$ gesetzt wird, auf $AE=c$ senkrecht, so ist der Winkel $YXZ=C$. Also ist in den Dreiecken YXZ und YAZ:

(69.) $YZ^2=YX^2+ZX^2-2YX.ZX\cos C=YA^2+ZA^2-2YA.ZA\cos\gamma.$

Aber es ist

(70.) $YX=\operatorname{tang}\alpha,\quad ZX=\operatorname{tang}\beta,\quad YA=\sec\alpha,\quad ZA=\sec\beta,$

also giebt (69.) $\operatorname{tang}\alpha^2+\operatorname{tang}\beta^2-2\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\cos C=\sec\alpha^2+\sec\beta^2-2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma$ oder $-2\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\cos C=2-2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma$ oder mit $\cos\alpha\cos\beta$ multiplicirt,

(71.) $$\cos C\sin\alpha\sin\beta=\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta;$$

wie (67. 3.). Nach (§. 15. *B.*) finden sich (67. 1. u. 2.).

b. Aus (67. 1.) folgt

$$\sin A^2=1-\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right)=\frac{\sin\beta^2\sin\gamma^2-\cos\alpha^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\beta^2\cos\gamma^2}{\sin\beta^2\sin\gamma^2}$$

$$=\frac{(1-\cos\beta^2)(1-\cos\gamma^2)-\cos\alpha^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\beta^2\cos\gamma^2}{\sin\beta\sin\gamma^2}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta^2\sin\gamma^2},\ \text{also}$$

(72.) $$\sin A=\frac{\lambda}{\sin\beta\sin\gamma};$$

wie (68. 1.). Nach (§. 15. *B.*) finden sich (68. 2. u. 3.).

V.

Es ist für (§. 14. *g.*):

(73.)
$$\begin{cases}1.\ d_a\cos(d_a,c)=c+b\cos\alpha,\\ 2.\ d_b\cos(d_b,a)=a+c\cos\beta,\\ 3.\ d_c\cos(d_c,b)=b+a\cos\gamma.\end{cases}$$

(74.)
$$\begin{cases}1.\ d_\alpha\sin(d_a,c)=b\sin\alpha,\\ 2.\ d_b\sin(d_b,a)=c\sin\beta,\\ 3.\ d_c\sin(d_c,b)=a\sin\gamma.\end{cases}$$

(75.)
$$\begin{cases}1.\ \delta_\alpha\cos(\delta_\alpha,c)=c-b\cos\alpha,\\ 2.\ \delta_\beta\cos(\delta_\beta,a)=a-c\cos\beta,\\ 3.\ \delta_\gamma\cos(\delta_\gamma,b)=b-a\cos\gamma.\end{cases}$$

(76.)
$$\begin{cases}1.\ \delta_\alpha\sin(\delta_\alpha,c)=b\sin\alpha,\\ 2.\ \delta_\beta\sin(\delta_\beta,a)=c\sin\beta,\\ 3.\ \delta_\gamma\sin(\delta_\gamma,b)=a\sin\gamma.\end{cases}$$

(77.)
$$\begin{cases}1.\ d_a\cos(d_a,b)=b+c\cos\alpha,\\ 2.\ d_b\cos(d_b,c)=c+a\cos\beta,\\ 3.\ d_c\cos(d_c,a)=a+b\cos\gamma.\end{cases}$$

(78.)
$$\begin{cases}1.\ d_a\sin(d_a,b)=c\sin\alpha,\\ 2.\ d_b\sin(d_b,c)=a\sin\beta,\\ 3.\ d_c\sin(d_c,a)=b\sin\gamma.\end{cases}$$

(79.)
$$\begin{cases}1.\ \delta_\alpha\cos(\delta_\alpha,b)=b-c\cos\alpha,\\ 2.\ \delta_\beta\cos(\delta_\beta,c)=c-a\cos\beta,\\ 3.\ \delta_\gamma\cos(\delta_\gamma,a)=a-b\cos\gamma.\end{cases}$$

(80.)
$$\begin{cases}1.\ \delta_\alpha\sin(\delta_\alpha,b)=c\sin\alpha,\\ 2.\ \delta_\beta\sin(\delta_\beta,c)=a\sin\beta,\\ 3.\ \delta_\gamma\sin(\delta_\gamma,a)=b\sin\gamma.\end{cases}$$

$$(81.)\quad \begin{cases} 1. & \boldsymbol{cd_a}\cos(\boldsymbol{d_a},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{ad_b}\cos(\boldsymbol{d_b},\boldsymbol{a})+\boldsymbol{bd_c}\cos(\boldsymbol{d_c},\boldsymbol{b}) = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta_1^2}+\boldsymbol{\Sigma k^2}) \\ & \quad = \boldsymbol{bd_a}\cos(\boldsymbol{d_a},\boldsymbol{b})+\boldsymbol{cd_b}\cos(\boldsymbol{d_b},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{ad_c}\cos(\boldsymbol{d_c},\boldsymbol{a}), \\ 2. & \boldsymbol{cd_a}\cos(\boldsymbol{d_a},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{ad_\beta}\cos(\boldsymbol{\delta_\beta},\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b\delta_\gamma}\cos(\boldsymbol{\delta_\gamma},\boldsymbol{b}) = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta_2^2}+\boldsymbol{\Sigma k^2}) \\ & \quad = \boldsymbol{bd_a}\cos(\boldsymbol{d_a},\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c\delta_\beta}\cos(\boldsymbol{\delta_\beta},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a\delta_\gamma}\cos(\boldsymbol{\delta_\gamma},\boldsymbol{a}), \\ 3. & \boldsymbol{c\delta_\alpha}\cos(\boldsymbol{\delta_\alpha},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{ad_b}\cos(\boldsymbol{d_b},\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b\delta_\gamma}\cos(\boldsymbol{\delta_\gamma},\boldsymbol{b}) = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta_3^2}+\boldsymbol{\Sigma k^2}) \\ & \quad = \boldsymbol{b\delta_\alpha}\cos(\boldsymbol{\delta_\alpha},\boldsymbol{b})+\boldsymbol{cd_b}\cos(\boldsymbol{d_b},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a\delta_\gamma}\cos(\boldsymbol{\delta_\gamma},\boldsymbol{a}), \\ 4. & \boldsymbol{c\delta_\alpha}\cos(\boldsymbol{\delta_\alpha},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a\delta_\beta}\cos(\boldsymbol{\delta_\beta},\boldsymbol{a})+\boldsymbol{bd_c}\cos(\boldsymbol{d_c},\boldsymbol{b}) = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta_4^2}+\boldsymbol{\Sigma k^2}) \\ & \quad = \boldsymbol{b\delta_\alpha}\cos(\boldsymbol{\delta_\alpha},\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c\delta_\gamma}\cos(\boldsymbol{\delta_\gamma},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{ad_c}\cos(\boldsymbol{d_c},\boldsymbol{a}). \end{cases}$$

$$(82.)\quad \begin{cases} 1. & \boldsymbol{cd_a}\sin(\boldsymbol{d_a},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{ad_b}\sin(\boldsymbol{d_b},\boldsymbol{a})+\boldsymbol{bd_c}\sin(\boldsymbol{d_c},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\Sigma s}, \\ 2. & \boldsymbol{c\delta_\alpha}\sin(\boldsymbol{\delta_\alpha},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a\delta_\beta}\sin(\boldsymbol{\delta_\beta},\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b\delta_\gamma}\sin(\boldsymbol{\delta_\gamma},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\Sigma s}, \\ 3. & \boldsymbol{bd_a}\sin(\boldsymbol{d_a},\boldsymbol{b})+\boldsymbol{cd_b}\sin(\boldsymbol{d_b},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{ad_c}\sin(\boldsymbol{d_c},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\Sigma s}, \\ 4. & \boldsymbol{b\delta_\alpha}\sin(\boldsymbol{\delta_\alpha},\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c\delta_\beta}\sin(\boldsymbol{\delta_\beta},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a\delta_\gamma}\sin(\boldsymbol{\delta_\gamma},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\Sigma s}. \end{cases}$$

a. Es ist $\boldsymbol{AF_1} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cos\beta = \boldsymbol{AF}\cos(\boldsymbol{d_b},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{d_b}\cos(\boldsymbol{d_b},\boldsymbol{a})$, wie (73. 2.), und (73. 1. u. 73. 3.), aus (§. 15. ***B***.).

b. Es ist $\boldsymbol{AF}\sin\boldsymbol{FAB} = \boldsymbol{FF_1}$, das heifst $\boldsymbol{d_b}\sin(\boldsymbol{d_b},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\sin\beta$, wie (74. 2.), und (74. 1. u. 74. 3.), aus (§. 15. ***B***.).

c. (75.) folgen aus (73. u. 52.), weil δ_α und $\boldsymbol{c}$ mit $2\varrho-\alpha$ und $\boldsymbol{c}$, δ_β und $\boldsymbol{b}$ mit $2\varrho-\beta$ und $\boldsymbol{b}$, und δ_γ und $\boldsymbol{b}$ mit $2\varrho-\gamma$ und $\boldsymbol{b}$ zusammengehören.

d. Auf dieselbe Weise folgt (76.) aus (74.).

e. Es ist $\boldsymbol{AD}\cos\boldsymbol{DAB} = \boldsymbol{AD_1} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cos\gamma = \boldsymbol{d_c}\cos(\boldsymbol{d_a},\boldsymbol{b})$, wie (77. 3.), und (77. 1. u. 2.) folgen nach (§. 15. ***B***.).

f. Es ist $\boldsymbol{AD}\sin\boldsymbol{DAB} = \boldsymbol{d_c}\sin(\boldsymbol{d_c},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{DD_1} = \boldsymbol{b}\sin\gamma$; wie (78. 3.), und (78. 1. u. 2.) folgen nach (§. 15. ***B***.).

g. (79. u. 80.) folgen wieder aus (77. und 78.), nach (52.).

h. Die Ausdrücke (81.) folgen unmittelbar aus (73, 75, 77, 79 und 58.).

i. Die Ausdrücke (82.) folgen aus (74, 76, 78, 80 und 66.).

VI.

Es ist für (§. 14. *g*.):

$$(83.)\quad \begin{cases} 1. & \boldsymbol{d_a}\cos(\boldsymbol{d_a},\boldsymbol{\Delta_1},\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{c}\cos\beta-\boldsymbol{b}\cos\gamma, \\ 2. & \boldsymbol{d_b}\cos(\boldsymbol{d_b},\boldsymbol{\Delta_1},\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a}\cos\gamma-\boldsymbol{c}\cos\alpha, \\ 3. & \boldsymbol{d_c}\cos(\boldsymbol{d_c},\boldsymbol{\Delta_1},\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{b}\cos\alpha-\boldsymbol{a}\cos\beta. \end{cases}$$

$$(84.)\quad \begin{cases} 1. & \boldsymbol{d_a}\cos(\boldsymbol{d_a},\boldsymbol{\Delta_2},\boldsymbol{a}) = +\boldsymbol{c}\cos\beta+\boldsymbol{b}\cos\gamma, \\ 2. & \boldsymbol{\delta_\beta}\cos(\boldsymbol{\delta_\beta},\boldsymbol{\Delta_2},\boldsymbol{b}) = +\boldsymbol{a}\cos\gamma-\boldsymbol{c}\cos\alpha, \\ 3. & \boldsymbol{\delta_\gamma}\cos(\boldsymbol{\delta_\gamma},\boldsymbol{\Delta_2},\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{b}\cos\alpha+\boldsymbol{a}\cos\beta. \end{cases}$$

$$(85.)\quad \begin{cases} 1. & \delta_\alpha \cos(\delta_\alpha, \Delta_3, a) = +b\cos\gamma - c\cos\beta, \\ 2. & d_b \cos(d_b, \Delta_3, b) = +c\cos\alpha + a\cos\gamma, \\ 3. & \delta_\gamma \cos(\delta_\gamma, \Delta_3, c) = -a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{cases}$$

$$(86.)\quad \begin{cases} 1. & \delta_\alpha \cos(\delta_\alpha, \Delta_4, a) = +c\cos\beta - b\cos\gamma, \\ 2. & \delta_\beta \cos(\delta_\beta, \Delta_4, b) = -a\cos\gamma + c\cos\alpha, \\ 3. & \delta_c \cos(d_c, \Delta_4, c) = +b\cos\alpha + a\cos\beta. \end{cases}$$

$$(87.)\quad \begin{cases} 1. & a d_a \cos(d_a, \Delta_1, a) + b d_b \cos(d_b, \Delta_1, b) + c d_c \cos(d_c, \Delta_1, c) = \Sigma k^2 - \Delta_1^2, \\ 2. & a d_a \cos(d_a, \Delta_2, a) + b \delta_\beta \cos(\delta_\beta, \Delta_2, b) + c \delta_\gamma \cos(\delta_\gamma, \Delta_2, c) = \Sigma k^2 - \Delta_2^2, \\ 3. & a \delta_\alpha \cos(\delta_\alpha, \Delta_3, a) + b d_b \cos(d_b, \Delta_3, b) + c \delta_\gamma \cos(\delta_\gamma, \Delta_3, c) = \Sigma k^2 - \Delta_3^2, \\ 4. & a \delta_\alpha \cos(\delta_\alpha, \Delta_4, a) + b \delta_\beta \cos(\delta_\beta, \Delta_4, b) + c d_c \cos(d_c, \Delta_4, c) = \Sigma k^2 - \Delta_4^2. \end{cases}$$

a. Es ist $d_a \cos(d_a, \Delta_1, a) = HB \cos HBA = -GA \cos GAB = -AG_1 = -(C_1G_1 + AC_1) = -(c\cos\beta + b\cos\gamma)$; wie (83. 1.). Die Ausdrücke (83. 2. u. 3.) folgen aus (83. 1.) nach (§. 15. *B.*), und (84, 85 u. 86.) folgen aus (83.), vermöge (52.).

b. Die Ausdrücke (87.) folgen aus (83, 84, 85, 86, u. 52.).

VII.

Es ist für (§. 14. *g.*)

$$(88.)\quad \begin{cases} 1. & \Delta_1 \cos(\Delta_1, d_a, a) = a + c\cos\beta + b\cos\gamma, \\ 2. & \Delta_1 \cos(\Delta_1, d_a, b) = b + a\cos\gamma + c\cos\alpha, \\ 3. & \Delta_1 \cos(\Delta_1, d_c, c) = c + b\cos\alpha + a\cos\beta. \end{cases}$$

$$(89.)\quad \begin{cases} 1. & \Delta_2 \cos(\Delta_2, d_a, a) = a - c\cos\beta - b\cos\gamma, \\ 2. & \Delta_2 \cos(\Delta_2, \delta_\beta, b) = b - a\cos\gamma + c\cos\alpha, \\ 3. & \Delta_2 \cos(\Delta_2, \delta_\gamma, c) = c + b\cos\alpha - a\cos\beta. \end{cases}$$

$$(90.)\quad \begin{cases} 1. & \Delta_3 \cos(\Delta_3, \delta_\alpha, a) = a + c\cos\beta - b\cos\gamma, \\ 2. & \Delta_3 \cos(\Delta_3, d_b, b) = b - a\cos\gamma - c\cos\alpha, \\ 3. & \Delta_3 \cos(\Delta_3, \delta_\gamma, c) = c - b\cos\alpha + a\cos\beta. \end{cases}$$

$$(91.)\quad \begin{cases} 1. & \Delta_4 \cos(\Delta_4, \delta_\alpha, a) = a + b\cos\gamma - c\cos\beta, \\ 2. & \Delta_4 \cos(\Delta_4, \delta_\beta, b) = b - c\cos\alpha + a\cos\gamma, \\ 3. & \Delta_4 \cos(\Delta_4, d_c, c) = c - a\cos\beta - b\cos\alpha. \end{cases}$$

$$(92.)\quad \begin{cases} 1. & a\cos(\Delta_1, d_a, a) + b\cos(\Delta_1, d_b, b) + c\cos(\Delta_1, d_c, c) = \Delta_1, \\ 2. & a\cos(\Delta_2, d_a, a) + b\cos(\Delta_2, \delta_\beta, b) + c\cos(\Delta_2, \delta_\gamma, c) = \Delta_2, \\ 3. & a\cos(\Delta_3, \delta_\alpha, a) + b\cos(\Delta_3, d_b, b) + c\cos(\Delta_3, \delta_\gamma, c) = \Delta_3, \\ 4. & a\cos(\Delta_4, \delta_\alpha, a) + b\cos(\Delta_4, \delta_\beta, b) + c\cos(\Delta_4, d_c, c) = \Delta_4. \end{cases}$$

a. Es ist $\Delta_1 \cos(\Delta_1, d_a, a) = \boldsymbol{HA} \cos \boldsymbol{HAB} = \boldsymbol{AH_1} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BH_1}$ $= \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{HB} \cos \boldsymbol{HBH_1} = a + d_a \cos \boldsymbol{HBH_1} = a + b \cos\gamma + c \cos\beta$ (64.). Dies ist der Ausdruck (88. 1.). Die übrigen in (88, 89, 90 u. 91.) folgen nach (§. 15. *A* u. *B*.).

b. Die Formel (92. 1.) folgt aus (88.) und (58. 1.), wenn man (88. 1, 2, 3.) der Reihe nach mit *a, b, c* multiplicirt und die Summe durch Δ_1 dividirt. Die übrigen Formeln (92.) folgen ähnlich aus (89, 90 u. 91.).

c. Die Formeln (92.) sind, wie man sieht, ganz ähnlich denen für *Parallelogramme.* Denn es ist z. B. in dem Parallelogramm $\boldsymbol{ABCD}$ die Diagonal $\boldsymbol{AD}$ oder $d_c = a \cos(d_c, a) + b \cos(d_c, b)$.

VIII.

Es ist für (§. 14. *g*.)

$$(93.)\quad \begin{cases} 1. & d_a \Delta_1 \cos(\Delta_1, a, d_a) = d_a^2 + ac \cos\beta + ba \cos\gamma, \\ 2. & d_b \Delta_1 \cos(\Delta_1, b, d_b) = d_b^2 + ba \cos\gamma + cb \cos\alpha, \\ 3. & d_c \Delta_1 \cos(\Delta_1, c, d_c) = d_c^2 + cb \cos\alpha + ac \cos\beta. \end{cases}$$

$$(94.)\quad \begin{cases} 1. & d_a \Delta_2 \cos(\Delta_2, a, d_a) = d_a^2 - ac \cos\beta - ba \cos\gamma, \\ 2. & \delta_\beta \Delta_2 \cos(\Delta_2, b, \delta_\beta) = \delta_\beta^2 - ba \cos\gamma + cb \cos\alpha, \\ 3. & \delta_\gamma \Delta_2 \cos(\Delta_2, c, \delta_\gamma) = \delta_\gamma^2 + cb \cos\alpha - ac \cos\beta. \end{cases}$$

$$(95.)\quad \begin{cases} 1. & \delta_a \Delta_3 \cos(\Delta_3, a, \delta_a) = \delta_a^2 + ac \cos\beta - ba \cos\gamma, \\ 2. & d_b \Delta_3 \cos(\Delta_3, b, d_b) = d_b^2 - ba \cos\gamma - cb \cos\alpha, \\ 3. & \delta_\gamma \Delta_3 \cos(\Delta_3, c, \delta_\gamma) = \delta_\gamma^2 - cb \cos\alpha + ac \cos\beta. \end{cases}$$

$$(96.)\quad \begin{cases} 1. & \delta_a \Delta_4 \cos(\Delta_4, a, \delta_a) = \delta_a^2 - ac \cos\beta + ba \cos\gamma, \\ 2. & \delta_\beta \Delta_4 \cos(\Delta_4, b, \delta_\beta) = \delta_\beta^2 + ba \cos\gamma - cb \cos\gamma, \\ 3. & d_c \Delta_4 \cos(\Delta_4, c, d_c) = d_c^2 - cb \cos\alpha - ac \cos\gamma. \end{cases}$$

$$(97.)\quad \begin{cases} 1. & d_a \cos(\Delta_1, a, d_a) + d_b \cos(\Delta_1, b, d_b) + d_c \cos(\Delta_1, c, d_c) = 2\Delta_1, \\ 2. & d_a \cos(\Delta_2, a, d_a) + \delta_\beta \cos(\Delta_2, b, d_\beta) + \delta_\gamma \cos(\Delta_2, c, \delta_\gamma) = 2\Delta_2, \\ 3. & d_a \cos(\Delta_3, a, \delta_a) + d_b \cos(\Delta_3, b, d_b) + \delta_\gamma \cos(\Delta_3, c, \delta_\gamma) = 2\Delta_3, \\ 4. & \delta_a \cos(\Delta_4, a, \delta_a) + \delta_\beta \cos(\Delta_4, b, \delta_\beta) + d_c \cos(\Delta_4, c, d_c) = 2\Delta_4. \end{cases}$$

a. Im Dreieck $\boldsymbol{HAB}$ ist $\boldsymbol{HB} = \boldsymbol{AH} \cos \boldsymbol{AHB} + \boldsymbol{AB} \cos \boldsymbol{HBA}$, das heifst, $d_a = \Delta_1 \cos(\Delta_1, a, d_a) + a \cos(d_a, \Delta_1, a)$. Dies giebt vermöge (83. 1.) $d_a = \Delta_1 \cos(\Delta_1, a, d_a) - \frac{a}{d_a}(c \cos\beta + b \cos\gamma)$, also $d_a \Delta_1 \cos(\Delta_1, a, d_a)$ $= d_a^2 + ac \cos\beta + ba \cos\gamma$; wie (93. 1.). Die übrigen Ausdrücke in (93, 94, 95 und 96.) folgen nach (§. 15. *A* und *B*.).

b. Die Summe von (93. 1, 2 u. 3.) ist $\Delta_1[d_a\cos(\Delta_1, a, d_a) + d_b\cos(\Delta_1, b, d_b) + d_c\cos(\Delta_1, c, d_c)] = d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + 2ac\cos\beta + 2ba\cos\gamma + 2cb\cos\alpha$ (60.) $= \Sigma k^2 + \Delta_1^2 - \Sigma k^2$ (58. 1.) $= 2\Delta_1^2$; woraus, mit Δ_1 dividirt, (97. 1.) folgt. Die übrigen Formeln in (97.) ergeben sich nach (§. 15. *A.*) und (52.).

IX.

Es ist für (§. 14. *g.*):

(98.)
$$\begin{cases} 1. & d_a d_b\cos(d_a, \delta_\gamma, d_b) = c^2 + bc\cos\alpha + ca\cos\beta + ab\cos\gamma, \\ 2. & d_b d_c\cos(d_b, \delta_\alpha, d_c) = a^2 + ca\cos\beta + ab\cos\gamma + bc\cos\alpha, \\ 3. & d_c d_a\cos(d_c, \delta_\beta, d_a) = b^2 + ab\cos\gamma + bc\cos\alpha + ca\cos\beta. \end{cases}$$

(99.)
$$\begin{cases} 1. & d_a \delta_\beta\cos(d_a, d_c, \delta_\beta) = c^2 + bc\cos\alpha - ca\cos\beta - ab\cos\gamma, \\ 2. & \delta_\beta \delta_\gamma\cos(\delta_\beta, \delta_\alpha, \delta_\gamma) = a^2 - ca\cos\beta - ab\cos\gamma + bc\cos\alpha, \\ 3. & \delta_\gamma d_a\cos(\delta_\gamma, d_b, d_a) = b^2 - ab\cos\gamma + bc\cos\alpha - ca\cos\beta. \end{cases}$$

(100.)
$$\begin{cases} 1. & \delta_\alpha d_b\cos(\delta_\alpha, d_c, d_b) = c^2 - bc\cos\alpha + ca\cos\beta - ab\cos\gamma, \\ 2. & d_b \delta_\gamma\cos(d_b, d_a, \delta_\gamma) = a^2 + ca\cos\beta - ab\cos\gamma - bc\cos\alpha, \\ 3. & \delta_\gamma \delta_\alpha\cos(\delta_\gamma, \delta_\beta, \delta_\alpha) = b^2 - ab\cos\gamma - bc\cos\alpha + ca\cos\beta. \end{cases}$$

(101.)
$$\begin{cases} 1. & \delta_\alpha \delta_\beta\cos(\delta_\alpha, \delta_\gamma, \delta_\beta) = c^2 - bc\cos\alpha - ca\cos\beta + ab\cos\gamma, \\ 2. & \delta_\beta d_c\cos(\delta_\beta, d_a, d_c) = a^2 - ca\cos\beta + ab\cos\gamma - bc\cos\alpha, \\ 3. & d_c \delta_\alpha\cos(d_c, d_b, \delta_\alpha) = b^2 + ab\cos\gamma - bc\cos\alpha - ca\cos\beta. \end{cases}$$

(102.)
$$\begin{cases} 1. & d_a d_b\cos(d_a, \delta_\gamma, d_b) + d_b d_c\cos(d_b, \delta_\alpha, d_c) + d_c d_a\cos(d_c, \delta_\beta, d_a) \\ & \qquad = \frac{3}{2}\Delta_1^2 - \frac{1}{2}\Sigma k^2, \\ 2. & d_a d_\beta\cos(d_a, d_c, \delta_\beta) + \delta_\beta \delta_\gamma\cos(\delta_\beta, \delta_\alpha, \delta_\gamma) + \delta_\gamma d_a\cos(\delta_\gamma, d_b, d_a) \\ & \qquad = \frac{3}{2}\Delta_2^2 - \frac{1}{2}\Sigma k^2, \\ 3. & \delta_\alpha d_b\cos(\delta_\alpha, d_c, d_b) + d_b \delta_\gamma\cos(d_b, d_a, \delta_\gamma) + \delta_\gamma \delta_\alpha\cos(\delta_\gamma, \delta_\beta, \delta_\alpha) \\ & \qquad = \frac{3}{2}\Delta_3^2 - \frac{1}{2}\Sigma k^2, \\ 4. & \delta_\alpha \delta_\beta\cos(\delta_\alpha, \delta_\gamma, \delta_\beta) + \delta_\beta d_c\cos(\delta_\beta, d_a, d_c) + d_c \delta_\alpha\cos(d_c, \delta_b, \delta_\alpha) \\ & \qquad = \frac{3}{2}\Delta_4^2 - \frac{1}{2}\Sigma k^2. \end{cases}$$

a. In dem Dreieck $GAF = (d_a\delta_\gamma d_b)$ ist $d_a^2 + d_b^2 - 2d_a d_b\cos(d_a\delta_\gamma d_b) = \delta_\gamma^2$, also nach (53. u. 54.) $b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha + c^2 + a^2 + 2ca\cos\beta - a^2 - b^2 + 2ab\cos\gamma = 2d_a d_b\cos(d_a\delta_\gamma d_b)$ oder $c^2 + bc\cos\alpha + ca\cos\beta + ab\cos\gamma = d_a d_b\cos(d_a\delta_\gamma d_b)$; wie (98. 1.). Nach (§. 15. *B.*) finden sich (98. 2. u. 3.).

b. In dem Dreieck $EBH = (d_a d_c\delta_\beta)$ ist $d_a^2 + \delta_\beta^2 - 2d_a\delta_\beta\cos(d_a d_c\delta_\beta) = d_c^2$, also nach (53. u. 54.) $b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha + c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta - a^2 - b^2 - 2ab\cos\gamma = 2d_a\delta_\beta\cos(d_a d_c\delta_\beta)$ oder $c^2 + bc\cos\alpha - ca\cos\beta - ab\cos\gamma = d_a\delta_\beta\cos(d_a d_c\delta_\beta)$; wie (99. 1.). Nach (§. 15. *B.*) finden sich (99. 2. u. 3.).

c. In dem Dreieck $CHE = (\delta_a d_c d_b)$ ist $\delta_a^2 + d_b^2 - 2\delta_a d_b \cos(\delta_a d_c d_b) = d_c^2$, also nach (53. u. 54.) $b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha + c^2 + a^2 + 2ca\cos\beta - a^2 - b^2 - 2ab\cos\gamma = 2\delta_a d_b \cos(\delta_a d_c d_b)$ oder $c^2 - bc\cos\alpha + ca\cos\beta - ab\cos\gamma = \delta_a d_b \cos(\delta_a d_c d_b)$; wie (100. 1.). Nach (§. 15. *B.*) finden sich (100. 2. u. 3.).

d. In dem Dreieck $GDF = (\delta_\alpha, \delta_\gamma, \delta_\beta)$ ist $\delta_\alpha^2 + \delta_\beta^2 - 2\delta_\alpha\delta_\beta\cos(\delta_\alpha, \delta_\gamma, \delta_\beta) = \delta_\gamma^2$, also nach (53. u. 54.) $b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha + c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta - a^2 - b^2 + 2ab\cos\gamma = 2\delta_\alpha\delta_\beta\cos(\delta_\alpha, \delta_\gamma, \delta_\beta)$ oder $c^2 - bc\cos\alpha - ca\cos\beta + ab\cos\gamma = \delta_\alpha\delta_\beta\cos(\delta_\alpha, \delta_\gamma, \delta_\beta)$; wie (101. 1.). Nach (§. 15. *B.*) finden sich (101. 2. u. 3.).

e. Die Ausdrücke (102.) folgen, wie leicht zu sehen, aus (98, 99, 100, 101 u. 58.).

f. Die Cosinus der andern beiden Winkel in den Dreiecken GAF, EBH, CHE und GDF (a, b, c, d) finden sich schon in den obigen Ausdrücken; z. B.

$\cos(\delta_\gamma, d_b, d_a)$ aus (99. 3.) und $\cos(d_b, d_a, \delta_\gamma)$ aus (100. 2.) zu $\cos(d_a, \delta_\gamma, d_b)$ (98. 1.),

und so die andern.

X.

Es ist für (§. 14. *i.*)

$$(103.)\quad \begin{cases} 1.\ D_{a,d_a}^2 = s_1^2 + s_3^2 + 2s_1 s_3 \cos A, \\ 2.\ D_{b,d_b}^2 = s_2^2 + s_1^2 + 2s_2 s_1 \cos B, \\ 3.\ D_{c,d_c}^2 = s_3^2 + s_2^2 + 2s_3 s_2 \cos C. \end{cases} \qquad (104.)\quad \begin{cases} 1.\ \mathfrak{D}_{a,\delta_a}^2 = s_1^2 + s_3^2 - 2s_1 s_3 \cos A, \\ 2.\ \mathfrak{D}_{b,\delta_\beta}^2 = s_2^2 + s_1^2 - 2s_2 s_1 \cos B, \\ 3.\ \mathfrak{D}_{c,\delta_\gamma}^2 = s_3^2 + s_2^2 - 2s_3 s_2 \cos C. \end{cases}$$

$$(105.)\quad D_{a,d_a}^2 + D_{b,d_b}^2 + D_{c,d_c}^2 + \mathfrak{D}_{a,\delta_a}^2 + \mathfrak{D}_{b,\delta_\beta}^2 + \mathfrak{D}_{c,\delta_\gamma}^2 = 4\Sigma s^2.$$

a. Wenn man nemlich auf $AB = a$ eine Ebene GG_2G_3G, die durch G bezeichnet werden mag, *senkrecht* legt, so steht dieselbe auch auf den mit AB *paralleten* Linien $GH = EF = CD = a$ senkrecht, und die Linien $GG_3 = c\sin\beta$ und $G_3G_1 = b\sin\gamma$, in welchen die Ebene G die Ebenen $CGHD = s_3$ (§. 14. *h.*) und $ABCD = s_1$ schneidet, schliefsen in G_3 den Winkel $2\varrho - A$ ein; also ist in dem Dreieck GG_3G_1 die dritte Seite

$$(106.)\quad \begin{aligned} GG_1^2 &= GG_3^2 + G_3G_1^2 + 2GG_3 . G_3G_1 \cos A \\ &= c^2\sin\beta^2 + b^2\sin\gamma^2 + 2bc\sin\beta\sin\gamma\cos A. \end{aligned}$$

Hingegen die Linien $G_2G_1 = c\sin\beta$ und $G_3G_1 = b\sin\gamma$, in welchen die Ebene G die Ebenen $ABEF = s_3$ (§. 14. *h.*) und $ABCD = s_1$ schneidet, schliefsen in G_1 den Winkel A ein; also ist in dem Dreiecke $G_2G_1G_3$ die dritte Seite

$$(107.)\quad \begin{aligned} G_2G_3^2 &= G_2G_1^2 + G_3G_1^2 - 2G_2G_1 . G_3G_1 \cos A \\ &= c^2\sin\beta^2 + b^2\sin\gamma^2 - 2bc\sin\beta\sin\gamma\cos A. \end{aligned}$$

b. Nun ist GG_1 (106.) die ***Höhe*** des Parallelogramms $ABGH = D_{a,d_a}$ (§. 14. *i.*) zu dessen ***Grundlinie*** $AB = a$, und G_2G_3 (107.) ist die ***Höhe*** des Parallelogramms $CEFD = \mathfrak{D}_{a,\delta_a}$ (§. 14. *i.*) zu dessen Grundlinie $CD = a$: also sind die Quadrate der Inhalte dieser beiden Parallelogramme:

$$(108.)\quad \begin{cases} 1. & D^2_{a,d_a} = a^2(c^2\sin\beta^2 + b^2\sin\gamma^2 + 2bc\sin\beta\sin\gamma\cos A) \text{ und} \\ 2. & \mathfrak{D}_{a,\delta_a} = a^2(c^2\sin\beta^2 + b^2\sin\gamma^2 - 2bc\sin\beta\sin\gamma\cos A), \end{cases}$$

welches vermöge (66.)

$$(109.)\quad \begin{cases} 1. & D^2_{a,d_a} = s_3^2 + s_1^2 + 2s_3s_1\cos A \text{ und} \\ 2. & \mathfrak{D}^2_{a,\delta_a} = s_3^2 + s_1^2 - 2s_3s_1\cos A \end{cases}$$

giebt, wie (103. 1. u. 104. 1.).

c. Die andern Ausdrücke (103. u. 104.) folgen nach (§. 15. *B.*), und (105.) folgt aus (103. u. 104.) unmittelbar.

XI.

Es ist für (§. 14. *k.* und *l.*)

$$(110.)\quad \begin{cases} 1. & 4\varphi_1^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2s_1s_3\cos A - 2s_2s_1\cos B - 2s_3s_2\cos C, \\ 2. & 4\varphi_2^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2s_1s_3\cos A + 2s_2s_1\cos B + 2s_3s_2\cos C, \\ 3. & 4\varphi_3^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2s_1s_3\cos A - 2s_2s_1\cos B + 2s_3s_2\cos C, \\ 4. & 4\varphi_4^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2s_1s_3\cos A + 2s_2s_1\cos B - 2s_3s_2\cos C. \end{cases}$$

$$(111.)\quad \Sigma\varphi^2 = \Sigma s^2, \text{ das heifst } \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

$$(112.)\quad \psi_1 = \varphi_1, \quad \psi_2 = \varphi_2, \quad \psi_3 = \varphi_3, \quad \psi_4 = \varphi_4.$$

Die Flächen φ sind die ***vierten Flächen dreieckiger Pyramiden.*** Z. B. $\varphi_1 = BCE$ ist die vierte Seitenfläche der ***dreieckigen Pyramide ABCE,*** deren drei andere Seitenflächen $CAB = \frac{1}{2}s_1$, $CAE = \frac{1}{2}s_2$ und $EAB = \frac{1}{2}s_3$ sind, und welche die Winkel A, B, C einschliefsen. Die vierte Seitenfläche einer dreieckigen Pyramide wird also nach (110.) durch die drei andern und durch die Winkel, welche dieselben mit einander machen, auf eine ***ganz ähnliche*** Weise ausgedrückt, wie die dritte Seite eines Dreiecks durch die beiden andern Seiten und durch den Winkel, welchen sie einschliefsen

a. Die Fläche des Dreiecks $BCE = \varphi_1$ ist $\varphi_1 = \frac{1}{2}BC.EE_2 = \frac{1}{2}\delta_\gamma.EE_2$, wenn EE_2 auf CB senkrecht ist. Nun ist $\sqrt{(CE^2 - EE_2^2)} + \sqrt{(EB^2 - EE_2^2)} = CB$, das heifst $\sqrt{(\delta_\alpha^2 - EE_2^2)} + \sqrt{(\delta_\beta^2 - EE_2^2)} = \delta_\gamma$. Daraus folgt $\delta_\alpha^2 - EE_2^2 = \delta_\gamma^2 + \delta_\beta^2 - EE_2^2 - 2\delta_\gamma\sqrt{(\delta_\beta^2 - EE_2^2)}$ oder $\delta_\beta^2 + \delta_\gamma^2 - \delta_\alpha^2 = 2\delta_\gamma\sqrt{(\delta_\beta^2 - EE_2^2)}$ oder $4\delta_\gamma^2 EE_2^2 = 4\delta_\gamma^2\delta_\beta^2 - (\delta_\beta^2 + \delta_\gamma^2 - \delta_\alpha^2)^2$ oder, da $\varphi_1 = \frac{1}{2}\delta_\gamma EE_2$ war,

$$(113.)\quad 16\varphi_1^2 = 4\delta_\beta^2\delta_\gamma^2 - (\delta_\beta^2 + \delta_\gamma^2 - \delta_\alpha^2)^2.$$

b. Hierin die Ausdrücke (54.) gesetzt, giebt

$$16\varphi_1^2 = 4(c^2+a^2-2ca\cos\beta)(a^2+b^2-2ab\cos\gamma) - (2a^2-2ca\cos\beta-2ab\cos\gamma+2bc\cos\alpha)^2, \text{ oder}$$

$$4\varphi_1^2 = c^2a^2+c^2b^2-2c^2ab\cos\gamma+a^4+a^2b^2-2a^3b\cos\gamma-2a^3c\cos\beta - 2b^2ca\cos\beta+4a^2bc\cos\beta\cos\gamma-(a^4+c^2a^2\cos\beta^2+a^2b^2\cos\gamma^2+b^2c^2\cos\alpha^2 - 2a^3c\cos\beta-2a^3b\cos\gamma-2a^2b\cos\alpha+2a^2bc\cos\beta\cos\gamma+2c^2ab\cos\alpha\cos\beta + 2b^2ac\cos\alpha\cos\gamma) \text{ oder}$$

$$4\varphi_1^2 = a^2b^2\sin\gamma^2+b^2c^2\sin\alpha^2+c^2a^2\sin\beta^2-2c^2ab(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta) - 2a^2bc(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)-2b^2ca(\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha),$$

oder zufolge (67.)

$$(14.)\quad 4\varphi_1^2 = a^2b^2\sin\gamma^2+b^2c^2\sin\alpha^2+c^2a^2\sin\beta^2 - 2c^2ab\sin\alpha\sin\beta\cos C-2a^2bc\sin\beta\sin\gamma\cos A-2b^2ca\sin\gamma\sin\alpha\cos B,$$

und dies giebt zufolge (66.) den Ausdruck (110. 1.). Die andern Ausdrücke (110.) ergeben sich nach (§. 15.), und (111.) folgt unmittelbar aus (110.).

c. Die Seiten z. B. des Dreiecks $\varphi_1 = BCE$ sind denen des Dreiecks $\psi_1 = GDF$ *gleich*, nämlich $GF = CB = \delta_\gamma$, $DF = CE = \delta_\alpha$ und $GD = EB = \delta_\beta$, also sind die Dreiecke einander gleich und es ist folglich $\varphi_1 = \psi_1$ u. s. w.; wie (112.).

XII.

Es ist für (§. 14. *g.*):

$$(115.)\quad \begin{cases} 1.\quad c\sin\beta\sin A = c\sin(c,s_1) = d_a\sin(d_a,s_1) = d_b\sin(d_b,s_1) \\ \qquad = \delta_\alpha\sin(\delta_\alpha,s_1) = \delta_\beta\sin(\delta_\beta,s_1) \\ \quad = \Delta_1\sin(\Delta_1,s_1) = \Delta_2\sin(\Delta_2,s_1) = \Delta_3\sin(\Delta_3,s_1) = \Delta_4\sin(\Delta_4,s_1), \\ 2.\quad a\sin\gamma\sin B = a\sin(a,s_2) = d_b\sin(d_b,s_2) = d_c\sin(d_c,s_2) \\ \qquad = \delta_\beta\sin(\delta_\beta,s_2) = \delta_\gamma\sin(\delta_\gamma,s_2) \\ \quad = \Delta_1\sin(\Delta_1,s_2) = \Delta_2\sin(\Delta_2,s_2) = \Delta_3\sin(\Delta_3,s_2) = \Delta_4\sin(\Delta_4,s_2), \\ 3.\quad b\sin\alpha\sin C = b\sin(b,s_3) = d_c\sin(d_c,s_3) = d_a\sin(d_a,s_3) \\ \qquad = \delta_\gamma\sin(\delta_\gamma,s_3) = \delta_\alpha\sin(\delta_\alpha,s_3) \\ \quad = \Delta_1\sin(\Delta_1,s_3) = \Delta_2\sin(\Delta_2,s_3) = \Delta_3\sin(\Delta_3,s_3) = \Delta_4\sin(\Delta_4,s_3). \end{cases}$$

a. Denn von allen den Linien $c = AE$, $d_a = AG$, $d_b = AF$, $\delta_\alpha = CE$, $\delta_\beta = BE$, $\Delta_1 = AH$, $\Delta_2 = BG$, $\Delta_3 = CF$ und $\Delta_4 = ED$ liegt der eine Endpunct in der einen der beiden parallelen Seitenflächen $ABCD = EFGH = s_1$, der andere in der andern. Daher ist das Product jeder

dieser Linien in den Sinus des Winkels, welchen sie mit einer der beiden Seitenflächen s_1 einschliefst, gleich der senkrechten Entfernung der beiden Seitenflächen von einander; und diese Entfernung ist $EA \cdot \sin EAB \cdot \sin A = c \sin\beta \sin A$. Daraus folgt also (115. 1.). Die andern Ausdrücke (115. 2. u. 3.) folgen daraus nach (§. 15.).

XIII.

Es ist für (§. 14. *g*.):

$$(116.)\quad \begin{cases} 1. & D_{a,d_a} \sin(s_1, D_{a,d_a}) = s_3 \sin A = \mathfrak{D}_{a,\delta_\alpha} \sin(s_1, \mathfrak{D}_{a,\delta_\alpha}), \\ 2. & D_{b,d_b} \sin(s_2, D_{b,d_b}) = s_1 \sin B = \mathfrak{D}_{b,\delta_\beta} \sin(s_2, \mathfrak{D}_{b,\delta_\beta}), \\ 3. & D_{c,d_c} \sin(s_3, D_{c,d_c}) = s_2 \sin C = \mathfrak{D}_{c,\delta_\gamma} \sin(s_3, \mathfrak{D}_{c,\delta_\gamma}). \end{cases}$$

a. Denn legt man durch $AB = a$ eine auf $ABCD = s_1$ *senkrechte* Ebene E und projicirt auf dieselbe die Ebene $ABEF = s_3$, so ist die Länge der parallelogrammatischen Projection $= a$, und ihre Höhe ist gleich dem senkrechten Abstande der beiden Ebenen $ABCD = s_1$ und $EFGH = s_1$ von einander, der, wie in (XII.), $= c \sin\beta \sin A$ ist: also ist der Flächen-Inhalt der Projection $= ac \sin\beta \sin A = s_3 \sin A$.

b. ***Dieselbe*** Länge und ***dieselbe*** Höhe haben aber auch die parallelogrammatischen Projectionen der Ebenen $ABGH = D_{a,d_a}$ und $CEFD = \mathfrak{D}_{a,\delta_a}$ auf die Ebene E, die durch $D_{a,d_a} \sin(s_1, D_{a,d_a})$ und $\mathfrak{D}_{a,\delta_\alpha} \sin(s_1, \mathfrak{D}_{a,\delta_\alpha})$ ausgedrückt werden. Also sind ihre Flächen-Inhalte $s_3 \sin A$ dem der Projection von s_3 *gleich;* was (116. 1.) giebt.

Die andern Ausdrücke (116. 2 u. 3.) ergeben sich nach (§. 15.).

XIV.

Der körperliche Inhalt des Parallelepipedums AH (§. 14. *m*) wird durch

$$(117.)\quad \begin{cases} 1. & P = abc \sin\beta \sin\gamma \sin A = abc \sin\gamma \sin\alpha \sin B \\ & \qquad = abc \sin\alpha \sin\beta \sin C \quad \text{und} \\ 2. & P = abc\lambda = \\ & abc\sqrt{(1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)} \quad (51.) \quad \text{oder} \\ 3. & P = 2abc\sqrt{[\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)} \\ & \qquad \times \sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)] \quad (51.) \quad \text{und} \\ 4. & P = -4abc \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin A \sin B \sin C} \end{cases}$$

ausgedrückt.

a. Es ist P gleich der Fläche $ABCD = s_1 = ab \sin\gamma$ (66.), multiplicirt mit der senkrechten Höhe $e = c \sin\beta \sin A$ (XII.) des Puncts E über $ABCD$; also ist $P = abc \sin\beta \sin\gamma \sin A$, und nach (§. 15.) $= abc \sin\gamma \sin\alpha \sin B = abc \sin\alpha \sin\beta \sin C$; wie (117. 1.).

b. Nach (72.) ist $\lambda = \sin\beta \sin\gamma \sin A$; woraus (117. 2.) folgt.

c. (117. 3.) hat den andern Ausdruck von λ (51.).

d. Es ist

$$(118.)\quad \begin{cases} \sin\beta = \dfrac{2\sqrt{(-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B))}}{\sin A \sin C}, \\ \sin\gamma = \dfrac{2\sqrt{(-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B))}}{\sin B \sin A}. \end{cases}$$

Man findet diese Ausdrücke z. B. in meinem Lehrbuche der Geometrie (2. Theil S. 904. 58. u. 59.). Es folgt daraus, wenn man nach (117. 1.) $\sin\beta \sin\gamma$ mit $\sin A$ und abc multiplicirt, der Ausdruck (117. 4.) von P.

XV.

Die vier ***Raum-Diagonalen*** schneiden sich in einem und demselben Punct M, der sie alle *halbirt* und von je zwei parallelen ***Seitenflächen*** des Parallelepipedums gleich weit entfernt ist.

a. Die beiden Raum-Diagonalen $AH = \Delta_1$ und $BG = \Delta_2$ sind die beiden Diagonalen des Parallelogramms $ABGH$ und *halbiren* also einander in M. Ferner sind $AH = \Delta_1$ und $CF = \Delta_3$ die beiden Diagonalen des Parallelogramms $ACHF$, und folglich halbirt der Punct M, in der Mitte von $AH = \Delta_1$, auch $CF = \Delta_3$. Endlich sind $BG = \Delta_2$ und $ED = \Delta_4$ die beiden Diagonalen des Parallelogramms $EGDB$: also halbirt der Punct M, in der Mitte von $BG = \Delta_2$, auch $ED = \Delta_4$, und folglich halbirt ein- und derselbe Punct M alle vier Raum-Diagonalen.

b. Dafs M von je zwei parallelen Seitenflächen des Parallelepipedums gleich weit entfernt ist, folgt hieraus unmittelbar.

XVI.

Die Ebenen φ_1 und ψ_1 (§. 14. *k* u. *l.*) theilen die Raum-Diagonal Δ_1 durch ihre Durchschnitte mit ihr in ***drei gleiche Theile.*** Eben so die Ebenen φ_2 und ψ_2 die Diagonal Δ_2, die Ebenen φ_3 und ψ_3 die Diagonal Δ_3 und die Ebenen φ_4 und ψ_4 die Diagonal Δ_4.

a. Es ist GF mit BC, GD mit BE und DF mit CE im Raume *parallel:* also sind die Ebenen $GDF = \psi_1$ und $BCE = \varphi_1$ *parallel.*

b. Nun werden die Diagonalen $AG = HB = d_a$ der Seitenflächen $ACGE = BDHF$ von den andern Diagonalen $CE = DF = \delta_a$ eben dieser Seitenflächen in N_1 und L_1 *halbirt.* Also ist

$$(119.) \qquad AN_1 = N_1G = BL_1 = L_1H,$$

und auch die Linien BN_1 und GL_1 sind *parallel.*

c. Ferner liegen die Linien BN_1 und GL_1 in den parallelen Ebenen BCE und GDF, und zugleich in der Ebene $ABGH$, denn N_1 und L_1 liegen in derselben. Desgleichen liegt AH in der Ebene $ABGH$. Also schneidet AH die Linien BN_1 und GL_1 in N und L. Nun sind die Dreiecke AN_1N und AGL, so wie HL_1L und HNB, ähnlich: folglich ist, wegen (119.), auch

$$(120.) \qquad AN = NL = HL,$$

und folglich theilen die Ebenen $\varphi_1 = CEB$ und $\psi_1 = GDF$ die Raumdiagonal $\Delta_1 = AH$ durch ihre Durchschnitte mit ihr *in drei gleiche Theile.* (An diesen Satz hat mich Herr Prof. *J. Steiner* erinnert.)

d. Da die Winkel α, β, γ jede beliebige Gröfse haben können, insofern nicht $\alpha+\beta+\gamma > 4\varrho$ ist, so gilt Dasselbe, was für die Ecke A Statt findet, auch für die Ecken B, C und D, und folglich eben Das, was für φ_1, ψ_1 und Δ_1 Statt findet, auch für φ_2, ψ_2, Δ_2; φ_3, ψ_3, Δ_3 und φ_4, ψ_4 und Δ_4.

XVII.

Es ist für (§. 14. *n.* u. *o.*)

$$(121.) \qquad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \tfrac{1}{6}P,$$
$$(122.) \qquad q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \tfrac{1}{3}P,$$
$$(123.) \qquad \Sigma p = \tfrac{2}{3}P, \qquad \Sigma q = \tfrac{4}{3}P.$$

a. Die Pyramide $p_1 = ABCE$ hat die *halbe* Seiten-Fläche $ABC = \frac{1}{2}s_1$ zur Grundfläche und zur Höhe *dieselbe* senkrechte Höhe des Puncts E über der Grundfläche, welche, mit der *ganzen* Fläche s_1 multiplicirt, den körperlichen Inhalt P des Parallelepipedums giebt. Daher ist $p_1 = \frac{1}{6}P$; wie (120.). Eben so verhält es sich mit p_2, p_3, p_4.

b. Die Grundfläche $GDF = \varphi_1$ der Pyramide $q_1 = AGDF$ ist der Grundfläche $BCE = \psi_1$ *gleich* (112.). Die beiden Flächen φ_1 und ψ_1 sind *parallel* (XVI. *a.*). Ein Perpendikel aus A auf φ_1 gezogen, ist also auch

auf ψ_1 senkrecht und eine und dieselbe gerade Linie. Also bildet er mit ANL einen *gleichen* Winkel, und folglich verhält sich der Perpendikel aus A auf φ_1 zu dem aus A auf ψ_1, wie AN zu AL, das heifst, wie 1 zu 2 (120.). Demnach ist die Pyramide q_1 *doppelt* so grofs als die p_1, und folglich $= \frac{1}{2}P$ (wie 122.). Eben so verhält es sich mit q_2, q_3 und q_4.

c. Die Ausdrücke (123.) folgen unmittelbar aus (121 u. 122.).

Es giebt noch mancherlei andere zu bemerkende geometrische Eigenschaften eines Parallelepipedums. Doch mag es an dem Obigen genügen.

Berlin, im April 1852.

14.

Auszug eines Schreibens des Herrn Dr. *Eisenstein* in Berlin an den Herrn Prof. *Richelot* in Königsberg, und eines Antwort-Schreibens des Herrn Prof. *Richelot* an den Herrn Dr. *Eisenstein*.

I.

Berlin, den 1. November 1851.

. . . . Ich theile Ihnen ein Curiosum über die *Abel*schen Integrale erster Classe mit, das ich bei einer ganz anderen Untersuchung, indem ich mich mit den linearen Systemen und ihren Determinanten beschäftigte, gefunden habe. Die von mir angestellte Betrachtung ist vielleicht für die fernere Theorie der *Abel*schen Integrale von geringerer Wichtigkeit, jedoch scheint sie mir durch die grofse Einfachheit und den ganz elementaren Gesichtspunct bemerkenswerth.

Jedem Systeme von $(n+1)(n+1)$ Gröfsen:

$$\begin{Bmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots. \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n+1}, & b_{n+1}, & c_{n+1}, & \ldots. \end{Bmatrix} \quad (S),$$

dessen Determinante von Null verschieden ist, entspricht bekanntlich ein anderes System:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots. & \alpha_{n+1} \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \ldots. & \beta_{n+1} \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \ldots. & \gamma_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{Bmatrix} \quad \left(\frac{1}{S}\right),$$

welches ich das ***umgekehrte*** oder ***reciproke*** System von jenem (S) nennen will und welches die Eigenschaft hat, dafs durch Auflösung der Gleichungen

$$a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 + \ldots. = v_1,$$
$$a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 + \ldots. = v_2, \text{ etc.}$$

rückwärts:

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots,$$
$$u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \cdots, \text{ etc.},$$

gefunden wird. Die Beziehungen solcher zwei Systeme zu einander sind bekanntlich in folgenden Gleichungen ausgesprochen:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_{n+1}\alpha_{n+1} = 1,$$

oder kürzer:

$$\Sigma a\alpha = 1, \text{ ferner } \Sigma a\beta = 0, \ \Sigma b\alpha = 0, \ \Sigma b\beta = 1, \text{ u. s. w.},$$

nämlich jede Summe dieser Art wird $= 1$ oder $= 0$, je nachdem die lateinischen Buchstaben mit ***entsprechenden*** oder mit ***nicht entsprechenden*** griechischen Buchstaben multiplicirt erscheinen; auf diesen Relationen, welche unter dem Namen der gewöhnlichen Determinanten-Eigenschaften bekannt sind, beruht alles folgende. Setzt man nämlich:

$$p_\mu = a_\mu + b_\mu x . \sqrt{n} + c_\mu x^2 . \sqrt{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)} + d_\mu x^3 . \sqrt{\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\right)} + \cdots,$$

$$\varpi_\mu = \alpha_\mu + \beta_\mu \xi . \sqrt{n} + \gamma_\mu \xi^2 . \sqrt{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)} + \delta_\mu \xi^3 . \sqrt{\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\right)} + \cdots,$$

wobei μ irgend eine der ganzen Zahlen 1, 2, 3 bis $n+1$ bedeuten kann, während x und ξ irgend zwei Variabeln vorstellen, deren Potenzen in den Functionen p resp. ϖ aufser mit den Coëfficienten obiger Systeme noch mit den Quadratwurzeln der zum Exponenten n gehörigen Binomialcoëfficienten multiplicirt sind: und bildet man dann die Summe der Producte $\Sigma p\varpi$, nämlich $p_1\varpi_1 + p_2\varpi_2 + p_3\varpi_3 + \cdots + p_{n+1}\varpi_{n+1}$, so fallen wegen der obigen Relationen ($\Sigma a\beta = 0$, $\Sigma b\alpha = 0$, $\Sigma a\gamma = 0$, $\Sigma b\gamma = 0$, etc.) alle diejenigen Glieder heraus, in denen die Exponenten von x und ξ ***verschieden*** sind, und man erhält wegen der Binomialcoëfficienten die $n$te Potenz von $1 + x\xi$, also $\Sigma p\varpi = (1 + x\xi)^n$. Dieser algebraische Satz, aus dem meine fernere Betrachtung hervorgegangen ist, und der auch eigentlich weiter nichts ist, als eine Zusammenfassung der Determinanten-Eigenschaften, läfst sich in Worten so aussprechen:

„Multiplicirt man die Horizontalreihen eines Systems von $(n+1)(n+1)$
„Gröfsen mit den aufeinanderfolgenden Potenzen von x (nämlich $1, x, x^2, x^3, \ldots$)
„und mit den Quadratwurzeln aus den Binomialcoëfficienten exponentis n, des-
„gleichen die Verticalreihen des umgekehrten Systems mit den Potenzen von ξ
„und denselben Quadratwurzeln der Binomialcoëfficienten, endlich die so aus
„den Horizontalreihen des ursprünglichen Systems erhaltenen ganzen Functionen
„von x mit resp. den aus den Verticalreihen des umgekehrten Systems er-

„haltenen ganzen Functionen von ξ, so wird die Summe dieser $n+1$ Producte „$(\Sigma f(x)\varphi(\xi))$ eine vollständige Potenz, nämlich die $n$te Potenz von $1+x\xi$."

Man könnte den Satz noch allgemeiner dahin aussprechen, dafs, wenn man statt der Binomialcoëfficienten beliebige andere Gröfsen nimmt, während alles Uebrige unverändert bleibt, zwar nicht eine Potenz von $1+x\xi$, aber doch eine blofse Function des Productes $x\xi$ erhalten wird.

Um nun auf den Zusammenhang mit der Transformation der *Abel*schen Integrale überzugehen, beschränke ich obige Betrachtung auf den Fall $n=2$, in welchem die vollständige Potenz von $1+x\xi$, von der so eben die Rede war, ein Quadrat wird. Man hat also in diesem Falle neun Gröfsen:

$$\begin{Bmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{Bmatrix} \text{ und neun andere } \begin{Bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{Bmatrix},$$

nämlich das umgekehrte System von jenem, von der Art, dafs, wenn man

$p_1 = a_1 + \sqrt{2}.b_1x + c_1x^2$, $p_2 = a_2 + \sqrt{2}.b_2x + c_2x^2$, $p_3 = a_3 + \sqrt{2}.b_3x + c_3x^2$

und

$\varpi_1 = \alpha_1 + \sqrt{2}.\beta_1\xi + \gamma_1\xi^2$, $\varpi_2 = \alpha_2 + \sqrt{2}.\beta_2\xi + \gamma_2\xi^2$, $\varpi_3 = \alpha_3 + \sqrt{2}.\beta_3\xi + \gamma_3\xi^2$

setzt, dann folgende identische Gleichung stattfindet:

$$(1.) \qquad p_1\varpi_1 + p_2\varpi_2 + p_3\varpi_3 = (1+x\xi)^2.$$

In dieser Gleichung kann man x und ξ als zwei von einander unabhängige Variabeln annehmen. Ich zerfälle sie in zwei andere, indem ich

$$(2.) \qquad p_1\varpi_1 + p_2\varpi_2 = 0$$

setze, wodurch dann von selbst

$$(3.) \qquad p_3\varpi_3 = (1+x\xi)^2$$

wird. In Folge dieser Annahme sind nun x und ξ nicht mehr von einander unabhängig, sondern es ist x als Function von ξ oder umgekehrt gesetzt, deren Zusammenhang eben durch die Gleichung (2.) oder durch (3.), welches nur eine andere Form von (2.) ist, ausgedrückt wird. Aus (2.) und (3.) ergiebt sich nun gerade die für die Transformation der *Abel*schen Integrale wichtige Folgerung, dafs $\sqrt{(p_1p_2p_3)}$ in $\sqrt{(\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}$ rational ausgedrückt werden kann, indem $\sqrt{(p_1\varpi_1)} = \sqrt{(-p_2\varpi_2)}$, $\sqrt{(p_3\varpi_3)} = 1+x\xi$, woraus leicht

$$\sqrt{(p_1p_2p_3)} = \sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}.\frac{p_1(1+x\xi)}{\varpi_2\varpi_3}$$

geschlossen wird.

Man kann also hier die Quadratwurzel aus einer Function 6ten Grades von x, nämlich $p_1p_2p_3$, rational auf die Quadratwurzel aus einer

analogen Function $\varpi_1\varpi_2\varpi_3$ *von* ξ *zurückführen,* und Sie werden wissen, dafs bei der Transformation der Integrale das schwierigste und Haupt-Geschäft darin besteht, die algebraischen Irrationalitäten durch einander auszudrücken, während die Vergleichung der Differentiale sich dann gewissermafsen schon von selbst macht. Um die letztere vorzunehmen, genügt es in der That, die vorgelegte quadratische Gleichung zwischen x und ξ, $F(x,\xi)=0$, welche sich in der Form $p_1\varpi_1+p_2\varpi_2=0$ oder in der Form $(1+x\xi)^2-p_2\varpi_2=0$ darstellen läfst, zu differentiiren, und aus der abgeleiteten Gleichung

$$F'(x)\partial x+F'(\xi)\partial\xi=0$$

das Differential ∂x in das Differential $\partial\xi$ auszudrücken. Ohne weitere Rechnung sieht man dann ein, dafs sich der Differential-Ausdruck $\frac{\partial x}{\sqrt{(p_1p_2p_3)}}$ in das Product aus $\frac{\partial\xi}{\sqrt{(\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}$ und einen andern Factor umformen läfst, der x und ξ beide rational enthält, und dafs, wenn man statt x seine beiden Werthe setzt, welche Wurzeln der quadratischen Gleichnng $F(x,\xi)=0$ und beide Functionen von ξ sind, dann die Summe $\Sigma\frac{\partial x}{\sqrt{(p_1p_2p_3)}}$, welche sich auf diese beiden Werthe von x erstreckt, $=\frac{\partial\xi}{\sqrt{(\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}$ wird, multiplicirt mit einem Factor, der ξ allein rational enthält, da ja die auf der rechten Seite der Gleichung auftretende symmetrische rationale Function der beiden Werthe von x wiederum in eine rationale Function von ξ allein umgesetzt werden kann. Ihnen genügt gewifs diese Andeutung, alles Übrige allein zu finden; auch werden Sie bemerken, dafs hier derselbe Gedanke zu Grunde liegt, welcher *Abel* bei der Addition und Multiplication geleitet hat, nur hier auf die Transformation übertragen. Jedoch will ich noch in Kürze angeben, wie ich die Rechnung selbst auf die einfachste Weise geführt habe.

Setzt man, wie oben, $p_1\varpi_1+p_2\varpi_2=F(x,\xi)$, so ist auch

$$F(x,\xi)=\vartheta^2-p_3\varpi_3,$$

wo ϑ von jetzt ab den Ausdruck $1+x\xi$ bedeuten soll. Durch Differentiation nach ξ kommt

$$F'(\xi)=2\vartheta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right)-p_3\varpi_3',$$

und wegen $p_3=\frac{\vartheta^2}{\varpi_3}$ kann man diesem Resultate die Form

$$F'(\xi)=\frac{\vartheta}{\varpi_3}\left(2\varpi_3\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right)-\vartheta\varpi_3'\right)$$

geben. Der Ausdruck $-2\varpi_3\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right)+\vartheta\varpi_3' = -2x\varpi_3+(1+x\xi)\varpi_3'$ werde durch Θ oder $\Theta(x,\xi)$ bezeichnet, so dafs demnach $F'(\xi) = -\frac{\vartheta}{\varpi_3}\Theta$ erhalten wird. Aus $F'(x)\partial x + F'(\xi)\partial\xi = 0$ ergiebt sich dann:

$$\partial x = \frac{\vartheta.\Theta}{\varpi_3 F'(x)}\cdot\partial\xi,$$

und wegen $\sqrt{(p_1p_2p_3)} = \sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}\cdot\frac{p_1\vartheta}{\varpi_2\varpi_3}$:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(p_1p_2p_3)}} = \frac{\partial\xi}{(\sqrt{-\varpi_1\varpi_2\varpi_3})}\cdot\frac{\Theta}{F'(x)}\cdot\frac{\varpi_2}{p_1}.$$

Nun sei

$$p_1 = (x-r)(x-s),$$

und man multiplicire die eben erhaltene Gleichung rechts und links mit $x-s$; dann kommt:

$$\frac{(x-s)\partial x}{\sqrt{(p_1p_2p_3)}} = \frac{\partial\xi}{\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}\varpi_2\cdot\frac{\Theta}{F'(x)(x-r)},$$

und wenn man jetzt über die beiden Werthe von x, die der quadratischen Gleichung

$$p_1\varpi_1 + p_2\varpi_2 = 0 \quad \text{oder}$$
$$F(x) = 0$$

genügen, summirt:

$$\Sigma\frac{(x-s)\partial x}{\sqrt{(p_1p_2p_3)}} = \frac{\partial\xi}{\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}\varpi_2.\Sigma\frac{\Theta}{F'(x)(x-r)}.$$

Die Function Θ ist in Bezug auf x vom ersten Grade, während $F'(x)$ vom zweiten Grade ist, also ergiebt sich nach der Theorie der Zerfällung in Partialbrüche:

$$\Sigma\frac{\Theta}{F'(x)(x-r)} = \frac{\Theta(r,\xi)}{F(r,\xi)},$$

wofür man auch $\frac{\Theta(r,\xi)}{p_2(r).\varpi_2}$ setzen kann, indem p_1, also der Theil $p_1\varpi_1$ in $F(x,\xi) = p_1\varpi_1 + p_2\varpi_2$ für $x = r$ verschwindet; man erhält also, da ϖ_2 sich aus Zähler und Nenner forthebt, schliefslich:

$$(4.)\qquad \Sigma\frac{(x-s)\partial x}{\sqrt{(p_1p_2p_3)}} = \frac{\Theta(r,\xi).\partial\xi}{p_2(r).\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}.$$

Der Formel (4.) analog erhält man noch, entweder durch Vertauschung von r und s, oder durch ein dem bisherigen ähnliches Verfahren:

$$(5.)\qquad \Sigma\frac{(x-r)\partial x}{\sqrt{(p_1p_2p_3)}} = \frac{\Theta(s,\xi)\partial\xi}{p_2(s).\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}};$$

hierbei sind $p_2(r)$ und $p_2(s)$ zwei Constanten, nämlich die Werthe von p_2 für $x = r$ und $x = s$, während, um es zu wiederholen, r und s die beiden Wurzeln von $p_1 = 0$ sind, und allgemein

$$\Theta(x,\xi) = (1+x\xi)\varpi_3' - 2x\varpi_3$$

gesetzt ist.

Um einzusehen, dafs die beiden für die Transformation der ersten Gattung nöthigen und hinreichenden Formeln (4.) und (5.) wirklich auch rechter Hand nur die Differentiale von *Abel*schen Integralen *erster* Gattung enthalten, ist zu beweisen, dafs die Function Θ, welche den Zähler der rechten Seite ausmacht, wenn r statt x gesetzt wird, nicht allein in Bezug auf x, sondern auch in Bezug auf ξ vom *ersten*, obwohl scheinbar vom *zweiten* Grade ist. Man erkennt dies am leichtesten, wenn man das Product $\vartheta.\Theta$ in der Form

$$\vartheta^2\left(\frac{\partial\varpi_3}{\partial\xi}\right) - \varpi_3\left(\frac{\partial(\vartheta^2)}{\partial\xi}\right)$$

schreibt, welches dann nicht vom dritten, sondern nur vom zweiten Grade ist, indem allgemein in einem Ausdruck wie $uv' - vu'$ die höchsten Glieder sich aufheben; die vollständige Ausrechnung ergiebt:

$$\Theta(x,\xi) = \beta_3\sqrt{2}.(1-x\xi) + 2\gamma_3\xi - 2\alpha_3 x;$$

und hierzu sind noch die Formeln zu bemerken:

$$\vartheta(r,\xi)\Theta(r,\xi) = p_2(r)(\varpi_2\varpi_3' - \varpi_3\varpi_2'), \text{ so wie}$$
$$\vartheta(s,\xi)\Theta(s,\xi) = p_2(s)(\varpi_2\varpi_3' - \varpi_3\varpi_2').$$

Was die *dritte* Gattung betrifft, die man auch allein betrachten kann, da aus ihr die übrigen durch Entwicklung nach dem Parameter hervorgehen, so multiplicire ich die Gleichung, welche oben vor dem Summiren nach x mit $x - s = \frac{p_1}{x-r}$ multiplicirt wurde, statt dessen allgemeiner mit $\frac{p_1}{x-k}$, wo k ein beliebiger Parameter ist, summire dann und erhalte:

$$\Sigma\frac{p_1\,\partial x}{(x-k)\sqrt{(p_1p_2p_3)}} = \frac{\varpi_2\,\partial\xi}{\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}\cdot\Sigma\frac{\Theta}{F'(x)(x-k)} = \frac{-\varpi_2\,\partial\xi}{\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}\cdot\frac{\Theta(k,\xi)}{F(k,\xi)},$$

nach der Theorie der Zerfällung in Partialbrüche. Nach derselben Theorie kann man wiederum, wenn $\overset{1}{\varkappa}$ und $\overset{2}{\varkappa}$ die Wurzeln der Gleichung

$$F(k,\xi) = 0 \quad \text{oder} \quad F(k,\varkappa) = 0$$

bezeichnen, den Bruch $\frac{\Theta(k,\xi)}{F(k,\xi)}$ in Partialbrüche mit den Nennern $\xi - \overset{1}{\varkappa}$ und $\xi - \overset{2}{\varkappa}$ zerfällen und erhält so:

$$\Sigma\frac{p_1\,\partial x}{(x-k)\sqrt{(p_1p_2p_3)}} = \frac{-\varpi_2\,\partial\xi}{\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}\left(\frac{\Theta(k,\overset{1}{\varkappa})}{F'(k,\overset{1}{\varkappa})(\xi-\overset{1}{\varkappa})} + \frac{\Theta(k,\overset{2}{\varkappa})}{F'(k,\overset{2}{\varkappa})(\xi-\overset{2}{\varkappa})}\right).$$

Zur ferneren Vereinfachung dieser Formel dient die Bemerkung, dafs, was oben für die zusammengehörigen Werthe x und ξ bewiesen ist, auch für k und $\varkappa$ gilt, dafs also, so wie oben, $\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \xi} = -\frac{\vartheta(x,\xi)\Theta(x,\xi)}{\varpi_3(\xi)}$ gefunden wurde, so auch $\frac{\partial F(k,\varkappa)}{\partial \varkappa}$, was so eben mit $F'(k,\varkappa)$ bezeichnet wurde. $= -\frac{\vartheta(k,\varkappa)\Theta(k,\varkappa)}{\varpi_3(\varkappa)}$, also

$$\frac{\Theta(k,\varkappa)}{F'(k,\varkappa)} = -\frac{\varpi_3(\varkappa)}{\vartheta(k,\varkappa)} = \frac{-\varpi_3(\varkappa)}{1+k\varkappa}$$

werden mufs, wofür man auch, wegen

$$F(k,\varkappa) = \vartheta(k,\varkappa)^2 - p_3(k)\varpi_3(\varkappa) = 0,$$

den Ausdruck $-\frac{\varpi_3(\varkappa)}{\sqrt{(p_3(k)\varpi_3(\varkappa))}} = -\sqrt{\frac{\varpi_3(\varkappa)}{p_3(k)}}$ setzen kann. Man erhält so endlich die elegante Formel für die dritte Gattung

$$(6.) \quad \Sigma \frac{p_1 \partial x}{(x-k)\sqrt{(p_1 p_2 p_3)}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\varpi_3(\overset{1}{\varkappa})}{p_3(k)}\right)} \frac{\varpi_2 \partial\xi}{(\xi-\overset{1}{\varkappa})\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}} + \sqrt{\left(\frac{\varpi_3(\overset{2}{\varkappa})}{p_3(k)}\right)} \frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\overset{2}{\varkappa})\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}.$$

Die neuen Parameter $\varkappa$ hängen merkwürdiger Weise mit dem alten k durch dieselbe Gleichung, wie ξ mit x zusammen, wie dies bei der Transformation der elliptischen Integrale bekanntlich auch der Fall ist. Was die Form betrifft, in der ich die dritte Gattung aufgestellt habe, nämlich mit einem Zähler zweiten Grades, statt dafs man sonst eine Constante zum Zähler nimmt, so involvirt diese Form allerdings die erste Gattung, und hat man bei dieser Darstellung für die dritte Gattung, aufser der vollkommenen Symmetrie auf beiden Seiten, auch noch den Vortheil, dafs aus der Formel:

$$(6'.) \quad \sqrt{(p_3(k))} \cdot \Sigma \int \frac{p_1 \partial x}{(x-k)\sqrt{(p_1 p_2 p_3)}}$$

$$= \sqrt{(\varpi_3(\overset{1}{\varkappa}))} \cdot \int \frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\overset{1}{\varkappa})\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}} + \sqrt{(\varpi_3(\overset{2}{\varkappa}))} \cdot \int \frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\overset{2}{\varkappa})\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}$$

oder aus der gleich bedeutenden

$$(6''.) \quad \Sigma \int \frac{p_1 \partial x}{(x-k)\sqrt{(p_1 p_2 p_3)}}$$

$$= \frac{\varpi_3(\overset{1}{\varkappa})}{1+k\overset{1}{\varkappa}} \int \frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\overset{1}{\varkappa})\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}} + \frac{\varpi_3(\overset{2}{\varkappa})}{1+k\overset{2}{\varkappa}} \int \frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\overset{2}{\varkappa})\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}$$

sofort die beiden für die erste Gattung erhalten werden können, wenn man

den Parameter k so wählt, dafs $x-k$ in p_1 aufgeht, also wenn man $k=r$ oder $k=s$ setzt; dann werden die neuen Parameter $\overset{1}{z}$ und $\overset{2}{z}$ von selbst die Werthe von ξ, für welche $\varpi_2=0$ ist, und welche ich mit ϱ und σ bezeichne, indem sich die Gleichung $p_1\varpi_1+p_2\varpi_2=0$ für $p_1=0$ auf $p_2\varpi_2=0$ oder blofs auf $\varpi_2=0$ reducirt; dann gehen also die Nenner rechts $\xi-\overset{1}{z}$ und $\xi-\overset{2}{z}$, nämlich $\xi-\varrho$ und $\xi-\sigma$ beide in ϖ_2 auf, und in den so entstehenden Formeln

$$\Sigma\int\frac{p_1\partial x}{(x-r)\sqrt{(p_1p_2p_3)}}=\frac{\varpi_3(\varrho)}{1+r\varrho}\int\frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\varrho)\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}+\frac{\varpi_3(\sigma)}{1+r\sigma}\int\frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\sigma)\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}},$$

$$\Sigma\int\frac{p_1\partial x}{(x-s)\sqrt{(p_1p_2p_3)}}=\frac{\varpi_3(\varrho)}{1+s\varrho}\int\frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\varrho)\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}+\frac{\varpi_3(\sigma)}{1+s\sigma}\int\frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\sigma)\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}$$

sind nur Integrale *erster* Gattung enthalten. Die constanten Factoren der Integrale können auch conform der (6'.) dargestellt werden, indem ja $(1+x\xi)^2=p_3\varpi_3$, wenn x einen der Werthe r oder s, und ξ zugleich einen der Werthe ϱ oder σ erhält; mit Berücksichtigung der zusammengehörigen Zeichen der Quadratwurzeln erhält man hiernach:

$$\sqrt{(p_3(r))}\cdot\Sigma\int\frac{p_1\partial x}{(x-r)\sqrt{(p_1p_2p_3)}}$$

$$=\sqrt{(\varpi_3(\varrho))}\int\frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\varrho)\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}+\sqrt{(\varpi_3(\sigma))}\int\frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\sigma)\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}\quad\text{und}$$

$$\sqrt{(p_3(s))}\cdot\Sigma\int\frac{p_1\partial x}{(x-s)\sqrt{(p_1p_2p_3)}}$$

$$=\sqrt{(\varpi_3(\varrho))}\int\frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\varrho)\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}-\sqrt{(\varpi_3(\sigma))}\int\frac{\varpi_2\partial\xi}{(\xi-\sigma)\sqrt{(-\varpi_1\varpi_2\varpi_3)}}.$$

Ich übergehe einige Bemerkungen betreffend die wiederholte Anwendung mehrerer solcher Transformationen, bei denen die Function $\varpi_1\varpi_2\varpi_3$ auf verschiedene Arten in das Product dreier Factoren zweiten Grades zu zerfällen sein wird, so wie die reciproke Transformation, bei der ξ als Function von x zu betrachten ist.

„Das Hauptresultat dieser Auseinandersetzungen besteht, um es kurz „auszudrücken, darin, dafs solche *Abel*sche Integrale durch algebraische Trans„formation zusammenhängen, bei denen die eine Quadratwurzel (in x) eben „so von den Horizontalreihen der Coëfficienten eines linearen Systems dritter „Ordnung abhängt, wie die andere Quadratwurzel (in ξ) von den Vertical„reihen der Coëfficienten des reciproken Systems, dafs nämlich, wenn die „Quadratwurzel in den zu transformirenden Integralen sich auf

„$(a_1+b_1x\sqrt{2}+c_2x^2)(a_2+b_2x\sqrt{2}+c_2x^2)(a_3+b_3x\sqrt{2}+c_3x^2)$

„bezieht, die in dem transformirten Integral die Function

$$(\alpha_1+\beta_1\xi\sqrt{2}+\gamma_1\xi^2)(\alpha_2+\beta_2\xi\sqrt{2}+\gamma_2\xi^2)(\alpha_3+\beta_3\xi\sqrt{2}+\gamma_3\xi^2)$$

„enthält, wobei

$$\text{„}\begin{Bmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}$$

„ist, und dafs die algebraische Transformationsgleichung in separirter Form:

$$\text{„}\frac{a_1+b_1x\sqrt{2}+c_1x^2}{a_2+b_2x\sqrt{2}+c_2x^2}+\frac{\alpha_2+\beta_2\xi\sqrt{2}+\gamma_2\xi^2}{\alpha_1+\beta_1\xi\sqrt{2}+\gamma_1\xi^2}=0,$$

„die Gleichung zwischen den Parametern

$$\text{„}\frac{a_1+b_1k\sqrt{2}+c_1k^2}{a_2+b_2k\sqrt{2}+c_2k^2}+\frac{\alpha_2+\beta_2\varkappa\sqrt{2}+\gamma_2\varkappa^2}{\alpha_1+\beta_1\varkappa\sqrt{2}+\gamma_1\varkappa^2}=0$$

„wird *)."

Mit dem Wunsche, Sie mögen dieses Schreiben einer freundlichen Antwort würdigen, erlaube mir zu zeichnen etc.

G. Eisenstein.

II.

Königsberg, den 21. November 1851.

Ihr freundliches Schreiben vom 1. Nov. hat mich sehr erfreut, und die darin mitgetheilte Entwickelung mein Interesse in hohem Grade in Anspruch genommen. Der Zusammenhang der Transformationsgleichung zweiter Ordnung des *Abel*schen Integrals erster Classe, mit den Coëfficienten zweier lineärer reciproker Gleichungssysteme ist neu, und daher, auch abgesehen von der weitern Entwickelung, deren Analogie mit der *Abel*schen Methode mir zwar bekannt, aber in dieser Form mit allgemeinen Coëfficienten der Substitution sehr interessant ist, Grund genug die Sache sofort zu veröffentlichen. Was das Theorem selbst betrifft, so bitte ich Sie, meine alte Abhandlung Seite 18 aufzuschlagen,

---

*) Den obigen ähnliche Betrachtungen lassen sich an eine Relation von der Form $p_1\varpi_1+p_2\varpi_2+p_3\varpi_3+p_4\varpi_4=0$ anknüpfen, wenn man sie in die beiden $p_1\varpi_1+p_2\varpi_2=0$ und $p_3\varpi_3+p_4\varpi_4=0$ zerfällt; die Functionen p sind hier vom dritten Grade, doch ist ihr Product $p_1p_2p_3p_4$ *nicht* die allgemeinste Function 12ten Grades, da, wenn jene Relation möglich sein soll, die Determinante der 16 Coëfficienten verschwinden mufs; die Coëfficienten der ϖ werden hierbei die sogenannten *kleinen* Determinanten.

Mai 1852.

und das Theorem unten nicht nur, sondern auch die Gl. 14. u. 15. anzusehen, um sich zu überzeugen, dafs es mit dem Ihrigen übereinstimmt. Denn Ihr Product $p_1 p_2 p_3$ läfst sich, wie ich vorher gezeigt, auf die Form

$$(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)$$

bringen, und die Transformationsformel:

$$v^2 = \frac{U}{V} = \frac{m+nt+pt^2}{m_1+n_1t+p_1t^2},$$

wodurch ich das Integral:

$$\int \frac{F_1(v^2)+vF_2(v^2)}{\sqrt{(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)}}\partial v$$

auf die Summe zweier ähnlichen Integrale, unter deren Wurzel der Ausdruck

$$(c+dt)(e+ft)(V-U)(V-a^2U)$$

steht, bringe, läfst sich wohl als nicht verschieden von der Formel

$$\frac{1-v^2}{1-a^2v^2} = \frac{V-U}{V-a^2U}$$

ansehn, welche mit Ihrer Formel übereinkommt.

Die bei jener Arbeit zu überwindenden Schwierigkeiten bezogen sich vor allem auf die Grenzen, und den zur Berechnung des Integrals anzuwendenden Algorithmus. Ich verfolgte daher damals weniger das zum Grunde liegende algebraische Princip. In mehreren bis jetzt nicht edirten Arbeiten, namentlich über die Umformung derjenigen Fälle, worin die von Ihnen durch p_1, p_2, p_3 bezeichneten Gröfsen nicht alle drei in reelle lineäre Factoren zerlegbar sind, in die Normalform, so wie namentlich in einer gröfsern über die Transformation der Summe zweier *Abel*schen Integrale ersten Grades mit von einander unabhängigen Grenzen in eine ähnliche, bin ich veranlafst gewesen, das algebraische Princip weiter zu verfolgen, jedoch nicht bis zu Ihrer Quelle gelangt. Da die Herausgabe beider Arbeiten, wenn sie ganz ordentlich und vollständig werden sollen, zeitraubend ist, so habe ich sie noch nicht ausführen können.

Wenn Sie eine Abschrift des mathematischen Theils Ihres geehrten Schreibens besitzen, so würde ich der Ansicht sein, dafs Sie dieselbe sofort an *Crelle,* als ein Schreiben an mich, zum Druck geben, wodurch zugleich die Erklärung sich von selbst ergiebt, weshalb der Gegenstand nicht weiter ausgeführt ist. In diesem Falle würden sie es vielleicht geeignet finden, einen Auszug aus meiner Antwort in *Crelle's* Journal folgen zu lassen, und hier-

für setze ich noch eine einfache Bemerkung her, die dann eine gute Stelle finden würde. Sie bezieht sich auf das Fundamentaltheorem der elliptischen Transcendente Θu, für vier Argumente, oder vielmehr auf die Ableitung desselben aus dem *Euler*schen Additionstheoreme.

Nach einer Anmerkung, welche ich im 36ten Bande des *Crelle*schen Journals gemacht habe, bleibt der Ausdruck

$$(\alpha.) \qquad \frac{(1-k\sin\mathrm{am}\,u_1\sin\mathrm{am}\,u_2)(1+k\sin\mathrm{am}\,u_3\sin\mathrm{am}\,u_4)}{(1+k\sin\mathrm{am}\,u_1\sin\mathrm{am}\,u_2)(1-k\sin\mathrm{am}\,u_3\sin\mathrm{am}\,u_4)}$$

ungeändert, wenn man statt der vier Argumente

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,$$

respective $U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4$

setzt, welche letztere aus den Gleichungen

$$(\beta.)\ u_1+u_2=U_1+U_2,\ u_3-u_4=U_3-U_4,\ u_1-u_2=U_3+U_4,\ u_3+u_4=U_1-U_2$$

folgen. Ich habe mich dabei der, aus der 7ten Formel des §. 18. der *Fundamente* hervorgehenden Formel

$$1-k\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v = \frac{(1-k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u+v))(1+k\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u-v))}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u+v)\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u-v)}$$

bedient, welche ich auch hier anwenden will.

Addirt man den obigen Ausdruck $(\alpha.)$ zu 1, benutzt die eben erwähnte Formel zur Umformung des Nenners, auf welchen diese Summe gebracht wird, und bedenkt, dafs das dabei vorkommende Product

$$(1+k\sin^2\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}(u_1+u_2))(1-k\sin^2\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}(u_1-u_2))(1-k\sin^2\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}(u_3+u_4))\cdot (1+k\sin^2\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}(u_3-u_4))$$

durch Substitution der Argumente $U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4$ der vier Gleichungen $(\beta.)$ halber ungeändert bleibt, so folgt daraus, dafs auch das Product der drei Factoren

$$(A.) \qquad \begin{cases} (1-k^2\sin\mathrm{am}\,u_1\sin\mathrm{am}\,u_2\sin\mathrm{am}\,u_3\sin\mathrm{am}\,u_4)\cdot \\ (1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u_1+u_2)\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u_1-u_2))\cdot \\ (1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u_3+u_4)\sin^2\mathrm{am}\,\frac{1}{2}(u_3-u_4)) \end{cases}$$

sich derselben Eigenschaft erfreut.

Aus der Definition der Function Θu

$$\frac{\Theta u}{\Theta o} = e^{\int_0^u Zu\,\partial u},$$

worin $Zu = E\,\mathrm{am}\,u - \frac{u.E}{k}$ gesetzt ist, leitet man direct die Grundgleichung

derselben für zwei Argumente auf folgende Art ab. Wenn man in die aus dem *Euler*schen Fundamentaltheorem der 2ten Gattung folgende Gleichung des §. 49. der *Fundamente*

$$2E\varphi - E\sigma - E\vartheta = \frac{2k^2 \sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi \sin^2\alpha}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}$$

die Werthe

$$\alpha = \operatorname{am} a, \quad \varphi = \operatorname{am} u, \quad \sigma = \operatorname{am}(u+a), \quad \vartheta = \operatorname{am}(u-a)$$

zurücksetzt, so erhält man nach Einführung der Function Z folgende Gleichung

$$2Zu - Z(u+a) - Z(u-a) = k^2 \sin^2\operatorname{am} a \frac{\frac{\partial \sin^2\operatorname{am} u}{\partial u}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} a \sin^2\operatorname{am} u},$$

deren Integration nach u, von $u=0$ an ausgeführt, nach Einführung der Function Θ die bekannte Gleichung

$$1-k^2\sin^2\operatorname{am} a\sin^2\operatorname{am} u = \frac{\Theta(a+u)\,\Theta(a-u)\,\Theta 0\,\Theta 0}{(\Theta a)^2(\Theta u)^2}$$

liefert.

Mit Hülfe derselben gehen die beiden letztern Factoren des Products (*A*.) respective in folgende Ausdrücke über:

$$\frac{\Theta u_1\,\Theta u_2\,\Theta 0\,\Theta 0}{(\Theta\frac{1}{2}(u_1+u_2))^2(\Theta\frac{1}{2}(u_1-u_2))^2},$$

$$\frac{\Theta u_3\,\Theta u_4\,\Theta 0\,\Theta 0}{(\Theta\frac{1}{2}(u_3+u_4))^2(\Theta\frac{1}{2}(u_3-u_4))^2},$$

aus deren Substitution in dasselbe Product, da der dadurch entstehende Nenner

$$\Theta^2\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\,\Theta^2\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\,\Theta^2\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\,\Theta^2\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)$$

durch Substitution der Argumente U_1, etc. wieder ungeändert bleibt, sich ergiebt, dafs das Product

$$(1-k^2\operatorname{sin am} u_1 \operatorname{sin am} u_2 \operatorname{sin am} u_3 \operatorname{sin am} u_4)\,\Theta u_1\,\Theta u_2\,\Theta u_3\,\Theta u_4$$

dieselbe Eigenschaft besitzt, oder, nach Einführung der Function

$$Hu = \sqrt{k}\operatorname{sin am} u\,.\,\Theta u,$$

dafs die gesuchte Gleichung besteht:

$$\Theta u_1\,\Theta u_2\,\Theta u_3\,\Theta u_4 - Hu_1\,Hu_2\,Hu_3\,Hu_4$$
$$= \Theta U_1\,\Theta U_2\,\Theta U_3\,\Theta U_4 - HU_1\,HU_2\,HU_3\,HU_4.$$

Man kann wohl auch diese Fundamentalgleichung der Function Θ direct durch *eine* Integration finden.

Etc.

F. Richelot.

15.

Kurze Ableitung des *Legendre*schen Satzes über die Reduction der Berechnung eines sphärischen auf die eines ebenen Dreiecks.

(Von Herrn *A. Winkler*, Ingenieur-Practicanten zu Carlsruhe.)

Der von *Legendre* im Jahr 1787 aufgestellte Satz, dafs die Berechnung eines sphärischen Dreiecks mit kleinen Seiten durch Verminderung jedes seiner Winkel um den dritten Theil des sphärischen Excesses auf die Berechnung eines ebenen Dreieck, welches dieselben Seiten hat wie das sphärische, zurückgeführt werden kann, ist von seinem Entdecker (M. s. die Note III. von *Legendre* in *Delambre*'s Méthodes analyt. pour la déterm. d'un arc du méridien) nicht ganz direct hergeleitet worden. Die mir bekannten sonstigen Herleitungen enthalten mehrere Reihen-Entwickelungen, und sind ziemlich weitläuftig.

Die nachstehende Ableitung ergiebt sich aus zwei bekannten, einander analogen Formeln der sphärischen und ebenen Trigonometrie, und erfordert nur die Entwickelung des Sinus nach Potenzen des Bogens.

Es seien nämlich a, b, c die Seiten (welche hier als kleine Gröfsen erster Ordnung betrachtet werden sollen) und A, B, C die ihnen gegenüberstehenden Winkel eines sphärischen Dreiecks. Ein ebenes Dreieck habe dieselben Seiten a, b, c wie das sphärische; A_1, B_1, C_1 seien die ihnen gegenüberstehenden Winkel.

Die zwei erwähnten Formeln sind:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)}\right)}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_1 = \sqrt{\left(\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}\right)}.$$

Die erste derselben geht, nachdem die Sinusse in Reihen entwickelt, die gemeinschaftlichen Factoren herausgezogen und die Multiplicationen unter Weglassung der Glieder vierter und höherer Ordnungen ausgeführt worden

sind, in die folgende über:

$$\tang \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1-\frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2-2bc)}{1-\frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2+2bc)}\right)}.$$

Setzt man nun für den ersten Factor $\tang \frac{1}{2}A_1$ und entwickelt den Bruch unter der Wurzel des zweiten Factors in eine Reihe, von welcher man nur die Glieder bis zur vierten Ordnung excl. beibehält, so findet man:

$$\tang \tfrac{1}{2}A = \tang \tfrac{1}{2}A_1 \sqrt{(1+\tfrac{1}{3}bc)},$$

oder, genau, bis auf Gröfsen vierter Ordnung:

$$\tang \tfrac{1}{2}A - \tang \tfrac{1}{2}A_1 = \tfrac{1}{6}bc.\tang \tfrac{1}{2}A_1;$$

welche Gleichung sich auch so schreiben läfst:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A-A_1) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}bc \sin \tfrac{1}{2}A_1 \cos \tfrac{1}{2}A.$$

Da diesemnach $\sin \frac{1}{2}(A-A_1)$ eine Gröfse zweiter Ordnung ist, so hat die Verwechselung des Sinus mit seinem Bogen einen Unterschied erst von der sechsten und die Verwechselung von $\cos \frac{1}{2}A$ mit $\cos \frac{1}{2}A_1$ einen Unterschied erst von der vierten Ordnung zur Folge. Es ist also, bis auf Gröfsen vierter Ordnung genau:

$$A - A_1 = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}bc \sin A_1.$$

Der Factor $\frac{1}{2}bc \sin A_1$ drückt den Inhalt des ebenen Dreiecks aus, welcher ebenfalls bis auf Gröfsen vierter Ordnung dem sphärischen Excess gleich ist. Bezeichnet man diesen durch E, so erhält man

$$A - A_1 = \tfrac{1}{3}E,$$
$$B - B_1 = \tfrac{1}{3}E,$$
$$C - C_1 = \tfrac{1}{3}E;$$

welche Gleichungen selbst dann bis auf Gröfsen vierter Ordnung genau sind, wenn man den sphärischen Excess aus dem Inhalt des *ebenen* Dreiecks sucht.

Im October 1848.

16.

Lehrsätze.

(Von Herrn Professor *J. Steiner* zu Berlin.)

---

1. *a*) „***Werden einem vollständigen Vierseit irgend zwei Kegelschnitte eingeschrieben, so liegen die acht Puncte, in welchen sie die Seiten berühren, allemal in irgend einem dritten Kegelschnitte.***"

Und umgekehrt:

b) „***Legt man durch die vier Berührungspuncte eines dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitts einen beliebigen andern Kegelschnitt, so schneidet dieser die Seiten in vier solchen neuen Puncten, in welchen dieselben allemal von irgend einem dritten Kegelschnitte berührt werden können.***"

Ferner:

c) „***Die gegenseitigen vier Schnittpuncte je zweier, demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte liegen mit jedem der drei Paar Gegen-Ecken des Vierseits zusammen in einem Kegelschnitte.***"

Und ferner:

d) „***Von den acht Berührungspuncten je zweier, demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte liegen zwölf mal vier mit irgend zwei der vier gegenseitigen Schnitte der letztern zusammen in einem neuen Kegelschnitte. Die dadurch bestimmten neuen zwölf Kegelschnitte ordnen sich in sechs Paare, welche einander doppelt berühren; nämlich durch je zwei der genannten vier Schnitte gehen zwei neue Kegelschnitte, die sich in denselben berühren.***"

Analoge Eigenschaften finden in Rücksicht des vollständigen Vierecks statt.

2. „***Beim vollständigen Viereck im Kreise haben die Rechtecke unter den drei Paar Perpendikeln, welche aus irgend einem Puncte des Kreises auf die drei Paar Gegenseiten des Vierecks gefällt werden, jedesmal gleichen Inhalt.***"

3. *a*) „***Werden einem Dreiseit ABC irgend vier Kegelschnitte eingeschrieben, so haben je zwei derselben (aufser den drei Seiten des Dreiseits) noch eine vierte gemeinschaftliche Tangente T; was zusammen sechs T giebt; diese sechs T schneiden jede der drei Seiten A, B und C in sechs solchen Puncten, welche Involution bilden.***" (Nämlich die Tangente

je zweier Kegelschnitte und die Tangente der jedesmaligen beiden andern, geben je ein Paar conjugirte Puncte.)

b) *„Wenn irgend vier Kegelschnitte einen Brennpunct und eine Tangente A gemein haben, so haben sie, zu zwei und zwei, noch sechs Tangenten T gemein, welche jene Tangente A in sechs Involutionspuncten schneiden.“*

4. *„Haben vier Parabeln den Brennpunct gemein, so haben je zwei derselben nur eine gemeinschaftliche Tangente T (aufser der unendlich entfernten); was zusammen sechs T giebt. Die aus irgend einem Puncte p auf diese sechs T gefällten Perpendikel (so wie auch die durch p den sechs T parallel gezogenen Geraden) bilden jedesmal Involution.“*

5. *a*) *„Sind in einer Ebene eine Parabel P^2 und irgend ein System confocaler Kegelschnitte C^2 in fester Lage gegeben, so hat die P^2 mit jedem C^4 vier Tangenten gemein, von welchen P^2 in je vier Puncten a, b, c und d berührt wird. Das Product der aus dem Brennpunct der Parabel nach den je vier Berührungspuncten gezogenen Leitstrahlen ist constant, also*

$$fa.fb.fc.fd = \text{constant}.“$$

Wird die Parabel von den aus den gemeinschaftlichen Brennpuncten der Kegelschnitte C^2 an sie gezogenen zwei Paar Tangenten in den Puncten a_1, b_1, c_1 und d_1 berührt, so hat insbesondere auch das Product

$$fa_1.fb_1.fc_1.fd_1$$

denselben constanten Werth.

b) *„Wird die Parabel, in derselben Ebene, um ihren festbleibenden Brennpunct f beliebig herumbewegt, wobei sich die durch jeden Kegelschnitt C^2 bedingten vier Berührungspuncte a, b, c, d ändern, so behält das Product*

$$fa.fb.fc.fd$$

für alle Kegelschnitte C^2 denselben constanten Werth.“

Und ferner:

c) *„Für jede beliebige andere Parabel, welche nur denselben Brennpunct f hat, behält das genannte Product den nämlichen constanten Werth.“*

d) *„Die angegebenen Eigenschaften (a, b, c) bleiben analogerweise bestehen, wenn an die Stelle der confocalen Kegelschnitte C^2 ein System concentrischer Kreise tritt.“*

Berlin, im Mai 1852.

17.

Einige Bemerkungen zum *Euler*schen Additionstheorem der elliptischen Integrale.

(Vom dem Herrn Dr. *Richelot*, Prof. ord. an der Universität zu Königsberg in Pr.)

Euler hat bekanntlich das Additionstheorem der elliptischen Integrale auf indirectem Wege, nämlich dadurch gefunden, dafs er eine symmetrische ganze rationale Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Variabeln differentiirt und das Resultat auf die Form

$$\frac{dy}{\sqrt{(fy)}} \pm \frac{dx}{\sqrt{(fx)}} = 0$$

bringt, wo der Kürze wegen

$$fx = A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4,$$
$$fy = A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4$$

gesetzt ist. Da die genannte endliche Gleichung sechs und die gefundene Differentialgleichung nur fünf von einander unabhängige Constanten enthält, so erkennt ***Euler*** in der erstern eine vollständige Integralgleichung, und stellt nun eine kunstreiche Rechnung an, um die ersten sechs Coëfficienten durch die fünf letztern und eine sechste Constante auszudrücken, welche dann die willkürliche Constante der Integralgleichung ist.

In der später von ***Lagrange*** gefundenen directen Integration der nämlichen separirten Differentialgleichung erscheint die Integralgleichung in der Form, dafs die willkürliche Constante abgesondert ist, oder, wie man jetzt zu sagen pflegt, als Integral derselben Differentialgleichung.

Obgleich ***Euler*** in der Folge dieses Integral, dessen Ableitung von ***Lagrange*** er so ungemein bewundert, dazu benutzt hat, die obenerwähnte Bestimmung der sechs Coëfficienten auf eine andere Weise auszuführen und dann auf diesem Wege seinen Zusammenhang mit der oben erwähnten Integralgleichung nachzuweisen, so wüfste ich doch nicht, dafs man Dasselbe ohne weitläuftige Rechnung, direct durch Auflösung der ***Euler***schen Integralgleichung nach einer sechsten Constante entwickelt hätte. Ich werde in den folgenden Zeilen diese einfache Auflösung mittheilen und einige Bemerkungen über den Zusammenhang der ***Euler***schen Bestimmung jener sechs Constanten mit andern bekannten Gegenständen voranschicken.

§. 1.

Setzt man der Kürze wegen

$$(2.)\quad \begin{cases} a+2bx+dx^2=2X, & a+2by+dy^2=2Y, \\ b+(c+d)x+ex^2=X_1, & b+(c+d)y+ey^2=Y_1, \\ d+2ex+fx^2=2X_2, & d+2ey+fy^2=2Y_2, \end{cases}$$

so läfst sich die oben erwähnte ganze rationale symmetrische Gleichung

$$(3.)\quad 0=a+2b(x+y)+2cxy+d(x+y)^2+2exy(x+y)+fx^2y^2$$

auf folgende zwei Formen bringen:

$$(4.)\quad \begin{cases} 0=X+X_1y+X_2y^2, \\ 0=Y+Y_1x+Y_2x^2, \end{cases}$$

deren Differentiation nach x und y folgende Differentialgleichung giebt:

$$(5.)\quad 0=(X_1+2X_2y)dy+(Y_1+2Y_2x)dx.$$

Andrerseits geben die beiden Gleichungen (4.) die Formeln

$$(6.)\quad \begin{cases} (X_1+2X_2y)^2=X_1^2-4XX_2, \\ (Y_1+2Y_2x)^2=Y_1^2-4YY_2. \end{cases}$$

Man erhält daher, je nachdem die Werthe der Gröfsen x und y dem Producte

$$(X_1+2X_2y)(Y_1+2Y_2x)$$

einen positiven oder negativen Werth geben, aus der Differentialgleichung (5.) folgende Gleichung:

$$(7.)\quad \frac{dy}{\sqrt{(Y_1^2-4YY_1)}}+\frac{\varepsilon dx}{\sqrt{(X_1^2-4XX_2)}}=0;$$

wo $\varepsilon=\pm 1$ zu setzen ist und das obere Zeichen für den positiven, das untere für den negativen Werth des Products (6.) gilt.

Vergleicht man nun die Coëfficienten der gleichen Potenzen in den Ausdrücken

$$X_1^2-4X.X_2 \quad \text{und} \quad fx,$$

so erhält man die Gleichungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} A=b^2-ad, \\ B=bc-ae, \\ C=c^2-af-2(be-cd), \\ D=ce-bf, \\ E=e^2-df, \end{cases}$$

aus denen man, um die gegebene Function fx durch die Form

$$X_1^2-4XX_2$$

darzustellen, die sechs Gröfsen a, b, c, d, e, f durch die gröfsern fünf Buch-

staben und durch die Formel

$$c^2 - af = M$$

ausdrücken kann. Die Substitution dieser auf eine ähnliche Weise von ***Euler*** gefundenen Ausdrücke in die Gleichung (3.) führt auf eine quadratische Gleichung in Bezug auf M, deren Auflösung ein Integral giebt, welches nach einigen Reductionen auf die von ***Lagrange*** gefundene Form

$$(9.) \quad \left(\frac{\sqrt{(fy)} - \varepsilon\sqrt{(fx)}}{y-x}\right)^2 - 2D(y+x) - E(y+x)^2 = M$$

zurückkommt, welche das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(fy)}} + \frac{\varepsilon dx}{\sqrt{(fx)}} = 0$$

ist.

§. 2

Zuvörderst die Auflösung der Gleichungen (8.) läfst sich aus einem allgemeinern Gesichtspuncte auffassen und dann aus bekannten Formeln abschreiben. Sieht man nämlich die Gröfsen

$$a,\ d,\ f,$$
$$e,\ c,\ b$$

als die Coëfficienten der ternären Form

$$ax'x' + dx''x'' + fx'''x''' + 2ex''x''' + 2cx'''x' + 2bx'x''$$

an, welche durch die Substitution

$$x' = 1, \quad x'' = x + y, \quad x''' = xy$$

in die Seite rechts der Gleichung (3.) übergeht, so sind die den Gleichungen (8.) entsprechenden Werthe der Gröfsen

$$E, \qquad M, \qquad A,$$
$$-B, \quad -\tfrac{1}{2}(M-C), \quad -D,$$

wo $M = c^2 - af$ gesetzt ist, die Coëfficienten der zu jener gehörigen ternären Form (Forma adiuncta. Disq. arith. No. 267.):

$$Ey'y' + My''y'' + Ay'''y''' - 2By''y''' - (M-C)y'''y' - 2Dy'y''.$$

Dieselbe hat die Eigenschaft, dafs sie durch die Substitution

$$y' = z^2, \quad y'' = -z, \quad y''' = 1$$

in die Function fz übergeht.

Man erhält daher umgekehrt aus den hiezu gehörigen bekannten Formeln, wenn man die Determinanten der beiden Formen durch

$$(10.)\quad \begin{cases} ae^2 + dc^2 + fb^2 - adf - 2bce = \Delta, \\ EB^2 + M.\frac{1}{2}(M-C)^2 + AD^2 - EMA + DB(MC) = \mathrm{D} \end{cases}$$

bezeichnet, folgende Ausdrücke für die Coëfficienten der ersten Form:

$$(11.)\quad \begin{cases} \mathrm{D} = \Delta\Delta, \\ B^2 - AM = a.\Delta, \quad \frac{1}{2}(M-C)^2 - AE = d.\Delta, \quad A^2 - EM = f.\Delta, \\ BE + D\frac{1}{2}(M-C) = -e\Delta, \quad BD + M\frac{1}{2}(M-C) = -c\Delta, \quad AD + B\frac{1}{2}(M-C) = -b\Delta; \end{cases}$$

welche mit den von *Euler* gefundenen Formeln, *mutatis mutandis*, übereinstimmen.

Setzt man nämlich die erste Form der Kürze wegen

$$= F(x', x'', x''')$$

und führt statt der Variabeln x', x'', x'' die durch die Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}F'x' = ax' + bx'' + cx''' = y'\sqrt{(\pm\Delta)}, \\ \frac{1}{2}F''x'' = bx' + dx'' + ex''' = y''\sqrt{(\pm\Delta)}, \\ \frac{1}{2}F'x''' = cx' + ex'' + fx''' = y'''\sqrt{(\pm\Delta)} \end{cases}$$

bestimmten Gröfsen y', y'', y''' ein, wo das obere Zeichen für einen *positiven*, das untere für einen *negativen* Werth von Δ zu nehmen und der Werth $\Delta = 0$ auszuschliefsen ist, so gelangt man zur zweiten Form.

Nun folgt aus der identischen Gleichung

$$F(x', x'', x''') = \frac{1}{2}(x'F'x' + x''F''x'' + x'''F'''x''')$$

folgende:

$$F(x', x'', x''') = \sqrt{(\pm\Delta)}(x'y' + x''y'' + x'''y'''),$$

welche, mit Benutzung der aus den Gleichungen (12.) folgenden Werthe von x', x'', x''', mit der zweiten Form verglichen, auf die Gleichungen (8.) führt; und eben so, mit Benutzung der aus diesen Auflösungen der Gleichungen (12.) folgenden Werthe von y', y'', y''' (ausgedrückt in den grofsen Buchstaben), so wie eines Lehrsatzes aus der Theorie der Determinanten, mit der ersten Form verglichen, die Gleichungen (11.) giebt.

Diese unmittelbar auf Formen von einer beliebigen Anzahl von Variabeln auszudehnende Bestimmungsart der Coëfficienten zusammengehöriger Formen leidet nur eine Ausnahme, wenn die Determinante der ursprünglichen Form, hier als der Ausdruck Δ, verschwindet. Schliefst man also diesen Fall aus und nimmt die sechs Gröfsen a, b, c, d, e, f von einander unabhängig an, so sind die durch die Gleichungen (8.) bestimmten fünf Functionen derselben, und die Function

$$M = c^2 - af$$

ist die sechste der von einander unabhängigen Functionen dieser sechs Gröfsen.

Daher ist Y in der Integralgleichung als eine *willkürliche* Constante zu betrachten.

Diese Bemerkung ergiebt sich schon daraus, dafs, wenn die sechs Functionen nicht von einander unabhängig wären, die sechs beliebigen Gröfsen a, b, c, d, e, f mittels der Gleichungen (11.) durch weniger als sechs Gröfsen ausgedrückt werden könnten; was ein Widerspruch ist.

Allein ich will diese Gelegenheit benutzen, um die von *Jacobi* (S. Band 22. Seite 319 dies. Journ.) sogenannte *Functionaldeterminante* dieser sechs Functionen zu bestimmen, von deren Verschwinden oder Nichtverschwinden es bekanntlich abhangt, ob die Functionen von einander abhängig sind, oder nicht.

Man betrachte folgendes System linearer Gleichungen:

$$(13.)\quad \begin{cases} k_a = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial a} x_a + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial b} x_b + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial c} x_c + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial d} x_d + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial e} x_e + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial f} x_f, \\ k_b = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial a} x_a + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial b} x_b + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial c} x_c + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial d} x_d + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial e} x_e + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial f} x_f, \\ \text{etc.} \\ k_f = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial a} x_a + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial b} x_b + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial c} x_c + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial d} x_d + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial e} x_e + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial f} x_f, \end{cases}$$

deren Coëfficienten die zweiten partiellen Differentialquotienten der Determinante Δ nach den sechs Elementen, oder die ersten partiellen Differentialquotienten der sechs Functionen

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a} = e^2 - df = E, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial b} = 2(bf - ce) = -2D, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial c} = 2(cd - be) = -(M - C),$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial d} = c^2 - af = M, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial e} = 2(ae - bc) = -2B, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial f} = b^2 - ad = A$$

sind, und in denen die Gröfsen x_a, x_b, etc. die Unbekannten und die Gröfsen k_a, k_b, etc. beliebige gegebene Werthe bezeichnen. Da die gesuchte Functionaldeterminante mit dem Nenner der sechs Ausdrücke für x_a, x_b, etc., welche diesen Gleichungen Genüge leisten, übereinstimmt, so kommt es darauf an, dieselben aufzulösen.

Zu dem Ende bediene man sich der aus den Eigenschaften der Determinanten geradezu sich ergebenden drei *identischen* Gleichungen

$$a\frac{\partial \Delta}{\partial a} - d\frac{\partial \Delta}{\partial d} - e\frac{\partial \Delta}{\partial c} - f\frac{\partial \Delta}{\partial f} = -\Delta,$$

$$a\frac{\partial \Delta}{\partial b} + 2b\frac{\partial \Delta}{\partial a} + c\frac{\partial \Delta}{\partial e} = 0,$$

$$a\frac{\partial \Delta}{\partial c} + b\frac{\partial \Delta}{\partial e} + 2c\frac{\partial \Delta}{\partial f} = 0.$$

Differentiirt man dieselben nach allen sechs Elementen, so erhält man dreimal sechs identische Gleichungen, mit deren Hülfe aus den vorgeschriebenen sechs Gleichungen (13.) folgende drei folgen:

$$(14.)\quad \begin{cases} -ak_a + dk_d + ek_e + fk_f = 2\frac{\partial \Delta}{\partial a}x_a + \frac{\partial \Delta}{\partial b}x_b + \frac{\partial \Delta}{\partial c}x_c, \\ -ak_b - 2bk_d - ck_e = \frac{\partial \Delta}{db}x_a + 2\frac{\partial \Delta}{\partial d}x_b + \frac{\partial \Delta}{\partial e}x_c, \\ -ak_c - 2bk_e - ck_f = \frac{\partial \Delta}{\partial c}x_a + \frac{\partial \Delta}{de}x_b + 2\frac{\partial \Delta}{\partial f}x_c. \end{cases}$$

Vertauscht man hierin überall die sechs Buchstaben

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,$$

respective mit

$$d,\ e,\ b,\ f,\ c,\ a,$$

und mit

$$f,\ c,\ e,\ a,\ b,\ d,$$

so erhält man zwei ähnliche Systeme von drei Gleichungen. Das eine (15.) enthält die unbekannten Gröfsen

$$x_d,\quad x_e,\quad x_b,$$

das andere (16.) die Gröfsen

$$x_f,\quad x_c,\quad x_e,$$

und in allen drei Systemen ist die aus den neun Coëfficienten gebildete Determinante die Determinante der neun Gröfsen

$$2\frac{\partial \Delta}{\partial a},\quad \frac{\partial \Delta}{\partial b},\quad \frac{\partial \Delta}{\partial c},$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial b},\quad 2\frac{\partial \Delta}{\partial d},\quad \frac{\partial \Delta}{\partial e},$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial c},\quad \frac{\partial \Delta}{\partial e},\quad 2\frac{\partial \Delta}{\partial f},$$

oder, mit Bezug auf die Gleichungen (10.) und (11.):

$$= 8D = 8\Delta\Delta.$$

Da nun diese Determinante der gemeinsame Nenner der sechs aus den drei Systemen von Gleichungen (13, 14 und 15.) sich ergebenden Werthe der Unbekannten ist, so stimmt sie auch mit der Determinante der 36 Coëfficienten der Gleichungen (12.), also mit der gesuchten Functionaldeterminante bis auf einen constanten Zahlenfactor überein, welchen man leicht durch Vergleichung zweier gleichnamigen Glieder findet.

Dies giebt demnach folgenden Satz:

Die Functionaldeterminante der sechs Functionen

$$e^2-df,\quad 2(bf-ce),\quad 2(cd-be),$$
$$c^2-af,\quad 2(ae-bc),\quad b^2-ad,$$

oder, was Dasselbe ist, die Determinante der 36 partiellen zweiten Differentialquotienten der Determinante Δ der Gröfsen

$$-a,\quad -b,\quad -c,$$
$$-b,\quad -d,\quad -e,$$
$$-c,\quad -e,\quad -f,$$

stimmt, bis auf einen Zahlenfactor, mit dem Quadrat der letztern Determinante überein, und ist, wenn man die Elemente nach den sechs Gröfsen a, b, c, d, e, f auf einander folgen läfst, also so wie die Coëfficienten der Gleichung (13.) geordnet sich zeigen:

$$= -16\Delta\Delta.$$

Ganz auf dieselbe Weise findet man einen analogen Satz für mehre Elemente, und auch für solche, bei denen die horizontalen Reihen mit den verticalen Reihen nicht übereinstimmen. Aufserdem bestätigt der Satz die obigen Bemerkungen in Bezug auf die Unabhängigkeit der obigen sechs Ausdrücke.

§. 3.

Ich gehe jetzt zu dem eigentlichen Zweck dieses Aufsatzes über, indem ich das Integral (9.) ohne vorhergehende *Auflösung* der Gleichungen (8.) aus der Integralgleichung (3.) ableiten werde.

Zieht man aus beiden Theilen der Gleichungen (6.) die Quadratwurzeln und benutzt die daselbst (§. 1.) eingeführte Bezeichnung, so erhält man die Gleichungen

$$(15.)\quad \begin{cases} X_1+2X_2y = \pm\varepsilon\sqrt{(X_1^2-4XX_2)} = \pm\varepsilon\sqrt{(fx)}, \\ Y_1+2Y_2x = \pm\varepsilon\sqrt{(Y_1^2-4YY_2)} = \pm\sqrt{(fy)}. \end{cases}$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab und erhebt beide Seiten der resultirenden Gleichung zum Quadrat, so erhält man, mit Benutzung der Formeln (2.), die Gleichung

$$(c+e(y+x)+f.yx)^2(y-x)^2 = (\sqrt{(fy)}-\varepsilon\sqrt{(fx)})^2.$$

Addirt man hiezu die aus der Gleichung (3.) durch Multiplication mit $f(y-x)^2$ hervorgehende Gleichung

$$0=(y-x)^2(af+2bf(y+x)+2cfyx+df(y+x)^2+2efyx(y+x)+f^2y^2x^2),$$

so erhält man, nach der Division mit $(y-x)^2$, die Gleichung

$$c^2-af+2(ce-bf)(y+x)+(e^2-df)(y+x)^2=\left(\frac{\sqrt{(fy)}-\varepsilon\sqrt{(fx)}}{y-x}\right)^2;$$

woraus mit Hinzuziehung der Bezeichnnng (8.) folgt, dafs der Ausdruck

$$(16.)\quad \left(\frac{\sqrt{(fy)}-\varepsilon\sqrt{(fx)}}{y-x}\right)^2-2D(y+x)-E(y+x)^2=c^2-af,$$

also unabhängig ist von den in der Differentialgleichung

$$(17.)\quad \frac{dy}{\sqrt{(fy)}}+\frac{\varepsilon\,dx}{\sqrt{(fx)}}=0$$

vorkommenden Variabeln und Constanten; d. h. dafs die Gleichung (16.) ihr Integral ist, da sie aus der Integralgleichung derselben abgeleitet wurde.

Es folgen hieraus, beiläufig bemerkt, die Formeln (12.) direct und ohne weitläuftige Rechnung, dadurch, dafs man nach Einführung der Gröfse $M=c^2-af$ die Gleichung

$$\left(\frac{\sqrt{(fy)}-\varepsilon\sqrt{(fx)}}{y-x}\right)^2-2D(y+x)-E(y+x)^2-M=0$$

durch Multiplication mit dem Factor

$$(y-x)^2\left\{\left(\frac{\sqrt{(fy+\varepsilon\sqrt{(fx)}}}{y-x}\right)^2-2D(y+x)-E(y+x)^2-M\right\}$$

rational macht, wodurch man folgende Ausdrücke erhält:

$$0=\left(\frac{fy-fx}{y-x}\right)^2-2\{M+2D(y+x)+E(y+x)^2\}(fy+fx)$$
$$+\{M+2D(y+x)+E(y+x)^2\}(y-x)^2.$$

Die Vergleichung derselben mit der Gleichung (3.) giebt die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
4(B^2-AM) &= aN,\\
2B(C-M)-4AD &= bN,\\
2C(C-M)-4BD &= cN,\\
(C-M)^2-4AE &= dN,\\
2D(C-M)-4BE &= eN,\\
4(D^2-EM) &= fN;
\end{aligned}$$

wo N ein Factor ist, den man durch die Vergleichung dieser Formeln mit den Gleichungen (8.) findet, wonach

$$N^2=4\{AD^2+EB^2+M(M-C)^2-4AEM-4BD(C-M)\}$$

ist und also die genaue Übereinstimmung mit den Formeln (11.) Statt findet.

§. 4.

Aus derselben rationalen Integralgleichung (3.) läfst sich das Integral der Differentialgleichung (17.) in einer andern Form ableiten, welche vor der eben gefundenen einen gewissen Vorzug hat. Zu dem Ende bilde man aus den Gleichungen (15.) folgende:

$$\pm\frac{x\sqrt{(fy)}-\varepsilon y\sqrt{(fx)}}{y-x} = \frac{x(Y_1+2Y_2x)-y(X_1+2X_2y)}{y-x},$$

welche, nach Substitution der Ausdrücke (2.) für X_1, X_2, Y_1, Y_2, die Form

$$\pm\frac{x\sqrt{(fy)}-\varepsilon y\sqrt{(fx)}}{y-x} = b+exy+d(y+x)$$

annimmt. Erhebt man beide Seiten dieser Gleichung zum Quadrat und subtrahirt davon die aus der Gleichung (3.) folgende Gleichung

$$0 = ad+2bd(x+y)+2cd(x+y)+d^2(x+y)^2+2dexy(x+y)+dfx^2y^2,$$

so erhält man

$$\left(\frac{x\sqrt{(fy)}-\varepsilon y\sqrt{(fx)}}{y-x}\right)^2 = (b^2-ad)+(e^2-df)y^2x^2+2(be-cd)yx.$$

Hieraus zeigt sich, mit Benutzung der Bezeichnung (8.), dafs der Ausdruck:

$$(18.)\qquad \frac{1}{yx}\left(\frac{x\sqrt{(fy)}-\varepsilon y\sqrt{(fx)}}{y-x}\right)^2-\frac{A}{yx}-Eyx = 2(be-cd),$$

also unabhängig von den Variabeln und Constanten der Differentialgleichung (17.) ist, d. h. dafs die Gleichung (17.), da sie aus der Integralgleichung derselben folgt, ein Integral derselben ist.

Aus der dritten Gleichung (8.) folgt der Zusammenhang zwischen den beiden willkürlichen Constanten der beiden Integrale (16. und 18.), indem die Differenz beider gleich der in der Differentialgleichung vorkommenden Constante C ist. Es läfst sich daher das letztere Integral auch dadurch aus dem erstern direct ableiten, dafs man von demselben die Gröfse C abzieht und das Resultat einer andern Constante gleich setzt. Dies bestätigt eine leichte Rechnung.

§. 5.

Setzt man in der Differentialgleichung (17.) und in den Integralen (16. und 18.)

$$x = m-\xi, \qquad y = m-v,$$

$$fm = A_1, \qquad -f'm = 2B_1,$$
$$\frac{1}{1.2}f''m = C_1, \qquad -\frac{1}{1.2.3}f'''m = 2D_1,$$
$$\frac{1}{1.2.3.4}f''''m = E_1 = E,$$
$$f(m-\xi) = A_1 + 2B_1\xi + C_1\xi^2 + 2D_1\xi^3 + E_1\xi^4 = f_1\xi,$$

so erhält man folgenden Satz:

„Das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dv}{\sqrt{(f_1 v)}} + \frac{\varepsilon d\xi}{\sqrt{(f_1\xi)}} = 0$$

läfst sich auf folgende zwei Formen bringen:

$$\left(\frac{\sqrt{(f_1 v)} - \varepsilon(f_1\xi)}{v-\xi}\right)^2 + (2D_1 + 4mE_1)(2m-v-\xi) - E_1(2m-v-\xi)^2 = \text{Const.} \text{ und}$$

$$\left\{\frac{(m-\xi)\sqrt{(f_1 v)} - \varepsilon(m-v)\sqrt{(f_1\xi)}}{(m-\xi)(m-v)(v-\xi)}\right\}^2 - \frac{f_1 m}{(m-\xi)(m-v)} - E_1(m-\xi)(m-v) = \text{Const.},$$

wo m eine ganz beliebige, von den in der Differentialgleichung vorkommenden Coëfficienten unabhängige Gröfse ist."

Die letztere dieser beiden Formen, aus welcher nach dem Obigen die erste direct abgeleitet werden kann, stimmt mit derjenigen überein, welche in der dritten Abhandlung 25ten Bandes d. J. für eine Function $f_1\xi$ vom $2n$ten Grade durch directe Integration des dazu gehörigen Systems von $n-1$ Differentialgleichungen, welches ich das *Jacobische System* genannt habe, gefunden ist, und welche aus dem *einen* Integral

$$x_1 x_2 \ldots x_n \left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{x_1 F'x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{x_2 F'x_2} + \cdots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{x_n F'x_n}\right\}^2 - \frac{A_0}{x_1 x_2 \ldots x_n} - A_{2n}x_1 x_2 \ldots x_n = C,$$

wo

$$fx = A_0 + 2A_1 x + A_2 x^2 \cdots + A_{2n}x^{2n},$$
$$Fx = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

gesetzt ist (S. a. a. O. §. 6.), eben so abgeleitet wird, wie ich das Integral (19.) aus dem Integral (18.) so eben entwickelte.

§. 6.

Im 32ten Bande d. J. S. 220 hat *Jacobi* durch eine eigenthümliche Benutzung des *Abel*schem Theorems auch eine Form der *rationalen Integralgleichungen* des so eben erwähnten Systems von $n-1$, von ihm daselbst *hyperelliptische* genannten Differentialgleichungen angegeben, welche mit der der *Euler*schen Grundgleichung (3.) die genaueste Analogie hat. Indem er

nämlich die Summe der Combinationen ohne Wiederholung zu je 1, je 2, je 3, etc. der n Variabeln

$$x_1, x_2, \ldots x_n,$$

zwischen denen die hyperelliptischen Differentialgleichungen

$$(19.)\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{(fx_2)}} + \cdots + \frac{dx_n}{\sqrt{(fx_n)}} = 0, \\ \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{(fx_2)}} + \cdots + \frac{x_n dx_n}{\sqrt{(fx_n)}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{x_1^{n-2} dx_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \frac{x_2^{n-2} dx_2}{\sqrt{(fx_2)}} + \cdots + \frac{x_n^{n-2} dx_n}{\sqrt{(fx_n)}} = 0 \end{cases}$$

bestehen, respective durch

$$u_1, u_2, u_3 \text{ etc.}$$

bezeichnet, zeigt er, dafs eine Gleichung zweiten Grades zwischen u_1 und u_2, mit fünf von einander unabhängigen Constanten, und $n-2$ lineäre Gleichungen zwischen u_1, u_2 und jeder der übrigen Gröfsen $u_3, \ldots u_n$, jede mit zwei von einander und von den übrigen unabhängigen Constanten, als ein vollständiges System rationaler Integralgleichungen des obigen Systems angesehen werden können, wenn man die $2n$ Verhältnisse der Coëfficienten

$$A_0, A_1, \ldots A_{2n}$$

aus den $3n-1$ Constanten gehörig bestimmt, oder umgekehrt aus den erstern und $n-1$ gehörigen Combinationen der $3n-1$ letztern, diese sucht.

Diese Bestimmung wird natürlich desto verwickelter, je gröfser n (die Anzahl der Variabeln) ist. Sie erfordert die Auflösung von zwei gesonderten Aufgaben, deren erstere darin besteht, die gegebene Function vom $2n$ten Grade:

$$(20.)\quad fx = A_0 + 2A_1 x + A_2 x^2 + 2A_3 x^3 \cdots + A_{2n} x^{2n},$$

durch die Form

$$(21.)\quad S^2 - RT$$

darzustellen, wo R, S, T ganze Functionen von x bezeichnen, die den $n$ten Grad nicht übersteigen; während die zweite Aufgabe darauf hinauskommt, aus diesen drei Functionen das gesuchte System rationaler Integralgleichungen des Systems Differentialgleichungen (19.) abzuleiten.

Für die erstere Aufgabe, welche offenbar eine unbestimmte ist, werde ich hier nur für den Fall $n = 2$ die Auflösung aus den obigen Formeln abschreiben, ohne den allgemeinen Fall, dessen Behandlung a. a. O. angedeutet ist, weiter zu berühren. Die letztere Aufgabe hingegen werde ich auf die

Weise vollständig lösen, dafs ich die $n-1$ Integralgleichungen selbst wirklich hinschreibe.

Hat man nämlich die drei genannten Functionen auf die a. a. O. vorgeschriebene Weise mit $n-1$ von den Coëfficienten

$$A_0, A_1, \ldots A_{2n},$$

unabhängigen Coëfficienten bestimmt, so ist das von *Jacobi* durch eine eigenthümliche Behandlung des *Abel*schen Theorems abgeleitete Theorem folgendes:

Die Differentialgleichungen (19.) werden dadurch vollständig integrirt, dafs man für $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n Wurzeln der Gleichung:

$$(22.) \qquad Ry^2 + 2Sy + T = 0$$

setzt; wo y eine ganz beliebige Gröfse ist.

Ich leite hieraus die $n-1$ Integralgleichungen selbst auf folgende Weise ab.

Die Gleichung (22.), nach x geordnet, sei folgende:

$$(23.) \qquad Y_0 x^n + Y_1 x^{n-1} + Y_2 x^{n-2} + \cdots + Y_n = 0,$$

wo im Allgemeinen

$$(24.) \qquad Y_{n-\varkappa} = A_{\varkappa,0} + A_{\varkappa,1} y + A_{\varkappa,2} y^2,$$

gesetzt ist und $A_{\varkappa,0}$, $A_{\varkappa,1}$, $A_{\varkappa,2}$ constante Gröfsen sind. Aus diesem System von $n+1$ Gleichungen, welche man aus (24.) dadurch erhält, dafs man

$$\varkappa = 0, = 1, \ldots = n$$

setzt, kann man offenbar durch die Elimination von y, $n-1$ Gleichungen zwischen den Gröfsen

$$\frac{Y_1}{Y_0}, \frac{Y_2}{Y_0}, \ldots \frac{Y_n}{Y_0}$$

ableiten. Zu dem Ende setze ich die Determinante der neun Gröfsen

$$\begin{matrix} A_{\varkappa,0}, & A_{\varkappa,1}, & A_{\varkappa,2}, \\ A_{\lambda,0}, & A_{\lambda,1}, & A_{\lambda,2}, \\ A_{\mu,0}, & A_{\mu,1}, & A_{\mu,2}, \end{matrix}$$

also den Ausdruck

$$(25.) \qquad \begin{aligned} A_{\varkappa,0}(A_{\lambda,1}A_{\mu,2} - A_{\lambda,2}A_{\mu,1}) + A_{\varkappa,1}(A_{\lambda,2}A_{\mu,0} - A_{\lambda,0}A_{\mu,2}) \\ + A_{\varkappa,2}(A_{\lambda,0}A_{\mu,1} - A_{\lambda,1}A_{\mu,0}) = \Delta_{(\varkappa,\lambda,\mu)}. \end{aligned}$$

Man erhält dann aus den Gleichungen

$$(26.) \qquad \begin{cases} Y_{n-\varkappa} = A_{\varkappa,0} + A_{\varkappa,1} y + A_{\varkappa,2} y^2, \\ Y_{n-\lambda} = A_{\lambda,0} + A_{\lambda,1} y + A_{\lambda,2} y^2, \\ Y_{n-\mu} = A_{\mu,0} + A_{\mu,1} y + A_{\mu,2} y^2 \end{cases}$$

folgende Formeln:

$$\Delta_{\varkappa,\lambda,\mu}\, y^2 = \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\varkappa,2}} Y_{n-\varkappa} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\lambda,2}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\mu,2}} Y_{n-\mu},$$

$$\Delta_{\varkappa,\lambda,\mu}\, y = \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\varkappa,1}} Y_{n-\varkappa} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\lambda,1}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\mu,1}} Y_{n-\mu},$$

$$\Delta_{\varkappa,\lambda,\mu} = \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\varkappa,0}} Y_{n-\varkappa} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\lambda,0}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\mu,0}} Y_{n-\mu};$$

wo die partiellen Differentialquotienten von $\Delta_{\varkappa,\lambda,\mu}$ der Kürze wegen eingeführt sind.

Hieraus erhält man die eine der gesuchten Gleichungsformen durch Elimination von y, nämlich:

$$(27.)\quad 0 = \left(\frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\varkappa,1}} Y_{n-\varkappa} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\lambda,1}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\mu,1}} Y_{n-\mu}\right)^2$$
$$-\left(\frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\varkappa,0}} Y_{n-\varkappa} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\lambda,0}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\mu,0}} Y_{n-\mu}\right)\left(\frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\varkappa,2}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\lambda,2}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \Delta_{\varkappa\lambda\mu}}{\partial A_{\mu,2}} Y_{n-\mu}\right).$$

Mit Hinzuziehung einer vierten Gleichung von der Form (24.)

$$Y_{n-\varrho} = A_{\varrho,0} + A_{\varrho,1} y + A_{\varrho,2} y^2$$

erhält man die andere gesuchte Gleichungsform

$$(28.)\quad 0 = \Delta_{\varkappa\lambda\mu} . Y_\varrho + \Delta_{\mu\varrho\varkappa} . Y_\lambda - \Delta_{\varrho\varkappa\lambda} . Y_\mu - \Delta_{\lambda\mu\varrho} . Y_\varkappa .$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen (27. und 28.)

$$\varkappa = 0,\quad \lambda = 1,\quad \mu = 2,$$
$$\varrho = 3,\ \text{oder} = 4,\ \ldots = n,$$

so erhält man alle $n-1$ gesuchten Gleichungen zwischen den Gröfsen

$$Y_0,\ Y_1,\ \ldots\ Y_n;$$

und hieraus, da aus der Gleichung (23.) folgt, dafs

$$-\frac{Y_1}{Y} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = u_1,$$

$$\frac{Y_2}{Y} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = u_2,$$

etc.

$$\pm\frac{Y_n}{Y} = x_1 x_2 \ldots x_n = u_n$$

ist, folgen die $n-1$ gesuchten Integralgleichungen in rationaler Form; nämlich

$$(29.)\quad 0 = \left(\frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{0,1}} u_2 - \frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{1,1}} u_1 + \frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{2,1}}\right)^2$$
$$-\left(\frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{0,0}} u_2 - \frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{1,0}} u_1 + \frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{2,0}}\right)\left(\frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{0,2}} u_2 - \frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{1,2}} u_1 + \frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{2,2}}\right),$$

$$(30.)\quad 0 = \pm \Delta_{012} . u_\varrho - \Delta_{2\varrho 0} . u_1 - \Delta_{\varrho 01} . u_2 - \Delta_{12\varrho};$$

wo $\varrho = 3, 4, \ldots n$ zu setzen und das obere Zeichen für ein ***gerades***, das untere für ein ***ungerades*** ϱ zu nehmen ist.

Ich werde jetzt im letzten Paragraph den Fall $n = 2$, welcher in den frühern Paragraphen auf andere Weise behandelt wurde, besonders betrachten und die sich hier ergebenden Resultate mit der ***Euler***schen Gleichung (3.) vergleichen.

§. 7.

In diesem Fall hat man die Formeln:

$$(31.)\quad \begin{cases} Y_2 = A_{00} + A_{01}y + A_{02}y^2, \\ Y_1 = A_{10} + A_{11}y + A_{12}y^2, \\ Y_0 = A_{20} + A_{21}y + A_{22}y^2, \end{cases}$$

$$(32.)\quad \begin{cases} R = A_{02} + A_{12}x + A_{22}x^2, \\ 2S = A_{01} + A_{11}x + A_{21}x^2, \\ T = A_{00} + A_{10}x + A_{20}x^2, \end{cases}$$

und die Gleichungen (22. und 23.) nehmen hier die Formen

$$(33.)\quad \begin{cases} 0 = Ry^2 + 2Sy + T \text{ und} \\ 0 = Y_0x^2 + Y_1x + Y_2 \end{cases}$$

an.

Man überzeugt sich hier von dem im vorigen Paragraph zum Grunde gelegten Satz sehr leicht auf folgendem directen Wege. Die beiden Wurzeln der zweiten Gleichung (33.) seien x_1 und x_2, während y einen und denselben Werth hat. Dann geben die durch die Substitution $x = x_1$, $x = x_2$, aus ihr hervorgehenden Gleichungen, nach x_1, x_2, und y differentiirt, folgende Ausdrücke:

$$(34.)\quad \begin{cases} 2(R_1y + S_1)dy + (2Y_0x_1 + Y_1)dx_1 = 0, \\ 2(R_2y + S_2)dy + (2Y_0x_2 + Y_1)dx_2 = 0; \end{cases}$$

wo R_1 und S_1, R_2 und S_2 die Functionen R und S nach den Substitutionen bezeichnen.

Andrerseits giebt die Auflösung der Gleichungen (33.) die Formeln

$$2Y_0x_1 + Y_1 = \pm\sqrt{(Y_1^2 - 4YY_2)},$$
$$2Y_0x_2 + Y_1 = \mp\sqrt{(Y_1^2 - 4YY_2)};$$

wo die obern und die untern Zeichen in beiden Gliedern rechts zusammengehören und

$$(35.)\quad \begin{cases} (R_1y + S_1) = \pm\sqrt{(S_1^2 - R_1T_1)}, \\ (R_2y + S_2) = \pm\varepsilon\sqrt{(S_2^2 - R_2T_2)}; \end{cases}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, je nachdem das rationale Product

$$(36.)\quad (R_1y + S_1)(R_2y + S_2)$$

positiv oder negativ ist. Man erhält hiernach aus den Gleichungen (34.) folgende:

$$\frac{2.dy}{\sqrt{(Y_1^2-4YY_2)}} = \pm\frac{dx_1}{\sqrt{(S_1^2-R_1T_1)}},$$

$$-\frac{2.dy}{\sqrt{(Y_1^2-4YY_2)}} = \pm\frac{\varepsilon dx_2}{\sqrt{(S_2^2-R_2S_2)}},$$

deren Addition die Differentialgleichung

$$(37.)\qquad \frac{dx_1}{\sqrt{(S_1^2-R_1T_1)}}+\frac{\varepsilon dx_2}{\sqrt{(S_2^2-R_2S_2)}} = 0$$

giebt.

Es ist noch zu bemerken, dafs sich das Product (36.) als eine rationale Function von y allein, deren Nenner Y_0^2 ist und deren Zähler den sechsten Grad nicht übersteigt, darstellen läfst. Das Zeichen derselben für jeden angenommenen Werth von y bestimmt die Gröfse ε.

Die zu dieser Differentialgleichung auf diesem Wege bestimmte Integralgleichung erhält man aus der Gleichung (29.), wenn man darin

$$u_1 = x_1+x_2, \qquad u_2 = x_1x_2$$

setzt und sonst die dortige Bezeichnung beibehält. Sie ist offenbar von derselben Form wie die *Euler*sche (3.) und giebt daher, eben so wie letztere in §. 1. behandelt, die Differentialgleichung (37.). Die Verwickelung, welche bei der Ausführung dieser Rechnung sich zeigt, wird dadurch vermieden, dafs man die Function fx, welche unter dem Quadratwurzelzeichen vorkommt, nach (§. 2.) bestimmt. Man sieht dann leicht, dafs dieselbe, bis auf einen constanten Factor, mit der Function

$$S^2-RT$$

(also mit der angenommenen Function vom 4ten Grade) übereinstimmt und dafs man daher zu der Gleichung (37.) gelangt.

In der That: macht man in der Gleichung (29.) die in (§. 2.) vorgeschriebenen Substitutionen

$$u_1 = \frac{x''}{x'}, \qquad u_2 = \frac{x'''}{x'},$$

und multiplicirt das Resultat mit $x'x'$, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$(38.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\Delta_{012}}{\partial A_{00}}x'''-\frac{\partial\Delta_{012}}{\partial A_{10}}x''+\frac{\partial\Delta_{012}}{\partial A_{20}}x' = P, \\ \frac{\partial\Delta_{012}}{\partial A_{01}}x'''-\frac{\partial\Delta_{012}}{\partial A_{11}}x''+\frac{\partial\Delta_{012}}{\partial A_{21}}x' = \Sigma, \\ \frac{\partial\Delta_{012}}{\partial A_{02}}x'''-\frac{\partial\Delta_{012}}{\partial A_{12}}x''+\frac{\partial\Delta_{012}}{\partial A_{22}}x' = T \end{cases}$$

gesetzt und die Variabeln y', y'', y''' nach Vorschrift der Formeln (12.) eingeführt werden, die Gleichungen

$$\frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{02}} P - 2\frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{01}} \Sigma + \frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{00}} T = + P.y',$$

$$\frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{12}} P - 2\frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{11}} \Sigma + \frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{10}} T = - P.y'',$$

$$\frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{22}} P - 2\frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{21}} \Sigma + \frac{\partial \Delta_{012}}{\partial A_{20}} T = + P.y''',$$

welche aus der ternären Form

$$\Sigma^2 - PT$$

folgen und deren Auflösung folgende Ausdrücke giebt:

$$(39.) \quad \begin{cases} A_{00}y''' - A_{10}y'' + A_{20}y' = + \Pi.P, \\ A_{01}y''' - A_{11}y'' + A_{21}y' = -2\Pi.\Sigma, \\ A_{02}y''' - A_{12}y'' + A_{22}y' = + \Pi.T; \end{cases}$$

wo Π, eben wie vorhin P, ein constanter Factor ist. Setzt man nun nach (§. 2.) hierin

$$y' = x^2, \quad y'' = -x, \quad y''' = 1,$$

um aus der Form

$$\Sigma^2 - PT$$

die dortige Function fx abzuleiten, so gelangt man offenbar zu dem Ausdrucke

$$\frac{1}{\Pi^2}\cdot(S^2 - RT);$$

was sich aus den Formeln (32. und 39.) ergiebt; w. z. b. w.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, diese letztere Function, also

$$(40.) \quad \tfrac{1}{4}(A_{01} + A_{11}x + A_{21}x^2)^2 - (A_{00} + A_{10}x + A_{20}x^2)(A_{02} + A_{12}x + A_{22}x^2)$$

auf die gegebene Form

$$A_0 + 2A_1x + A_2x^2 + 2A_3x^3 + A_4x^4$$

zu bringen. Unter den verschiedenen Arten, diese unbestimmte Aufgabe zu lösen, werde ich diejenige benutzen, welche sich aus den obigen Formeln (§. 2.) von selbst ergiebt.

Zu dem Ende setze man

$$(41.)\quad \begin{cases} A_0 = A, \quad A_1 = B, \quad A_2 = C, \quad A_3 = D, \quad A_4 = E, \\ A_{00} = a \qquad\quad = B^2 - AM, \\ A_{01} = A_{10} = 2b \;= -(2AD + B(M-C)) \\ A_{02} = A_{20} = \;\; d \;= \tfrac{1}{2}(M-C)^2 - AE, \\ A_{11} = 2(c+d) \;= -2(AE + BD) - \tfrac{1}{2}(M^2 - C^2), \\ A_{12} = A_{21} = 2e \;= -(2BE + D(M-C)), \\ A_{22} = f \qquad\quad = A^2 - EM. \end{cases}$$

Dann geht die Function (40.) in folgende über:

$$(b + (c+d)x + ex^2)^2 - (a + 2bx + dx^2)(d + 2ex + fx^2),$$

welche, bis auf einen constanten Factor, mit

$$A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4,$$

wie eben gezeigt, übereinstimmt. Man sieht daher, dafs die jetzige Methode in diesem Fall zu der Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \frac{\varepsilon\, dx_2}{\sqrt{(fx_2)}} = 0$$

die rationale Integralgleichung giebt, welche aus (29.) durch die Substitutionen (41.) folgt. Sie ist,

$$x_1 + x_2 = u_1, \qquad x_1 x_2 = u_2$$

gesetzt, folgende:

$$\begin{aligned} 0 = {} & ((ed - bf)u_2 + \tfrac{1}{2}(d^2 - af)u_1 + bd - ae)^2 \\ & - \{((c+d)f - 2e^2)u_2 + (bf - de)u_1 + 2be - d(c+d)\} \\ & \times \{(2be - d(1+d))u_2 + (ae - bd)u_1 + a(c+d) - 2b^2\}, \end{aligned}$$

wenn man darin die Buchstaben A, B, etc. M einführt, und entsteht aus der *Euler*schen, welche man durch Einführung derselben Buchstaben in die Gleichung (3.) erhält, dadurch, dafs man in letzterer an die Stelle von M eine gehörige Function von M und von den Buchstaben A, B, ... einführt.

Es ist hieraus leicht zu sehen, dafs die directe Behandlung der *Euler*schen Gleichung (3.) auf eine einfachere Weise zum Ziele führt, als die hier vorgetragene.

Die *analoge, directe* Behandlung der auf die Form

$$a + 2bu_1 + 2cu_2 + du_1^2 + 2eu_1u_2 + fu_2^2 = 0,$$

$$u_\varrho = g_\varrho u_1 + h_\varrho u_2 + i_\varrho$$

gebrachten Gleichungen (29. und 30.), mit den $3n$ willkürlichen Constanten

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f;\ g_\varrho,\ h_\varrho,\ i_\varrho,$$

wo $\varrho = 3, 4, \ldots n$ zu setzen ist, und deren Anzahl die $2n+1$ in dem zugehörigen System Differentialgleichungen (19.) vorkommenden Constanten um $n-1$ übertrifft, also zur vollständigen Integration hinreicht, werde ich bei einer andern Gelegenheit weiter verfolgen.

Königsberg, den 16. Januar 1852.

18.

Über Kreiscoordinaten.

(Von Herrn Dr. *W. Stammer* aus Luxemburg, Candidaten des höhern Schulamts.)

Die Idee zu dem Coordinatensysteme, dem Gegenstande dieser Abhandlung, verdanke ich meinem verehrten Lehrer, dem Herrn Professor ***Plücker*** zu ***Bonn***, welcher sie seinen Zuhörern im Sommer 1847 mittheilte. Ich benutzte sie zu meiner Doctordissertation im März 1849 und erlaube mir hier den Haupt-Inhalt der Dissertation zu geben; mir vorbehaltend, gelegentlich Ferneres über das Kreis-Coordinatensystem mitzutheilen; was dann vielleicht zu interessanten Resultaten führen dürfte.

1.

Die Coordinaten eines Puncts M (Fig. 1.) werden auf folgende Weise bestimmt.

Aus dem Puncte M lege man an einen gegebenen festen Kreis AFB, in dessen Ebene, die beiden Tangenten MA, MB. Ist dann noch auf dem Umkreise ein fester Punct F gegeben, so sind die Bogen FA und FB zwischen dem festen Puncte F und den zwei Berührungspuncten A und B bestimmt. Diese beiden Bogen sind die *Kreiscoordinaten des Puncts* M; der Punct F ist ihr Anfangspunct, und ξ soll die von F an *links*, η die *rechts* gemessenen Bogen bezeichnen.

Nimmt man diese Coordinatenbestimmung in ihrer Allgemeinheit, so ist ξ nicht blofs der Bogen AF, und η nicht blofs der Bogen BF, sondern es kann auch der Bogen FAB mit ξ und der Bogen FBA mit η bezeichnet werden; auch können die Bogen in beiden Fällen um eine beliebige Anzahl von Umkreisen vermehrt werden, ohne aufzuhören, die Coordinaten des Puncts M zu sein. Hieraus folgt, dafs, wenn der Kreis und sein fester Punct F gegeben sind, *jeder aufserhalb* liegende Punct durch seine Coordinaten vollkommen bestimmt wird, dafs aber im Allgemeinen jedem Puncte M zweimal unendlich viele Paare von Coordinaten mit denselben Endpuncten zukommen. Welche von diesen Coordinaten zu nehmen sind, hangt von den jedesmaligen besondern Bestimmungen ab; wie es die Folge zeigen wird.

Um die *trigonometrischen Functionen* unmittelbar auf die Kreiscoordinaten anwenden zu können, ohne die Bogen erst durch den Radius zu dividiren, nehme man zu Coordinaten nicht die Bogen selbst, sondern die durch sie bestimmten *Mittelpunctswinkel*, und nur da, wo keine Anwendung der trigonometrischen Functionen Statt findet, die Bogen selbst.

2.

Die *Transformation* der Kreiscoordinaten ist sehr einfach. Zum Anfangspuncte der gewöhnlichen *Orthogonalcoordinaten* nehme man den Mittelpunct C des Kreises, und zur Axe der Y den durch F gehenden Durchmesser. Es sei R der Halbmesser des Kreises; x, y seien die Coordinaten des Puncts M; x', y', x'', y'' die Coordinaten der beiden Berührungspuncte A und B: dann ist immer, welche Bestimmung man auch über die Kreiscoordinaten machen möge:

$$x' = -R\sin\xi, \qquad y' = R\cos\xi,$$
$$x'' = +R\sin\eta, \qquad y'' = R\cos\eta.$$

Die Gleichungen der Tangenten in beiden Puncten sind

$$x'x + y'y = R^2, \qquad x''x + y''y = R^2,$$

mithin ist, wenn man für x', x'', y', y'' ihre Ausdrücke substituirt:

$$-xR\sin\xi + yR\cos\xi = R^2,$$
$$+xR\sin\eta + yR\cos\eta = R^2,$$

folglich

$$x = R\frac{\sin\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)},$$

$$y = R\frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)}.$$

Ferner ist

$$ACM = \tfrac{1}{2}(\eta+\xi); \qquad FCM = \tfrac{1}{2}(\eta+\xi) - \xi = \tfrac{1}{2}(\eta-\xi);$$
$$r = CM = \text{rad. vect.} = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)}.$$

Hieraus ergiebt sich umgekehrt, wenn man das eine Mal den Ausdruck von x durch den Ausdruck von y dividirt, das andere Mal beide zum Quadrat erhebt und addirt:

$$\eta = \text{ang tang}\frac{1}{R}\sqrt{(x^2+y^2-R^2)} + \text{ang tang}\frac{x}{y},$$

$$\xi = \text{ang tang}\frac{1}{R}\sqrt{(x^2+y^2-R^2)} - \text{ang tang}\frac{x}{y}.$$

Dafs das Kreiscoordinatensystem für ***alle innerhalb*** des Kreises liegende Puncte keine reelle Coordinaten giebt, folgt aus den zuletzt aufgestellten Gleichungen. Alle ***auf dem Umkreise*** befindlichen Puncte müssen der Gleichung

$$\xi + \eta = 2n\pi$$

genügen.

3.

Die Gleichung einer ***geraden Linie*** (Fig. 2.) in Orthogonal-Coordinaten sei

$$y = cx + d.$$

Es bezeichne P die Länge des aus dem Mittelpunct auf die gegebene Gerade NQ gefällten Perpendikels CH, und ω den von rechts nach links (von der positiven Richtung der y Axe nach der negativen Richtung der x Axe) gemessenen Winkel FCH, welchen das Perpendikel mit der Ordinaten-Axe bildet. Dann ist

$$c = \operatorname{tang} NEX = \operatorname{tang} NEC = \operatorname{tang} \omega,$$

$$d = CG = \frac{P}{\cos \omega}.$$

Dadurch wird die Gleichung der Geraden zu

$$R \frac{\cos \frac{1}{2}(\eta - \xi)}{\cos \frac{1}{2}(\eta + \xi)} = R \frac{\sin \frac{1}{2}(\eta - \xi)}{\cos \frac{1}{2}(\eta + \xi)} \operatorname{tang} \omega + \frac{P}{\cos \omega},$$

und daraus ergiebt sich

$$R \cos\left[\tfrac{1}{2}(\eta - \xi) + \omega\right] = P \cos \tfrac{1}{2}(\eta + \xi)$$

oder

$$\frac{\cos\left[\frac{1}{2}(\eta + \xi) + \omega\right]}{\cos \frac{1}{2}(\eta + \xi)} = \frac{P}{R}.$$

Die ***Durchschnittspuncte*** der geraden Linie mit dem Kreise giebt die Gleichung

$$\cos(\eta + \omega) = \frac{P}{R}.$$

Für die ***Tangente*** des Kreises im Puncte $\eta' = \omega$ ist

$$P = R, \quad \text{daher} \quad \tfrac{1}{2}(\eta - \xi) - \eta' = 2n\pi \pm \tfrac{1}{2}(\eta + \xi),$$

also

$$\xi = -(2n\pi + \eta')$$

oder

$$\eta = 2n\pi + \eta';$$

d. h. die eine der beiden Coordinaten mufs constant werden.

Die Gleichung einer Geraden, welche durch den gegebenen Punct ξ', η' geht, findet man, wenn man die beiden Ausdrücke von $\frac{P}{R}$, deren einer die laufenden Coordinaten ξ, η, der andere die gegebenen Coordinaten ξ', η' enthält, *gleich* setzt. Dies giebt

$$\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} - \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta'-\xi')}{\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')}\right]\operatorname{tang}\omega = \frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} - \frac{\cos\frac{1}{2}(\eta'-\xi')}{\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')};$$

daher hat eine Gerade, welche durch die beiden Puncte $\xi', \eta', \xi'', \eta''$ geht, die Gleichung

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\omega &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\eta'-\xi')\cos\frac{1}{2}(\eta''+\xi'') - \cos\frac{1}{2}(\eta''-\xi'')\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')}{\sin\frac{1}{2}(\eta'-\xi')\cos\frac{1}{2}(\eta''+\xi'') - \sin\frac{1}{2}(\eta''-\xi'')\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')}\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta''+\eta')\sin\frac{1}{2}(\xi''-\xi') + \sin\frac{1}{2}(\eta''-\eta')\sin\frac{1}{2}(\xi''+\xi')}{\cos\frac{1}{2}(\eta''+\eta')\sin\frac{1}{2}(\xi''-\xi') + \sin\frac{1}{2}(\eta''-\eta')\cos\frac{1}{2}(\xi''+\xi')}.\end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung, so erhält man die Gleichung der Geraden in $\xi, \eta, \xi', \eta', \xi'', \eta''$.

Die Gerade, welche durch den *Mittelpunct* geht, ist

$$\eta - \xi = (2n+1)\pi - 2\omega.$$

Setzt man in der allgemeinen Gleichung der Geraden

$$\omega = 0,$$

so erhält man zur Gleichung einer auf dem Halbmesser CF *senkrechten* Linie:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = \frac{P}{R}.$$

Verbindet man M mit C (Fig. 3.), zieht die Tangenten MA, MB, fället aus A und F die Perpendikel AV, QFW auf CM und zieht durch C und A die CA, welche die F in Q schneidet, so ergiebt sich, wo auch der Punct M auf der Geraden SM angenommen werden mag:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\eta-\xi) &= FCM,\\ \tfrac{1}{2}(\eta+\xi) &= ACM;\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}CV &= R\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi),\\ CW &= R\cos\tfrac{1}{2}(\eta-\xi);\end{aligned}$$

also

$$\frac{CV}{CW} = \frac{R}{P};$$

aber auch

$$CW = CQ\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi),$$

mithin

$$CQ = \frac{CW}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = R\frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = P = CK.$$

Also beschreibt der Punct Q einen ***concentrischen Kreis***, wenn M auf SK fortrückt.

4

Die Gleichung des ***Kreises***, welcher ϱ zum Radius und ξ', η' zu Mittelpunctscoordinaten hat, ist

$$\frac{1}{[\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)]^2} + \frac{1}{[\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')]^2} - \frac{2\cos\frac{1}{2}[\eta-\eta'-(\xi-\xi')]}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')} = \frac{\varrho^2}{R^2};$$

wie es sich unmittelbar durch die Substitution der Kreiscoordinaten in die Gleichung in Orthogonalcoordinaten ergiebt.

Verlegt man den Mittelpunct dieses Kreises in den Punct F, d. h. macht $\eta' = \xi' = 0$, und setzt ferner $\varrho = R$, so erhält man

$$\cos\eta = 1 - \cos\xi = \text{sin vers}\,\xi;$$

welche Gleichung der Ausspruch eines (mir wenigstens bis dahin unbekannten) Theorems über die Kreise ist. Auf die Figur (Fig. 4.) bezogen, heifst dies

$$CD = KF \quad \text{oder} \quad CK = DF.$$

Die Gleichung eines concentrischen Kreises mit dem Mittelpunct C und dem Radius ϱ ist (wenn man von der Gleichung $x^2+y^2=\varrho^2$ ausgeht):

$$\eta+\xi = 2\,\text{ang cos}\left(\pm\frac{R}{\varrho}\right),$$

also von der Form

$$\xi+\eta = \text{const.},$$

und für den Coordinatenkreis selbst:

$$\xi+\eta = 2n\pi;$$

wie oben (2.).

5.

Dafs umgekehrt die eben gefundenen Gleichungen nur die geometrischen ***Örter*** darstellen, für welche sie abgeleitet wurden, läfst sich eben so leicht mit Hülfe der Transformationsformeln, als direct an der Figur nachweisen. So stellt

$$\eta = \xi$$

den Durchmesser des Puncts F dar. Die Gleichung

$$\eta = \xi + \text{const.}$$

bedeutet eine Gerade, welche durch den Mittelpunct geht.

$$\eta = -\xi + \text{const.}$$

ist ein mit dem gegebenen Kreise concentrischer Kreis vom Radius $\frac{R}{\cos\frac{1}{2}c}$. Wird hier $c=0$ gesetzt, so drückt

$$\eta = -\xi$$

den Coordinatenkreis selbst aus. Schliefst man jedoch aus irgend einem Grunde die *negativen* Coordinaten aus (S. weiter unten), so kann diese Gleichung nur durch $\xi=0$, $\eta=0$ erfüllt werden, so dafs sie dann nur mehr den Punct F bezeichnet, während die übrigen Puncte des Kreises durch $\eta=-\xi+2n\pi$ ausgedrückt werden.

Es haben also diese Formeln dieselbe Allgemeinheit, und zugleich dieselbe Bestimmtheit, wie die Formeln mit andern Coordinatensystemen.

6.

Wir wollen jetzt die Curve untersuchen, welche durch die allgemeine Gleichung vom *ersten* Grade

$$\eta = a\xi + b$$

ausgedrückt wird.

Um zunächst die Bedeutung der Constanten a und b zu finden, setze man $\xi=0$; welches $\eta=b$, giebt. D. h.: b ist ein von links nach rechts gemessener Bogen (oder Winkel). Macht man dagegen $\eta=0$, so wird a zu $-\frac{b}{\xi}$, mithin zu dem Verhältnifs zweier Bogen, also zu einer *absoluten Zahl*. Diese Zahl soll im Allgemeinen durch a bezeichnet werden; dann aber, wenn nothwendig die Bruchform berücksichtigt werden mufs, soll sie $\frac{\mu}{\nu}$ heifsen, wo μ und ν ***relative Primzahlen*** sind, so dafs der Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist.

Verschiebt man den Anfangspunct der Coordinaten nach rechts um den Bogen $\frac{b}{a+1}$, so geht η in $\eta+\frac{b}{a+1}$ und ξ in $\xi-\frac{b}{a+1}$ über, und die Gleichung wird zu

$$\eta = a\xi.$$

Es ist daher nur diese einfachere Form zu betrachten nöthig.

Die Transformation ist immer möglich, aufser wenn $a=-1$, weil dann $\frac{b}{a+1}=\infty$ ist. In der That bedeutet die Gleichnng $\eta=-1.\xi+b$ einen mit dem Coordinatenkreise concentrischen Kreis, welcher also keinen Punct mit ihm gemein hat, während der geometrische Ort $\eta=a\xi$ wenigstens den Punct F, d. h. $\xi=0$, $\eta=0$, mit dem Coordinatenkreise gemein haben

mufs. Diesen Fall kann man aufser Acht lassen, weil es nicht nöthig ist, den ***Kreis*** zu discutiren. Eben so kann der Fall $a = +1$ ausgeschlossen werden, weil er den ***Durchmesser*** giebt. Ferner sind nur diejenigen Werthe von a zu berücksichtigen nöthig, die numerisch gröfser sind als 1; denn wenn dies nicht der Fall ist, so reicht eine blofse Vertauschung der Coordinaten hin, um den Coëfficienten von ξ numerisch gröfser als 1 zu machen. Führt man endlich noch die Beschränkung ein, nur *reelle* Coordinaten zu beachten, so fallen auch alle *imaginären* Werthe von a weg. Es sind also in der Gleichung $\eta = a\xi$ nur die Werthe von a zu berücksichtigen, welche entweder zwischen $+1$ und $+\infty$, oder zwischen -1 und $-\infty$ liegen. Wir wollen zunächst die Curve für ein *positives* a untersuchen.

7.

Die Untersuchung der Gleichung der Curve in Orthogonalcoordinaten mag einstweilen verschoben bleiben, um später eine Vergleichung anzustellen. Es mag jetzt nur die Gleichung

$$\eta = a\xi$$

im Kreiscoordinatensystem discutirt werden.

Zuvörderst ist zu bemerken, dafs für *positive* a nur *positive* Coordinaten zu berücksichtigen sind. Wäre nämlich ξ ***negativ***, so wäre es auch η. Dann braucht man nur

$$\xi' = 2n\pi + \xi, \quad \eta' = 2an\pi + \eta$$

oder, wenn a ein Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ ist,

$$\xi' = 2n\nu\pi + \xi, \quad \eta' = 2\mu n\pi + \eta$$

zu setzen und dabei n so grofs anzunehmen, dafs η' und ξ' ***positiv*** werden. Dies giebt

$$\eta' = a\xi'.$$

Da nun die Endpuncte von η', ξ' auf die Endpuncte von η, ξ fallen, so folgt, dafs η', ξ' die positiven Coordinaten desselben Puncts der Curve sind, dessen negative Coordinaten η, ξ waren.

8.

Die Puncte, in welchen die Curve den Kreis trifft, erhält man durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$\eta = a\xi, \quad \xi = -\xi + 2n\pi.$$

Also ist $\xi = \frac{2n\pi}{a+1}$, oder allgemeiner $\xi = \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu}$.

Der erste dieser Puncte ist $\xi = 0$, $\eta = 0$ für $n = 0$; die übrigen finden sich, wenn der Umkreis von rechts nach links durchlaufen wird, indem man immer Bogen von $\frac{2\nu}{\mu+\nu}\pi$ abträgt, d. h dem n im obigen Ausdrucke alle ganzen Werthe von 0 an giebt.

Sollen zwei von diesen Puncten *auf einander* fallen, so mufs

$$\frac{v.\nu}{\mu+\nu}2\pi = \frac{t.\nu}{\mu+\nu}\cdot 2\pi + 2r\pi,$$

also

$$r = \frac{(v-t)\nu}{\mu+\nu}$$

sein. Da hier ν zu μ, also auch zu $\mu+\nu$ eine relative Primzahl ist, so kann r nur dann eine *ganze* Zahl sein, wenn $v-t$ durch $\mu+\nu$ theilbar ist; und da t nicht negativ ist, so folgt, dafs v wenigstens gleich $\mu+\nu$ sein mufs. Alle Puncte, für welche $v > \mu+\nu$ ist, fallen auf schon construirte Puncte; mithin ist $\mu+\nu$ die Anzahl aller dem Kreise und der Curve gemeinschaftlicher Puncte. Um die Curve nach obiger Angabe in Bezug auf ihre ξ Coordinaten zu construiren, ist der Umkreis ν mal zu durchlaufen. Beachtet man, dafs der Bruch $\frac{n\nu}{\mu+\nu}$, wenn man dem n nach einander alle ganzen Werthe von 0 bis $\mu+\nu-1$ beilegt, die Zahlen 1 bis $\mu+\nu$ zu Resten giebt, so läfst sich leicht zeigen, dafs je zwei unmittelbar nebeneinander liegende Puncte um den Bogen $\frac{2\pi}{\mu+\nu}$ von einander abstehen, also alle die Puncte zusammen den Umkreis in $\mu+\nu$ gleiche Theile theilen.

Da in diesen Puncten, welche der Kreis mit der Curve gemein hat, der Kreis, wie sich später finden wird, von der Curve *berührt* wird, so sollen sie der Kürze wegen *Contactpuncte* heifsen.

9.

Um die ξ Coordinaten sämmtlicher Puncte der Curve der Reihe nach zu construiren, ist es hinreichend, den Umkreis ν mal zu durchlaufen. Denn gäbe es einen Punct ξ', η', für welchen $\xi' > 2\nu\pi$, also $\eta' > 2\mu\pi$ wäre, so wäre der Endpunct von ξ' zugleich der Endpunct von ν Coordinaten ξ, welche sämmtlich kleiner sind als $2\nu\pi$, und η' von μ Coordinaten $\eta < 2\mu\pi$. Bezeichnet man diese kleineren Coordinaten durch ξ'', η'', so ist

$$\xi' = \xi'' + 2m\pi,$$

also

$$\eta' = \frac{\mu}{\nu}\xi' = \frac{\mu}{\nu}\xi'' + 2\frac{\mu}{\nu}m\pi = \eta'' + 2\frac{\mu}{\nu}m\pi.$$

Hier kann man, da $\xi' > 2\nu\pi$, $\xi'' < 2\nu\pi$ ist, das m einem solchen Vielfachen von ν gleich setzen, dafs dadurch $\eta'' < 2\mu\pi$ wird. Setzt man dann $m = r\nu$, so ergiebt sich

$$\eta' = \eta'' + 2r\mu\pi.$$

Es werden also hierdurch zwei zusammengehörige Coordinaten η'', ξ'' so bestimmt, dafs sie innerhalb der angegebenen Grenzen liegen und zugleich ihre Endpuncte dieselben sind, wie die der Coordinaten η', ξ'; dafs also auch der Punct ξ', η' auf den Punct ξ'', η'' fällt.

Umgekehrt ist es ***nothwendig***, dafs der Umkreis ν mal durchlaufen werde. Sollen nämlich zwei Puncte, deren Coordinaten ξ', η' und ξ'', η'' innerhalb dieser Grenzen liegen, auf einander fallen, so kann es auf zweierlei Weise geschehen.

A. Es mufs

$$\xi'' = \xi' + 2m\pi, \quad \eta'' = \eta' + 2n\pi$$

sein. Dann wird

$$\frac{\mu}{\nu}(\xi' + 2m\pi) = \frac{\mu}{\nu}\xi' + 2n\pi,$$

also

$$n = \frac{\mu}{\nu}m.$$

Dann müfste also m ein ganzes Vielfaches von ν sein, während, der Annahme nach, $\xi'' < 2\nu\pi$, mithin $m < \nu$ ist.

B. Es könnte auch

$$\xi'' = 2m\pi - \eta', \quad \eta'' = 2n\pi - \xi'$$

sein. Dann wird

$$\frac{\mu}{\nu}\left(2m\pi - \frac{\mu}{\nu}\xi'\right) = 2n\pi - \xi',$$

$$\xi' = 2\frac{m\mu - n\nu}{\mu^2 - \nu^2}\nu\pi.$$

Da aber μ, ν, m, n ***ganze*** Zahlen sind, und zwar μ und ν gegeben, so lassen sich aus dieser Formel für ξ' nur eine bestimmte Zahl von Werthen finden. Es sind also nur ***einzelne*** Puncte, und zwar, da sie bei der Construction der Curve zweimal berührt werden, ***Doppelpuncte***.

Hieraus folgt, dafs jeder Punct des Umkreises der Endpunct von ν Coordinaten ξ und von μ Coordinaten η ist, also bei der Construction der Curve

$\mu + \nu$ mal vorkommt, also dafs jede Tangente des Kreises die Curve in $\mu + \nu$ Puncten schneidet.

10.

Sind ξ', η' die Coordinaten irgend eines Puncts der Curve, so giebt es immer einen andern Punct ξ'', η', von der Art, dafs zugleich

$$\xi'' = 2\nu\pi - \xi', \quad \eta'' = 2\mu\pi - \eta'$$

ist; denn dann wird auch $\eta'' = \frac{\mu}{\nu}\xi''$. Die geometrische Deutung hiervon ist, dafs jedem Puncte der Curve ein anderer Punct derselben Curve entspricht, welcher zu ihm *symmetrisch* liegt, in Bezug auf den Durchmesser CF. Dieser Durchmesser theilt also die Curve in zwei gleiche Theile, welche sich decken, wenn man den einen Theil um den Durchmesser als Axe dreht. Es wird deshalb dieser Durchmesser ***Hauptdurchmesser*** heifsen.

Verlegt man den Anfangpunct der Coordinaten in einen andern ***Contactpunct***, so geht dadurch ξ in $\xi' + \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu}$ und η in $\eta' - \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu}$ über; also wird die Gleichung der Curve zu

$$\eta' - \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu} = \frac{\mu}{\nu}\xi' + \frac{2n\mu\pi}{\mu+\nu}$$

oder zu

$$\eta' = \frac{\mu}{\nu}\xi' + 2n\pi.$$

Diese Gleichung giebt aber keine andern Puncte als die Gleichung

$$\eta' = \frac{\mu}{\nu}\xi'.$$

Folglich spielt jeder ***Contactpunct*** in Bezug auf die Curve dieselbe Rolle, wie der ***Anfangspunct*** der Coordinaten. Hieraus folgt, dafs die Curve durch die Verbindungslinien der Contactpuncte mit dem Mittelpunct, in $\mu + \nu$ gleiche Theile getheilt wird, welche sich durch Drehung um den Mittelpunct decken, und dafs ferner jede einzelne dieser Verbindungslinien die Curve in zwei gleiche und *symmetrisch* liegende Theile theilt.

11.

Man verfolge jetzt den Lauf der Curve, so wie sie aus der Construction der Gleichung hervorgeht (Fig. 6.).

Ihr erster Punct ist offenbar der Anfangspunct der Coordinaten, für welchen $\xi = 0$, $\eta = 0$ ist. Wächst nun der Bogen ξ stetig, so wächst auch $a\xi$ oder η stetig; es rücken also auch die beiden Tangenten, welche zur

Construction dienen, stetig fort; folglich bilden ihre Durchschnittspuncte eine *stetige* Curve. Dieselbe wendet sich nach rechts, weil $\eta > \xi$ ist. Ihr Radiusvector ist nach (2.)

$$r = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(a+\xi)},$$

wächst also continuirlich von 0 bis ∞, während ξ von 0 bis $\frac{\pi}{a+1}$ wächst. Für $\xi = \frac{\pi}{a+1}$ werden die beiden Constructionstangenten *parallel:* also liegt der entsprechende Punct der Curve im Unendlichen.

Alle die Puncte der Curve, für welche $\xi < \frac{\pi}{a+1}$ ist, liegen auf derselben Seite des Durchmessers LS, welcher durch die Endpuncte von $\xi = \frac{\pi}{a+1}$ und $\eta = \frac{a\pi}{a+1}$ geht, weil die Summe der Winkel, welche dieser Durchmesser mit den beiden Constructionstangenten macht, immer kleiner ist als zwei Rechte. So wie aber $\xi > \frac{\pi}{a+1}$ wird, tritt die Curve durch das Unendliche auf die andere Seite hinüber; und zwar ist leicht zu sehen, dafs das Stück der Curve, für welches ξ zwischen $\frac{\pi}{a+1}$ und $\frac{2\pi}{a+1}$ ist, in Bezug auf den Durchmesser symmetrisch zu dem Stücke liegt, für welches ξ zwischen 0 und $\frac{\pi}{a+1}$ fällt. Wächst also ξ von $\frac{\pi}{a+1}$ bis $\frac{2\pi}{a+1}$, so kommt die Curve wieder aus dem Unendlichen zurück, nähert sich dem Kreise und trifft ihn im Puncte $\xi = \frac{2\pi}{a+1}$. Wächst dann ξ weiter bis $\frac{3\pi}{a+1}$, so ergiebt sich ein Stück, welches gleich und gleichliegend ist mit dem zuerst gebildeten Stücke $\left(\text{für } \xi \text{ zwischen 0 und } \frac{\pi}{a+1}\right)$, und gleich und symmetrisch liegend (in Bezug auf den Contactdiameter CE) mit dem zweiten Stück $\left(\text{für } \xi \text{ zwischen } \frac{\pi}{a+1} \text{ bis } \frac{2\pi}{a+1}\right)$. Also bilden die Puncte der Curve, für welche ξ zwischen $\frac{\pi}{a+1}$ und $\frac{3\pi}{a+1}$ liegt, einen vollständigen Zweig, welcher den Kreis im Puncte E $\left(\text{für } \xi = \frac{2\pi}{a+1}\right)$ trifft und sich nach beiden Seiten von diesem Puncte aus auf vollständig gleiche Weise ins Unendliche erstreckt. Folglich (10.) besteht die ganze Curve aus $\mu+\nu$ solcher unendlicher Zweige, welche symmetrisch um den Mittelpunct herumliegen.

12.

Um die Form dieser Zweige näher zu erkennen, ist nach dem Gesagten nur nöthig, den ersten Halbzweig zu untersuchen, indem man ξ von 0 bis $\frac{\pi}{a+1}$ nimmt.

Der Radiusvector der Curve

$$r = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(a+1)\xi}$$

ist für den ersten Halbzweig immer ***positiv***, und zwar gröfser als sein von der Tangente des Kreises im Puncte F abgeschnittenes Stück

$$r' = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(a-1)\xi};$$

folglich wird jeder Zweig der Curve durch die Tangente des Kreises in seinem Contactpunct vom Kreise getrennt.

Die Tangente der Curve erhält man, wenn man in einem der beiden Ausdrücke für eine durch zwei Puncte gehende Gerade (3.) erst $a\xi'$ und $a\xi''$ statt η' und η'' setzt und dann $\xi'' = \xi'$ macht. Dadurch ergiebt sich

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{a\sin\xi + \sin a\xi}{+a\cos\xi - \cos a\xi}.$$

Der ***Zähler*** dieses Bruchs ist positiv, so lange $\xi < \frac{\pi}{a}$ ist; im ***Nenner*** sind Anfangs sowohl $\cos\xi$ als $\cos a\xi$ positiv, aber es ist $\cos\xi > \cos a\xi$. Darauf wird $\cos a\xi$ negativ, während $\cos\xi$ positiv bleibt. Also ist dieser Ausdruck für $\operatorname{tang}\omega$ positiv; wenigstens so lange der Berührungspunct ξ dem ersten Halbzweige angehört. Folglich gehört der Winkel ω, den die Perpendikel auf die Tangenten des ersten Halbzweigs mit dem Hauptdurchmesser einschliefsen, entweder dem ersten oder dem dritten Quadranten an. Für $\xi = 0$ wird $\operatorname{tang}\omega = 0$; d. h. in den Contactpuncten haben Kreis und Curve gemeinschaftliche Tangenten; mithin wird der Kreis in der That in diesen Puncten von der Curve berührt.

Betrachtet man die Bewegung der Tangente, wenn ξ wächst, so ergiebt sich

$$\frac{d\operatorname{tang}\omega}{d\xi} = \frac{(a^2-a)[1+\cos(a+1)\xi]}{(a\cos\xi - \cos a\xi)^2}.$$

Da dieser Ausdruck für die *ganze* Curve positiv ist, so wird die Curve durch eine stetige Bewegung der Tangente beschrieben, indem sich das auf sie aus

dem Mittelpunct gefällte Perpendikel in derselben Richtung dreht, in welcher der Winkel ω gemessen wird. Die Curve hat folglich ***keinen Wendepunct*** im Endlichen.

Es sind noch zwei besondere Fälle zu beachten; nämlich wenn die Derivirte von $\operatorname{tang}\omega$ ***unendlich grofs,*** und wenn sie Null wird. Sie wird unendlich grofs, wenn $\cos a\xi = a\cos\xi$ ist. Dies giebt aber auch $\operatorname{tang}\omega = 0$; d. h. die Tangente der Curve ist dem Hauptdurchmesser parallel. Da aber diese Gleichung nur dann Statt finden kann, wenn entweder $a\xi$ dem dritten und ξ dem zweiten, oder $a\xi$ dem vierten und ξ dem ersten Quadranten angehört, so folgt, dafs ein solcher Fall nicht im ersten Halbzweige vorkommen kann, dafs es also überhaupt keinen ***singulären*** Punct der Curve giebt.

Soll dagegen die ***Derivirte*** verschwinden, so mufs

$$\cos(a+1)\xi = -1,$$

also

$$\xi = \frac{2n+1}{a+1}\pi$$

sein. Dies giebt alle Puncte, welche im Unendlichen liegen (11.). Für diese Werthe von ξ geht mithin die Tangente in die ***Asymptote*** über, und es findet sich daher für die Gleichung der ***Asymptoten:***

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{a\sin\frac{2n+1}{a+1}\pi + \sin\frac{a(2n+1)}{a+1}\pi}{a\cos\frac{2n+1}{a+1}\pi - \cos\frac{a(2n+1)}{a+1}\pi} = \operatorname{tang}\frac{2n+1}{a+1}\pi,$$

folglich

$$\omega' = m\pi + \frac{2n+1}{a+1}\pi.$$

Da nun für diese Werthe von ξ die Derivirte verschwindet, so folgt, dafs, während sämmtliche Tangenten einen Contact erster Ordnung mit der Curve haben, sämmtlichen (reellen) Asymptoten ein Contact höherer Ordnung zukommt. Dies folgt auch schon daraus, dafs die beiden unendlichen Zweige, welche ***dieselbe*** Asymptote berühren, auf ***derselben*** Seite der Asymptoten liegen, dafs also die unendlich entfernten Puncte der Curve ***Wendepuncte*** sind. Aus derselben Ursache, und da für die nächstanliegenden Puncte die Derivirte wieder ***positiv*** ist, folgt, dafs die Tangente durch die unendlich entfernten Puncte hindurch ihre Richtung fortwährend in demselben Sinne ändert, während der Winkel ω (den das auf sie aus dem Mittelpunct gefällte Perpendikel mit dem Hauptdurchmesser einschliefst) fortwährend wächst.

Dafs die Curve keinen ***Rückkehrpunct*** hat, läfst sich am einfachsten daraus darthun, dafs für den Rückkehrpunct entweder der Radiusvector einmal kleiner werden, oder in seiner Nähe die Tangente der Curve einmal mit dem Radiusvector zusammenfallen mufs; was Beides, wie leicht zu sehen, im ersten Halbzweige nicht Statt findet.

13.

Die Entfernung der Tangente vom Mittelpuncte ergiebt sich aus (8.); nämlich

$$P = R\frac{\cos[\frac{1}{2}(a-1)\xi+\omega]}{\cos\frac{1}{2}(a+1)\xi}.$$

$$= R\frac{\cos\frac{1}{2}(a-1)\xi-\sin\frac{1}{2}(a-1)\xi\,\mathrm{tang}\,\omega}{\cos\frac{1}{2}(a+1)\xi\cdot\frac{1}{\cos\omega}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-1)\xi-\sin\frac{1}{2}(a-1)\xi\,\mathrm{tang}\,\omega}{\cos\frac{1}{2}(a+1)\xi.\sqrt{(1+\mathrm{tang}\,\omega^2)}}.$$

Setzt man hierin für $\mathrm{tang}\,\omega$ seinen Werth, so ergiebt sich

$$P = R\frac{a-1}{\sqrt{[(a+1)^2-4a(\cos\frac{1}{2}(a+1)\xi)^2]}}.$$

Damit P *positiv* sei, mufs die Wurzel *positiv* genommen werden. Der Werth von P liegt zwischen R und $R\cdot\frac{a-1}{a+1}$; und zwar ist zuerst $P=R$ für $\xi=0$. Dann nimmt P ab, bis $R\frac{a-1}{a+1}$, während ξ bis $\frac{\pi}{a+1}$ wächst; worauf es wieder zunimmt, bis $\xi=\frac{2\pi}{a+1}$ ist, u. s. w. Zugleich ist offenbar $\omega=0$ für $\xi=0$; also liegt für den ersten Halbzweig, da ω fortwährend wächst (12.), der Winkel ω im ersten Quadranten, und zwar zwischen 0 und $\frac{\pi}{a+1}$, insofern $\mathrm{tang}\,\omega$ nicht negativ ist, beim ersten Halbzweige. Mithin durchläuft ω für die ganze Curve (aus $2(a+1)$ Halbzweigen bestehend) nach einander alle Werthe von 0 bis 2π, oder, allgemeiner, von 0 bis $2\nu\pi$. Eben so dreht sich die Tangente beim Durchlaufen der Curve um den Winkel $2\nu\pi$.

Ferner folgt noch, dafs die Tangente immer zwischen den Mittelpunct und den *Contact*punct desjenigen Zweiges hindurchgeht, den sie berührt. Die Fufspunctscurve der Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf die Tangenten der Curve liegt ganz ***innerhalb*** des Kreises, geht durch die ν Contactpuncte und ist symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunct.

Für die *Asymptote* wird:

$$P' = R\frac{a-1}{a+1}, \quad \omega' = m\pi+\frac{2n+1}{a+1}\pi.$$

Da aber für den ersten Halbzweig $\omega' = \frac{1}{\alpha+1}\pi$ ist, so kann ω' im Allgemeinen nur von der Form

$$\omega' = \frac{2n+1}{\alpha+1}\pi$$

sein. Hieraus geht die Construction der ***Asymptoten*** hervor. Sie bilden ein regelmäfsiges, mit dem Kreise concentrisches $\mu+\nu$ Eck.

14.

Der Winkel ϑ, welchen die beiden Asymptoten desselben Zweiges einschliefsen, ist das Supplement des Winkels ihrer Perpendikel aus dem Mittelpunct, also

$$\vartheta = \pi - 2\frac{\nu}{\mu+\nu}\pi = \frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\pi.$$

Er dient offenbar als Maafs für die Ausdehnung der Zweige in die Breite, kann also zur Vergleichung der verschiedenen Curven in dieser Beziehung angewendet werden.

Der Winkel ϑ kann alle Werthe zwischen 0 und π bekommen; denn für sie alle können μ und ν rational und ganze Zahlen sein. Der Winkel ϑ ist aber auch für jede Curve ein anderer; denn sonst müfste

$$\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu} = \frac{\mu'-\nu'}{\mu'+\nu'},$$

sein können, woraus

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu'}{\nu'}$$

folgen würde; was der Voraussetzung zuwider ist, dafs die Brüche $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\nu'}$ in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt sind.

Das ϑ ist am kleinsten, wenn $\mu-\nu=1$ und $\mu+\nu=$ max. ist. Setzt man daher $\nu=\mu-1$ und läfst μ wachsen, so nimmt die Anzahl der Zweige zu, während ϑ abnimmt; und an der Grenze $\mu=\infty$ wird $\mu+\nu=\infty$ und $\vartheta=0$. Setzt man dagegen $\nu=1$ und läfst wieder μ, aber ***allein***, wachsen, bis ins Unendliche, so nimmt abermals die Anzahl der Zweige, ebenfalls bis ins Unendliche zu, und der Winkel ϑ wächst, und zwar bis π. Also liegen alle möglichen Curven zwischen zwei Systemen von unendlich vielen geraden Linien, von denen das eine aus den verlängerten Halbmessern des Kreises, das andere aus dessen Tangenten besteht. In beiden Grenzfällen fällt die Curve mit ihren Asymptoten zusammen.

Bei dieser Gelegenheit läfst sich fragen, ***wie viele*** Curven aus einer ***gegebenen*** Anzahl von Zweigen bestehen. Ist p die Anzahl der Zweige, so fragt es sich, auf wie vielerlei Weise μ und ν in ganzen Zahlen sich so annehmen lasse, dafs sie zu einander ***relative Primzahlen*** sind, dafs ihre Summe p sei und dafs $\mu > \nu$. Läfst man zuerst die letzte Bedingung aufser Acht, so ergeben sich, da auch ν und $\mu+\nu$ relative Primzahlen sind, für den Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ so viele Werthe, als es Zahlen giebt, die zu $\mu+\nu$, d. h. p, relative Primzahlen und kleiner als $\mu+\nu$ sind, d. h. $\varphi(\mu+\nu)=b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots(b-1)(c-1)\ldots$, wenn $\mu+\nu=p=b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$ ist. Von diesen Brüchen ist aber offenbar die eine Hälfte nur die Umkehrung der andern, so dafs sich, wenn noch die Bedingung $\mu > \nu$, mithin $\nu < 2p$ hinzukommt, gerade die Hälfte von $\varphi(p)$ findet, d. h. $\frac{1}{2}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots(b-1)(c-1)$.

15.

Bezeichnet man durch ξ', η' und ξ'', η'' die beiden Coordinatenpaare eines ***Doppelpuncts*** der Curve, so finden (9.) die Relationen

$$\xi'' = 2m\pi - \eta', \qquad \eta'' = 2n\pi - \xi',$$

$$\xi' = 2\frac{\mu m - \nu n}{\mu^2 - \nu^2}\nu\pi,$$

$$\xi'' = 2\frac{\mu n - \nu m}{\mu^2 - \nu^2}\nu\pi$$

Statt. Hätte der Punct noch ein drittes Coordinatenpaar ξ''', η''', so müfste noch

$$\xi''' = 2m'\pi - \eta', \qquad \eta''' = 2n'\pi - \xi'$$

und

$$\xi''' = 2m''\pi - \eta'', \qquad \eta''' = 2n''\pi - \xi''$$

sein. Daraus würde aber

$$\eta'' = \eta' + 2(m'' - m')\pi, \qquad \xi'' = \xi' + 2(n'' - n')\pi$$

folgen; was unmöglich ist (9.). Also hat die Curve ***keine*** mehrfachen Puncte, als Doppelpuncte.

Es werde nun die Anzahl der Doppelpuncte gesucht. Zu dem Ende darf man nur die Anzahl der Doppelpuncte suchen, die auf dem ersten Halbzweige liegen. Es soll also

$$\xi' < \frac{\nu\pi}{\mu+\nu},$$

d. h.

$$\frac{2\nu(m\mu - n\nu)}{\mu^2 - \nu^2}\pi < \frac{\nu}{\mu+\nu}\pi,$$

daher

$$n > m\frac{\mu}{\nu} - \frac{\mu-\nu}{2\nu}$$

sein. Da aber auch $\xi' > 0$ ist, so mufs noch

$$n < m\frac{\mu}{\nu},$$

und da endlich

$$\xi'' > 0, \qquad \xi'' < 2\nu\pi$$

ist, so mufs auch

$$m > 0, \qquad m < \nu + 1$$

sein. Es sollen also die vier Ungleichheiten:

$$m > 0,$$
$$m < \nu + 1,$$
$$n > m\frac{\mu}{\nu} - \frac{\mu-\nu}{2\nu},$$
$$n < m\frac{\mu}{\nu}$$

zugleich Statt finden. Die beiden ersten bestimmen die Grenzen von m, unabhängig von n; die beiden andern geben die Grenzen von n für jeden Werth von m. Zur Bestimmung von m sind folglich nur die beiden ersten zu berücksichtigen; sie geben für m alle ν ganze Zahlen von 1 bis ν. Es ist also noch zu suchen, wie viele ganze Werthe von n den beiden letzten Ungleichheiten für jeden dieser ν Werthe von m genugthun.

Es sei k die gröfste ganze Zahl im Quotienten $\frac{\mu}{\nu}$, und ϱ der Rest, d. h.

$$\mu = \nu k + \varrho.$$

Dann sind die beiden Ungleichheiten folgende:

$$n > mk + \frac{m\varrho}{\nu} - \frac{\mu-\nu}{2\nu},$$

$$n < mk + \frac{m\varrho}{\nu}.$$

Da nun ν zu μ, mithin auch zu ϱ, eine relative Primzahl ist, so giebt die Division $\frac{m\varrho}{\nu}$, wenn man dem m nach einander seine ν Werthe von 1 bis ν beilegt, zu Resten die ν ersten ganzen Zahlen in verschobener Ordnung. Bezeichnet man diese Reste durch σ und den *ganzen* Theil des Quotienten durch p,

so ist

$$n > km + p + \frac{\sigma}{\nu} - \frac{\mu - \nu}{2\nu}$$

$$n < km + p + \frac{\sigma}{\nu};$$

wo σ und p von m abhängig sind.

Es sei jetzt v die Anzahl der Werthe von n, welche zu einem bestimmten Werthe vom m gehören. Der *gröfste* dieser v Werthe ist offenbar $km+p$, also mufs der *kleinste* $km+p-(v-1)$ sein. Dieser kleinste Werth mufs noch immer gröfser sein als die unterste Grenze von n; aber so klein, dafs die unmittelbar kleinere Zahl kleiner ist als diese Grenze, oder ihr gleich. Dies giebt die zwei Bedingungen

$$km + p - (v-1) > mk + p + \frac{\sigma}{\nu} - \frac{\mu - \nu}{2\nu}$$

$$km + p - v \leqq mk + p + \frac{\sigma}{\nu} - \frac{\mu - \nu}{2\nu},$$

also

$$v \geqq \frac{\mu - \nu}{2\nu} - \frac{\sigma}{\nu}$$

$$v < \frac{\mu - \nu}{2\nu} - \frac{\sigma}{\nu} + 1.$$

Setzt man noch, um v zu finden,

$$\mu - \nu = r.2\nu + \tau,$$

so ergiebt sich

$$v \geqq r + \frac{\tau}{2\nu} - \frac{\sigma}{\nu}$$

$$v < r + \frac{\tau}{2\nu} - \frac{\sigma}{\nu} + 1.$$

Da $\tau < 2\nu$ und $\sigma > 0$, so ist die Differenz $\frac{\tau}{2\nu} - \frac{\sigma}{\nu}$ kleiner als 1, und da $\tau > 0$ und $\sigma < \nu + 1$ ist, so ist sie gröfser als -1; also ist

Entweder $\sigma \geqq \frac{1}{2}\tau$: dann ist $\frac{\tau}{2\nu} - \frac{\sigma}{\nu} \leqq 0$ und $v = r$.

Oder es ist $\sigma < \frac{1}{2}\tau$: dann ist $\frac{\tau}{2\nu} - \frac{\sigma}{\nu} > 0$ und $v = r + 1$.

Nun durchläuft, wie gesagt, das σ alle ganzen Zahlen von 1 bis ν, während man dem m nach einander alle seine Werthe beilegt. Unter diesen ν Werthen von σ giebt es, wenn τ *gerade* ist (also wenn μ und ν zugleich

ungerade sind), $\frac{1}{2}(\tau-2)$ Werthe, welche kleiner sind als $\frac{1}{2}\tau$, mithin $\nu-\frac{1}{2}(\tau-2)$ Werthe, welche gröfser sind (darunter Einen, der gleich $\frac{1}{2}\tau$). Ist dagegen τ, also auch $\mu-\nu$ ***ungerade***, so sind $\frac{1}{2}(\tau-1)$ von diesen Zahlen kleiner, und $\nu-\frac{1}{2}(\tau-1)$ ist gröfser als $\frac{1}{2}\tau$. Folglich giebt es $\frac{1}{2}(\tau-2)$, oder $\frac{1}{2}(\tau-1)$ Werthe von m, von der Art, dafs für jeden von ihnen das n nach einander $r+1$ verschiedene Werthe bekommt. Für jeden der übrigen $\nu-\frac{1}{2}(\tau-2)$, oder $\nu-\frac{1}{2}(\tau-1)$ Werthe von m nimmt das n nur r verschiedene Werthe an. Und da nun das ξ' sich ändert, so wie sich m oder n oder beide ändern, so ergiebt sich endlich für die Anzahl der gesuchten Doppelpuncte des ersten Halbzweiges Folgendes:

I. Wenn $\mu-\nu$ ***gerade*** ist, so ist die Anzahl

$$\tfrac{1}{2}(\tau-2)(r+1)+[\nu-\tfrac{1}{2}(\tau-2)]r=\tfrac{1}{2}(2\nu r+\tau)-1=\tfrac{1}{2}(\mu-\nu-2).$$

II. Wenn $\mu-\nu$ ***ungerade*** ist, so ist sie

$$\tfrac{1}{2}(\tau-1)(r+1)+[\nu-\tfrac{1}{2}(\tau-1)]r=\tfrac{1}{2}(\mu-\nu-1),$$

also in beiden Fällen die ganze Zahl, welche unmittelbar kleiner ist als $\frac{1}{2}(\mu-\nu)$.

16.

Addirt man die Ausdrücke von ξ' und ξ'', so erhält man

$$\xi'+\xi''=\frac{2\nu(n+m)}{\mu+\nu}\pi.$$

Dieser Ausdruck ist nichts Anders als die ξ Coordinate eines ***Contactpuncts*** (8.); und zwar des Contactpuncts desjenigen Zweiges, auf welchem ξ'' liegt, weil die Gröfse, welche zu ξ'' addirt wurde, kleiner ist als $\frac{\nu\pi}{\mu+\nu}$ (10.). Aus der Symmetrie der Curve folgt, dafs der Radiusvector des Doppelpuncts den Bogen halbirt, welcher von den beiden Contactpuncten eingeschlossen ist.

Kein Zweig der Curve wird von dem ersten Halbzweige mehr als einmal geschnitten; denn wäre dies, so müfste offenbar

$$\frac{2(m'+n')\nu\pi}{\mu+\nu}=\frac{2(m''+n'')\nu\pi}{\mu+\nu},$$

also

$$m'+n'=m''+n''$$

sein, d. h. wenn $u'+u''$ zwei Zahlen sind, die zwischen -1 und $\frac{\mu-\nu}{2\nu}$ liegen, müfste

$$m'+km'+p'-u'=m''+km''+p''-u'',$$

oder, wenn man $m'' - m' = m_1$ setzt,

$$u'' - u' = p'' - p' + (k+1)m_1$$

sein. Ist nun $m'' > m'$, also m_1, *positiv*, so ist auch $u'' - u' < \frac{\mu - \nu}{2\nu} + 1 < k+1$; folglich ist die Gleichung nicht möglich. Schneidet aber kein Zweig den ersten Halbzweig zweimal, so kann auch kein Zweig den *ganzen* Zweig, der durch den Punct F geht, zweimal schneiden; denn jeder Zweig ist in einem kleinern Centriwinkel als zwei Rechte eingeschlossen. Endlich kann auch kein Zweig sich selbst schneiden, weil er sich fortwährend nach beiden Seiten von dem Halbmesser des Contactpunctes entfernt. Also findet sich die Anzahl *aller* Doppelpuncte der Curve, wenn man die Anzahl der auf dem ersten Halbzweige liegenden Doppelpuncte mit der Anzahl der Halbzweige multiplicirt und (da hierbei jeder Doppelpunct zweimal genommen wird) durch Zwei dividirt. Sie ist demnach

$$= \tfrac{1}{2}(\mu+\nu)(\mu-\nu-2) \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}(\mu+\nu)(\mu-\nu-1),$$

je nachdem $\mu - \nu$ ***gerade*** oder ***ungerade*** ist.

Bei dieser Berechnung sind jedoch die unendlich entfernten Doppelpuncte ausgelassen. Diese finden sich, wenn man

$$\xi' = \frac{\nu\pi}{\mu+\nu}$$

setzt. Daher ist

$$n = mk + p + \frac{\sigma}{\nu} - 2\nu r - \frac{\tau}{2\nu}.$$

Soll diese Gleichung möglich sein, so mufs $\sigma = \frac{1}{2}\tau$, mithin $\mu - \nu$ ***gerade*** sein; also auch $\mu + \nu$. Solche Puncte sind aber immer je vier Halbzweigen gemeinschaftlich (14.); mithin ist ihre Anzahl $\frac{2(\mu+\nu)}{4} = \frac{1}{2}(\mu+\nu)$. Also ist die Anzahl *aller* Doppelpuncte immer

$$\tfrac{1}{2}(\mu+\nu)(\mu-\nu-1),$$

es mag $\mu - \nu$ ***gerade*** oder ***ungerade*** sein.

Die Doppelpuncte bilden offenbar die Ecken von regelmäfsigen, mit dem Kreise concentrischen $\mu + \nu$ Ecken.

17.

Soll eine Tangente eine ***Doppeltangente*** sein, so müssen in ihr zwei Tangenten zusammenfallen; d. h. es müssen die Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf die beiden Tangenten einander gleich sein, und es dürfen sich die

Winkel der Perpendikel mit dem Hauptdurchmesser nur um *gerade* Vielfache von π unterscheiden. Dies giebt

$$\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{\mu+\nu}{\nu}\right)\xi_1 = \pm\cos\tfrac{1}{2}\frac{\mu+\nu}{\nu}\xi \quad \text{und} \quad \omega_1 = \omega + 2m\pi,$$

also

$$\tfrac{1}{2}\frac{\mu+\nu}{\nu}\xi_1 = n\pi \pm \tfrac{1}{2}\frac{\mu+\nu}{\nu}\xi.$$

Man versuche zuerst das oberste Zeichen $+$. Dies giebt

$$\xi_1 = \xi + \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu}.$$

Nun durchläuft ω, während ein Halbkreis beschrieben wird, den Werth $\frac{\nu\pi}{\mu+\nu}$ (13.). Also, um von einem Puncte ξ zu einem andern ξ_1 zu kommen, der von dem ersten ξ um $\frac{\nu\pi}{\mu+\nu}2n$ absteht, d. h. gleichliegend mit ihm ist (10.), mufs sich ξ ebenfalls um $\frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu}$ vergröfsern. Es ist aber schon $\omega_1 = \omega + 2m\pi$, mithin

$$m = \frac{n\nu}{\mu+\nu}.$$

Demnach wäre also $\mu+\nu$ der kleinste Werth von n und daher $\omega - 2\nu\pi$ der kleinste Werth von ω_1, während sich in (13.) fand, dafs ω_1 nicht gröfser wird als $2\nu\pi$.

Es sind also nur die beiden Gleichungen

$$\xi_1 = \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu} - \xi \quad \text{und} \quad \omega_1 = \omega + 2m\pi$$

zu verbinden. Die erste zeigt, dafs die Endpuncte der Coordinaten ξ und ξ' gleich weit von den Contactpuncten der Zweige, zu denen die beiden Puncte gehören (10.), aber nach entgegengesetzten Seiten abstehen, dafs mithin die Puncte selbst in Bezug auf den Halbmesser, welcher den von den beiden Contactpuncten begrenzten Bogen halbirt, *symmetrisch* liegen. Die Doppeltangente steht daher senkrecht auf diesem Halbmesser. Solcher Halbmesser hat aber die Curve $2(\mu+\nu)$. Und da nun ω_1 in der Gleichung $\omega_1 = \omega + 2m\pi$ zwischen 0 und $2\nu\pi$ liegt, so kann m demnach ν verschiedene, theils positive, theils negative ganze Werthe bekommen. Folglich ist die Anzahl der Doppeltangenten $2\nu(\mu+\nu)$. Da aber hier jede Doppeltangente zweimal gerechnet

wurde, so ist die Anzahl in der That nur $\nu(\mu+\nu)$; unter welcher auch die $\mu+\nu$ Asymptoten mit inbegriffen sind (12.).

Addirt man die Anzahl der Doppelpuncte und Doppeltangenten, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}(\mu+\nu)(\mu-\nu-1)+\nu(\mu+\nu) = \tfrac{1}{2}(\mu+\nu)(\mu+\nu-1):$$

ein Ausdruck, der nur von der Anzahl $\mu+\nu$ der Zweige abhängt.

Dafs diese Resultate nicht mit den Eigenschaften der allgemeinen algebraischen Curven übereinstimmen, ist nicht zu verwundern, da alles *Imaginäre* aufser Acht gelassen wurde.

Im Mai 1850.

(Die Fortsetzung folgt.)

19.

Zwei Zahlen-Aufgaben; die erste mit der Auflösung, die zweite noch aufzulösen.

Erste Aufgabe, nebst Auflösung.

1.

Die Aufgabe ist von einem bekannten Spiele oder sogenannten Kunststücke mit Spielcarten hergenommen, giebt aber zu einer nicht ganz einfachen mathematischen Rechnung Anlafs und erfordert zur Auflösung etwas eigenthümliche Kunstgriffe.

Dafs diese Untersuchung aus einem blofsen ***Spiele*** entspringt, wird wohl keinen Anstofs finden. Auch das Schachspiel ist ein blofses Spiel, und doch haben die berühmtesten Mathematiker es nicht verschmäht, sich mit mathematischen Untersuchungen darüber zu beschäftigen.

2.

Das gedachte Spiel oder Kunststück mit Spielcarten ist folgendes.

Man legt 21 beliebige Carten in 3 Haufen, jeden von 7 Carten, wie folgt, offen hin: die zweite Carte rechts neben die erste, die dritte rechts neben die zweite, die vierte auf die erste, die fünfte auf die zweite, die sechste auf die dritte, die siebente wieder auf die vierte u. s. w., und läfst aus allen 21 Carten ***irgend eine*** wählen. Darauf nimmt man den ***Haufen,*** in welchem sich die ausgewählte Carte befindet, in die ***Mitte*** zwischen die beiden andern Haufen, ohne sonst die Carten zu mengen, legt von Neuem, ***ganz wie vorhin,*** die 21 Carten in drei gleiche Haufen aus, nimmt wieder den ***Haufen,*** in welchem sich ***jetzt*** die ausgewählte Carte befindet, in die Mitte, und legt die Carten zum drittenmal in drei gleiche Haufen aus. Nach diesem dritten Auslegen ist die ausgewählte Carte *immer* die ***mittlere*** in dem Haufen, in welchem sie sich befindet, also, wenn man diesen Haufen wieder in die Mitte nimmt, die ***mittlere*** von allen 21 Carten, das heifst, die 11te von oben, oder von unten; gleichviel ob die gewählte Carte beim ersten Auslegen die erste, zweite, dritte, vierte, fünfte, sechste oder siebente in ihrem Haufen war.

3.

Sieht man nun von den Spielcarten und ihrer beschränkten Anzahl ab und nimmt eine ***beliebige*** Anzahl m von ***Gruppen,*** jede mit einer beliebigen Anzahl n von ***Elementen*** $e_1, e_2, e_3, \ldots . e_n$ an, so entstehen die Fragen:

Erstlich, ob ***immer,*** für jedes m und n, durch wiederholtes Umlegen der Gruppen auf die oben beschriebene Weise, ***jedes*** Element e_k der ersten mittlern Gruppe zuletzt in die ***Mitte*** der letzten mittlern Gruppe gelange. Und

Zweitens, wenn dies der Fall ist: ***wie oft*** zu dem Ende die Gruppen umgelegt werden müssen; wobei, wie sich zeigen wird, keinesweges, wie bei $n = 7$ und $m = 3$, immer gerade ein $\frac{1}{2}(n-1) = 3$maliges Umlegen nöthig ist.

4.

Es sei

$m = 2\mu - 1$ die Anzahl der ***Gruppen,*** so dafs die μte die ***mittlere*** ist.

$n = 2\nu - 1$ die Anzahl der ***Elemente*** in jeder Gruppe, so dafs das νte Element das ***mittlere*** in seiner Gruppe ist.

m und n müssen nämlich nothwendig beide ***ungerade*** Zahlen sein, weil sonst, wenn eine von beiden, oder beide ***gerade*** wären, die ***Gesammtzahl mn*** der Elemente ***gerade*** sein und es folglich kein ***mittelstes*** Element von allen geben würde.

k sei die Zahl oder Nummer des zum erstenmal in dem mittleren Haufen ausgewählten ***Elements*** e_k; so dafs also $k = 1, 2, 3, \ldots . n$ sein kann.

r sei die Nummer oder Zahl der ***Gruppe,*** in welche e_k durch das erste Umlegen geräth.

λ sei die Zahl der Elemente, welche nach dem ersten Umlegen dem Elemente e_k in der neuen mittleren Gruppe ***vorhergehen.***

k_1 sei die Zahl oder Nummer, welche e_k nach dem ersten Umlegen in dem neuen mittleren Haufen bekommt; so dafs also e_k zu e_{k_1} wird.

5.

Um die Aufgabe zu versinnlichen, wollen wir erst einige ***Beispiele*** in etwas gröfseren Zahlen hersetzen.

Es sei

$$n = 53.$$

Dann ist

	Für $\mu=3$			Für $\mu=5$			Für $\mu=7$			Für $\mu=9$		
$k=$	$r=$	$\lambda=$	k_1	$r=$	$\lambda=$	k_1	$r=$	$\lambda=$	k_1	$r=$	$\lambda=$	k_1
1	3	17	36	2	21	32	6	22	31	6	23	30
2	1	18	35	3	21	32	7	22	31	7	23	30
3	2	18	35	4	21	32	1	23	30	8	23	30
4	3	18	35	5	21	32	2	23	30	9	23	30
5	1	19	34	1	22	31	3	23	30	1	24	29
6	2	19	34	2	22	31	4	23	30	2	24	29
7	3	19	34	3	22	31	5	23	30	3	24	29
8	1	20	33	4	22	31	6	23	30	4	24	29
9	2	20	33	5	22	31	7	23	30	5	24	29
10	3	20	33	1	23	30	1	24	29	6	24	29
11	1	21	32	2	23	30	2	24	29	7	24	29
12	2	21	32	3	23	30	3	24	29	8	24	29
13	3	21	32	4	23	30	4	24	29	9	24	29
14	1	22	31	5	23	30	5	24	29	1	25	28
15	2	22	31	1	24	29	6	24	29	2	25	28
16	3	22	31	2	24	29	7	24	29	3	25	28
17	1	23	30	3	24	29	1	25	28	4	25	28
18	2	23	30	4	24	29	2	25	28	5	25	28
19	3	23	30	5	24	29	3	25	28	6	25	28
20	1	24	29	1	25	28	4	25	28	7	25	28
21	2	24	29	2	25	28	5	25	28	8	25	28
22	3	24	29	3	25	28	6	25	28	9	25	28
23	1	25	28	4	25	28	7	25	28	*1	26	27
24	2	25	28	5	25	28	*1	26	27	*2	26	27
25	3	25	28	*1	26	27	*2	26	27	*3	26	27
26	*1	26	27	*2	26	27	*3	26	27	*4	26	27
27	*2	26	27	*3	26	27	*4	26	27	*5	26	27
28	*3	26	27	*4	26	27	*5	26	27	*6	26	27
29	1	27	26	*5	26	27	*6	26	27	*7	26	27
30	2	27	26	1	27	26	*7	26	27	*8	26	27
31	3	27	26	2	27	26	1	27	26	*9	26	27
32	1	28	25	3	27	26	2	27	26	1	27	26
33	2	28	25	4	27	26	3	27	26	2	27	26
34	3	28	25	5	27	26	4	27	26	3	27	26
35	1	29	24	1	28	25	5	27	26	4	27	26
36	2	29	24	2	28	25	6	27	26	5	27	26
37	3	29	24	3	28	25	7	27	26	6	27	26
38	1	30	23	4	28	25	1	28	25	7	27	26
39	2	30	23	5	28	25	2	28	25	8	27	26
40	3	30	23	1	29	24	3	28	25	9	27	26
41	1	31	22	2	29	24	4	28	25	1	28	25
42	2	31	22	3	29	24	5	28	25	2	28	25
43	3	31	22	4	29	24	6	28	25	3	28	25
44	1	32	21	5	29	24	7	28	25	4	28	25
45	2	32	21	1	30	23	1	29	24	5	28	25
46	3	32	21	2	30	23	2	29	24	6	28	25
47	1	33	20	3	30	23	3	29	24	7	28	25
48	2	33	20	4	30	23	4	29	24	8	28	25
49	3	33	20	5	30	23	5	29	24	9	28	25
50	1	34	19	1	31	22	6	29	24	1	29	24
51	2	34	19	2	31	22	7	29	24	2	29	24
52	3	34	19	3	31	22	1	30	23	3	29	24
53	1	35	18	4	31	22	2	30	23	4	29	24

Gesetzt das ausgewählte Element e_k sei das ***erste*** in der ***ersten*** mittleren Gruppe, also $k=1$, so wird es in diesen Beispielen durch das ***erste*** Umlegen für $m=3$ zum $k_1=36$ten in der neuen mittlern Gruppe. Beim ***zweiten*** Umlegen wird dies 36te Element, da jetzt $k=36$ gesetzt werden

mufs, zum 24ten. Beim ***dritten*** Umlegen wird das 24te Element zum 28ten und beim ***vierten*** Umlegen wird das 28te Element zum **27**, also zum ***mittlern***, und ***bleibt*** dies auch beim fernern Umlegen.

Für $m=5$ und $k=1$ wird e_k der Reihe nach zum 32ten, 26ten und 27ten, also zum ***mittlern***;

Für $m=7$ und $k=1$ wird e_k der Reihe nach zum 31ten, 26ten und 27ten, also zum ***mittlern***;

Für $m=9$ und $k=1$ wird e_k sogleich vom 30ten zum 27ten ***mittlern***.

Wir wollen Dies und noch für einige andere Werthe von k zusammenstellen. Die Nummer des ausgewählten Elements wechselt der Reihe nach wie folgt:

	Für $m=3$.	Für $m=5$.	Für $m=7$.	Für $m=9$.
Für $k=1$,	36, 24, 28, 27,	32, 26, 27,	31, 26, 27,	30, 27,
- $k=2$,	35, 24, 28, 27,	32, 26, 27,	31, 26, 27,	30, 27,
- $k=6$,	35, 25, 28, 27,	31, 26, 27,	30, 27,	29, 27,
- $k=20$,	29, 26, 27,	28, 27,	28, 27,	28, 27,
- $k=43$,	22, 29, 26, 27,	24, 28, 27,	25, 27,	25, 27,
- $k=53$,	17, 30, 26, 27,	22, 28, 27,	23, 27,	24, 27.

Für ***jedes*** k wird in den Beispielen e_k auf diese Weise durch wiederholtes Umlegen zum ***mittleren*** aller mn Elemente. Aus dem Folgenden wird Dies nebst der Art der Berechnung der obigen Beispiele hervorgehen.

6.

Vor dem ersten Umlegen ist das Element e_k, da es in der ***mittleren*** Gruppe liegt, das $k$te in dieser Gruppe, also das $\frac{1}{2}(m-1)n+k$te $=\mu n+k$te von ***allen*** mn Elementen. Nun gehen ihm beim ersten Umlegen in den m Gruppen λm Elemente ***vorauf***; also wird das $\frac{1}{2}(m-1)n+k$te Element in die $\frac{1}{2}(m-1)n+k-\lambda m$te Gruppe gebracht und folglich ist

$$(1.) \qquad r = \tfrac{1}{2}n(m-1)+k-\lambda m.$$

Da dem e_k (jetzt e_{k_1}) in der neuen mittleren Gruppe λ Elemente ***vorausgehen***, so ist es das $n-\lambda$te in der neuen mittleren Gruppe, also ist

$$(2) \qquad \begin{cases} k_1 = n-\lambda, \\ mk_1 = mn-\lambda m. \end{cases}$$

Dies giebt also vermöge (1.) $mk_1-r=mn-\frac{1}{2}n(m-1)-k=\frac{1}{2}n(m+1)-k$, und daraus folgt

$$(3.) \qquad k_1 = \frac{\frac{1}{2}n(m+1)-k+r}{m}.$$

So findet sich k_1 aus k, wo aber r, welches

$$(4.) \qquad r = 1, 2, 3 \ldots . m$$

sein kann, noch unbekannt ist.

7.

Es mag nun zunächst die ***erste*** Frage (§. 3.) untersucht werden: ob für jedes ***ungerade*** m und n durch wiederholtes Umlegen der Gruppen, auf die oben beschriebene Weise, ***jedes*** Element e_k in die Mitte der letzten mittleren Gruppe gelange.

Man stelle sich zu dem Ende die n Elemente e_k in Theile, jeden von m Einheiten, getheilt vor, und zwar so, dafs das ***mittlere*** Element $e_{\frac{1}{2}(n+1)}$, welches durch

$$(5.) \qquad e_{\frac{1}{2}(n+1)} = e_\nu = k_\nu$$

bezeichnet werden mag, ***in der Mitte*** eines der Theile von m Einheiten liegt.

Dann kann ***jedes*** k wie folgt ausgedrückt werden:

$$(6.) \quad \begin{cases} 1. \quad k = \frac{1}{2}(n+1) + \tau m \pm \varrho, \text{ wenn } k > \frac{1}{2}(n+1) \text{ und} \\ 2. \quad k = \frac{1}{2}(n+1) - \tau m \mp \varrho, \text{ wenn } k < \frac{1}{2}(n+1) \end{cases}$$

ist, wo τ jede beliebige ganze positive Zahl

$$(7.) \qquad \tau = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots .$$

und

$$(8.) \qquad \varrho = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots . \tfrac{1}{2}(m-1)$$

für ***jedes*** τ ist; jedoch darf für $\tau = 0$ in (6. 1.) nur $+\varrho$ und in (6. 2.) nur $-\varrho$ angenommen werden.

8.

Setzt man nun die beiden Ausdrücke (6.) in (3.), so erhält man für das zu einem beliebigen k gehörige k_1 folgende Ausdrücke:

$$(9.) \quad \begin{cases} 1. \quad mk_1 = \frac{1}{2}n(m+1) + r - \frac{1}{2}(n+1) - \tau m \mp \varrho \\ \qquad\quad = \frac{1}{2}(n+1)m - \frac{1}{2}(m+1) + r - \tau m \mp \varrho \text{ für } k > \frac{1}{2}(n+1) \text{ und} \\ 2. \quad mk_1 = \frac{1}{2}n(m+1) + r - \frac{1}{2}(n+1) + \tau m \pm \varrho \\ \qquad\quad = \frac{1}{2}(n+1)m - \frac{1}{2}(m+1) + r + \tau m \pm \varrho \text{ für } k < \frac{1}{2}(n+1), \end{cases}$$

und daraus folgt

$$(10.) \quad \begin{cases} 1. \quad k_1 = \frac{1}{2}(n+1) - \tau + \dfrac{r - \frac{1}{2}(m+1) \mp \varrho}{m} \text{ für } k > \frac{1}{2}(n+1) \text{ und} \\ 2. \quad k_1 = \frac{1}{2}(n+1) + \tau + \dfrac{r - \frac{1}{2}(m+1) \pm \varrho}{m} \text{ für } k < \frac{1}{2}(n+1). \end{cases}$$

Da in diesen Ausdrücken $\frac{1}{2}(n+1)$ und τ *ganze* Zahlen sind und $k_1 = n - \lambda$ (2.) es nothwendig, eben wie n und λ, gleichfalls ist, so mufs auch die in den beiden Ausdrücken (6.) vorkommende Gröfse $\frac{r - \frac{1}{2}(m+1) \pm \varrho}{m}$ nothwendig irgend eine *ganze* Zahl β sein, also mufs

$$(11.) \qquad r - \tfrac{1}{2}(m+1) \pm \varrho = \beta m$$

sein. Der *kleinste* Werth von βm wäre der für den kleinsten Werth von r (4.) und für den kleinsten Werth $-\varrho = -\frac{1}{2}(m-1)$ (8.) von $-\varrho$, also

$$(12.) \qquad \beta m = 1 - \tfrac{1}{2}(m+1) - \tfrac{1}{2}(m-1) = 1 - m.$$

Der *gröfste* Werth von βm wäre der für den gröfsten Werth m von r (4.) und für den gröfsten Werth $+\varrho = \frac{1}{2}(m-1)$ (8.) von $+\varrho$, also

$$(13.) \qquad \beta m = m - \tfrac{1}{2}(m+1) + \tfrac{1}{2}(m-1) = m - 1.$$

Die übrigen Werthe von βm liegen *zwischen* $1 - m$ und $m - 1$.

Beide $\beta m = 1 - m$ und $m - 1$ gehen aber für keine *ganze* Zahl $\beta > 0$ oder $\beta < 0$ mit m auf: also kann nur

$$(14.) \qquad \beta = 0$$

sein, und daher ist in (10.) blofs

$$(14.) \quad \begin{cases} 1. & k_1 = \frac{1}{2}(n+1) - \tau \text{ für } k > \frac{1}{2}(n+1) \text{ und} \\ 2. & k_1 = \frac{1}{2}(n+1) + \tau \text{ für } k < \frac{1}{2}(n+1). \end{cases}$$

9.

Aus (14.) zeigt sich zunächst, dafs

$$(15.) \quad \begin{cases} 1. & k_1 < \frac{1}{2}(n+1) \text{ ist, für } k > \frac{1}{2}(n+1) \text{ und} \\ 2. & k_1 > \frac{1}{2}(n+1), \quad \text{für } k < \frac{1}{2}(n+1). \end{cases}$$

Desgleichen zeigt sich, dafs

$$(16.) \qquad k_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)$$

ist für $\tau = 0$, also dafs vermöge (6. 1. u. 2.)

$$(17.) \quad \begin{cases} 1. & k_1 = \frac{1}{2}(n+1) \text{ für } k = \frac{1}{2}(n+1) + 0, 1, 2, 3 \ldots . \frac{1}{2}(m-1), \\ & \qquad \text{also für } k > \frac{1}{2}(n+1), \text{ und eben so} \\ 2. & k_1 = \frac{1}{2}(n+1) \text{ für } k = \frac{1}{2}(n+1) - 0, 1, 2, 3 \ldots . \frac{1}{2}(m-1), \\ & \qquad \text{also für } k < \frac{1}{2}(n+1) \end{cases}$$

ist; so dafs für den *ganzen mittleren* Theil der Werthe von k, von m Einheiten, k_1 *gleichmäfsig* $= \frac{1}{2}(n+1) = k$, ist.

10.

Nun bezeichne man die *Abstände* der k und k_1 von dem *mittleren* Werthe $\frac{1}{2}(n+1)$ der k und k_1 durch δ und δ_1, so ist

$$(18.)\quad \begin{cases} 1. & \delta = k - \frac{1}{2}(n+1) \text{ und } \delta_1 = \frac{1}{2}(n+1) - k_1 \text{ für } k > \frac{1}{2}(n+1) \text{ und} \\ 2. & \delta = \frac{1}{2}(n+1) - k \text{ und } \delta_1 = k_1 - \frac{1}{2}(n+1) \text{ für } k < \frac{1}{2}(n+1). \end{cases}$$

Dies giebt vermöge (14. und 6.)

$$(19.)\quad \begin{cases} 1. & \delta = \tau m \pm \varrho \text{ und } \delta_1 = \tau \text{ für } k > \frac{1}{2}(n+1) \text{ und} \\ 2. & \delta = \tau m \pm \varrho \text{ und } \delta_1 = \tau \text{ für } k < \frac{1}{2}(n+1). \end{cases}$$

Für $\tau = 0$ ist nach (§. 9.) ***immer*** $k_1 = \frac{1}{2}(n+1)$ für $k \gtrless \frac{1}{2}(n+1)$. Es kommen also hier nur noch die Fälle $\tau > 0$ in Betracht. Für diese Fälle ist aus (19.)

$$(20.)\quad \delta - \delta_1 = \tau(m-1) \pm \varrho.$$

Das ***kleinste*** $m = 3$ ist $m - 1 = 2$, und das zugehörige gröfste $\varrho = \frac{1}{2}(m-1) = 1$; also ist der ***kleinste*** aller möglichen Werthe von $\delta - \delta_1$

$$(21.)\quad \delta - \delta_1 = 2\tau - 1;$$

und dies ist immer ***positiv***, für ***jedes*** $\tau > 0$. Nimmt m zunächst um 2 zu, so nimmt das gröfste $\varrho = \frac{1}{2}(m-1)$ um 1 zu, also das kleinste $\delta - \delta_1$ um $2\tau - 1$, und dann ist $\delta - \delta_1$ ***um so mehr positiv***. Für $m > 3$ ist also $\delta - \delta_1$ ebenfalls ***positiv***. Folglich ist $\delta - \delta_1$ ***immer positiv*** und mithin

$$(22.)\quad \delta > \delta_1 \text{ für } \textit{jedes } k, m \text{ und } n.$$

Es folgt hieraus, dafs k_1 ***immer*** der Mitte ***näher liegt***, als k.

11.

Hieraus folgt demnach, dafs durch die *erste* Umlegung *jedes* Element e_k, indem es zu e_{k_1} wird, ***der Mitte näher rückt***. Also durch die ***zweite*** Umlegung, durch welche e_{k_1} zu e_{k_2} wird, rückt das Element der Mitte ***wiederum näher;*** durch die dritte ebenfalls, und so weiter; und zwar jedesmal ***wenigstens*** um 1, weil $\delta - \delta_1$ (21.) ***mindestens*** $= 1$ ist, für alle $\tau > 0$. Was also auch e_{k_1} sein mag, zu welchem e_k durch die erste Umlegung wird: immer mufs durch eine gewisse Zahl σ von Umlegungen *jedes* Element e_k ***zuletzt in die Mitte*** $\frac{1}{2}(n+1)$ ***gelangen.***

Dies beantwortet die erste der beiden Fragen in (§. 3.) unbedingt mit ***Ja.***

12.

A. Wenn k um $1, 2, 3 \ldots m$ zunimmt, so nimmt zufolge (1.) r ebenfalls um $1, 2, 3 \ldots m$ zu, also bleibt für diese m verschiedenen Werthe von k der Werth von $-k+r$, und folglich vermöge (3.) auch der Werth von k_1 *derselbe.* Also zu je m verschiedenen auf einander folgenden Werthen von k gehört *derselbe* Werth von k_r.

B. Hat k um mehr als m zugenommen, so ist in (1.) λ um 1 gröfser geworden und folglich vermöge (2.) k_1 *um 1* kleiner. Und so weiter für jede Zunahme von k *um* m. Folglich durchläuft k_1, eben wie k, *alle Zahlen*, von seinem gröfsten bis zu seinem kleinsten Werthe.

C. Wie schon aus (3.) zu sehen, nimmt stets k_1 *ab*, wenn k *zunimmt.* In der Mitte $k = \frac{1}{2}(n+1)$ treffen vermöge (§. 9.) beide zusammen.

D. Das *gröfste* k_1 findet also für das *kleinste* $k = 1$ und das *kleinste* k_1 für das *gröfste* $k = n$ Statt. Demnach ist aus (3.)

$$(23.)\quad \begin{cases} 1.\quad k_1 = \dfrac{\frac{1}{2}n(m+1)-1+r}{m} \text{ das } \textit{gröfste } k_1 \text{ und} \\ 2.\quad k_1 = \dfrac{\frac{1}{2}n(m+1)-n+r}{m} = \dfrac{\frac{1}{2}n(m-1)+r}{m} \text{ das } \textit{kleinste } k_1. \end{cases}$$

13.

Ein allgemeiner Ausdruck des Elements, zu welchem nach einer gewissen Zahl von Umlegungen ein beliebiges Element e_k wird, kann aus (3.) auf die Weise gefunden werden, dafs man in (3.) k_1 statt k setzt, welches k_1 giebt, hierauf k_2 statt k_1, welches k_3 giebt, und so weiter. Dabei müssen die r von einander unterschieden werden. Man setze also zufolge (3.), welches wegen $\frac{1}{2}(m+1) = \mu$, $mk_1 = \mu n - k + r$ giebt:

$$(24.)\quad \begin{cases} \mu n - k = mk_1 - r, \\ \mu n - k_1 = mk_2 - r_1, \\ \mu n - k_2 = mk_3 - r_2, \\ \mu n - k_3 = mk_4 - r_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mu n - k_{\sigma-1} = mk_\sigma - r_{\sigma-1}. \end{cases}$$

Hieraus läfst sich leicht durch Elimination ein Ausdruck finden, der nur das *erste* k und das *letzte* k_σ enthält, so dafs das eine durch das andere bestimmt wird.

Multiplicirt man nemlich die Ausdrücke (24.) der Reihe nach mit m^0, $-m^1$, $+m^2$, $-m^3$, ..., so erhält man

$$(25.)\quad \begin{cases} +\mu n - k = +mk_1 - r, \\ -\mu mn + mk_1 = -m^2k_2 + mr_1, \\ +\mu m^2 n - m^2 k_2 = +m^3 k_3 - m^2 r_2, \\ -\mu m^3 n - m^3 k_3 = -m^4 k_4 - m^3 r_3, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^{\sigma-1}(\mu m^{\sigma-1} n - m^{\sigma-1} k_{\sigma-1}) = (-1)^{\sigma-1}(m^\sigma k_\sigma - m^{\sigma-1} r_{\sigma-1}) \end{cases}$$

und hiervon ist die ***Summe***

$$(26.)\quad \mu n(1 - m + m^2 - m^3 \cdots + (-1)^{\sigma-1} m^{\sigma-1}) - k$$
$$= (-1)^{\sigma-1} m^\sigma k_\sigma - r + mr_1 - m^2 r_2 + m^3 r_3 \ldots (-1)^{\sigma-1} r_{\sigma-1},$$

oder, da

$$(1 - m + m^2 - m^3 \cdots + (-1)^{\sigma-1} m^{\sigma-1})(1 + m)$$
$$= 1 - m + m^2 - m^3 \cdots + (-1)^{\sigma-1} m^{\sigma-1}$$
$$+ m - m^2 + m^3 \cdots + (-1)^{\sigma-1} m^{\sigma-1} + (-1)^{\sigma-1} m^\sigma,$$
$$= 1 + (-1)^{\sigma-1} m^\sigma,$$

also

$$(27.)\quad 1 - m + m^2 - m^3 \cdots + (-1)^{\sigma-1} m^{\sigma-1} = \frac{1 + (-1)^{\sigma-1} m^\sigma}{1 + m}$$

ist, so ist in (26.), da $\mu = \frac{1}{2}(m+1)$:

$$(28.)\quad k + (-1)^{\sigma-1} m^\sigma k_\sigma$$
$$= \tfrac{1}{2} n[1 + (-1)^{\sigma-1} m^\sigma] + r - mr_1 + m^2 r_2 - m^3 r_3 \cdots + (-1)^{\sigma-1} m^{\sigma-1} r_{\sigma-1};$$

wo k_σ durch k, oder k durch k_σ bestimmt wird, sobald die r gefunden sind.

Zu bemerken ist, dafs es, da nach (§. 11.) jedes Element e_k für ***jedes*** k durch eine gewisse Zahl σ von Umlegungen in die ***Mitte*** $\frac{1}{2}(n+1)$ von n gelangt, so dafs immer

$$(29.)\quad k_\sigma = \tfrac{1}{2}(n+1)$$

ist, für ***jedes*** k ein σ geben mufs, für welches nach (28.)

$$k + (-1)^{\sigma-1} . m^\sigma . \tfrac{1}{2}(n+1)$$
$$= \tfrac{1}{2} n + \tfrac{1}{2} n(-1)^{\sigma-1} m^\sigma + r - mr_1 + m^2 r_2 - m^3 r_3 \cdots + (-1)^{\sigma-1} \mu^{\sigma-1} r_{\sigma-1} \text{ oder}$$

$$(30.)\quad k = \tfrac{1}{2} n + r - mr_1 + m^2 r_2 - m^3 r_3 \cdots + (-1)^{\sigma-1} m^{\sigma-1} r_{\sigma-1} - \tfrac{1}{2}(-1)^{\sigma-1} m^\sigma$$

ist.

14.

Für ***bestimmte*** n, m und k lassen sich die k der Reihe nach in Zahlen leicht nach den Ausdrücken (24.) berechnen.

Wir wollen diese Berechnung für ein ***etwas grofses n*** und für $k = 1$ hersetzen. Es sei

(31.) $\quad n = 10351$, so dafs $\frac{1}{2}(n+1) = k_\sigma = 5176$ ist.

Dies giebt nach (18.) Folgendes:

Für $m = 3$, also $\mu = \frac{1}{2}(m+1) = 2$.

(32.)
$$\begin{cases} 1. & 2.10351 - \quad 1 = 3.6901 - 2, & \text{also } k_1 = 6901, \\ 2. & 2.10351 - 6901 = 3.4601 - 2, & \text{also } k_2 = 4601, \\ 3. & 2.10351 - 4601 = 3.5368 - 3, & \text{also } k_3 = 5368, \\ 4. & 2.10351 - 5368 = 3.5112 - 2, & \text{also } k_4 = 5112, \\ 5. & 2.10351 - 5112 = 3.5197 - 1, & \text{also } k_5 = 5197, \\ 6. & 2.10351 - 5197 = 3.5169 - 2, & \text{also } k_6 = 5169, \\ 7. & 2.10351 - 5169 = 3.5178 - 1, & \text{also } k_7 = 5178, \\ 8. & 2.10351 - 5178 = 3.5175 - 1, & \text{also } k_8 = 5175, \\ 9. & 2.10351 - 5175 = 3.5176 - 1, & \text{also } k_9 = 5176 \\ & = \frac{1}{2}(n+1) = k_\sigma, & \text{also } \sigma = 9. \end{cases}$$

Für $m = 11$, also $\mu = \frac{1}{2}(m+1) = 6$.

(33.)
$$\begin{cases} 1. & 6.10351 - \quad 1 = 11.5646 - 1, & \text{also } k_1 = 5646, \\ 2. & 6.10351 - 5646 = 11.5133 - 3, & \text{also } k_2 = 5133, \\ 3. & 6.10351 - 5133 = 11.5180 - 7, & \text{also } k_3 = 5180, \\ 4. & 6.10351 - 5180 = 11.5176 - 9, & \text{also } k_4 = 5176 \\ & = \frac{1}{2}(n+1) = k_\sigma, & \text{also } \sigma = 4. \end{cases}$$

Für $m = 199$, also $\mu = \frac{1}{2}(m+1) = 100$.

(34.)
$$\begin{cases} 1. & 100.10351 - \quad 1 = 199.5202 - \ 98, & \text{also } k_1 = 5202, \\ 2. & 100.10351 - 5202 = 199.5176 - 126, & \text{also } k_2 = 5176, \\ & = \frac{1}{2}(n+1) = k_\sigma, & \text{also } \sigma = 2. \end{cases}$$

Für $m = 3$ gelangt also das Element $e_k = 1$ durch die ***neunte***, für $m = 11$ durch die ***vierte*** und für $m = 199$ schon durch die ***zweite*** Umlegung in die ***Mitte*** der mittleren Gruppe, folglich in die Mitte ***aller***, deren Anzahl mn beziehlich $= 31503$, 113861 und 2059849 ist.

15.

Es ist nun weiter die Frage, durch ***wieviele*** Umlegungen ein ***beliebiges*** Element e_k ***in die Mitte*** aller gelangt.

A. Man setze die Zahl k_1 von e_k, auf welche ***eine*** Umlegung führt,

(35.) $\quad k_1 = \frac{1}{2}(n+1) \pm \varepsilon$,

so werden vermöge (3.) die Zahlen aller der Elemente e_k, welche durch die Umlegung *gleichmäfsig* auf e_{k_1} gebracht werden, durch

$$(36.)\quad k = \tfrac{1}{2}n(m+1)+r-mk_1 = \tfrac{1}{2}n(m+1)-\tfrac{1}{2}m(n+1)\mp m\varepsilon+r$$
$$= \tfrac{1}{2}(n-m)\mp m\varepsilon+r$$

ausgedrückt, und es sind dies, da $r = 1, 2, 3 \ldots m$ sein kann, die Zahlen

$$(37.)\quad k = \tfrac{1}{2}(n-m)\mp m\varepsilon+1, 2, 3, \ldots m;$$ an der Zahl m.

Der Reihe nach sind es hier für $\varepsilon = 1, 2, 3, 4 \ldots$ die Zahlen

$$(38.)\quad \begin{cases}
1.\ k = \tfrac{1}{2}(n-m)+ \quad 1,2,3,4,\ldots m \text{ für } \varepsilon = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{also für } k_1 = \tfrac{1}{2}(n+1), \\
2.\ k = \tfrac{1}{2}(n-m)+ m+1,2,3,4,\ldots m = \tfrac{1}{2}(n+ m)+1,2,3,4,\ldots m \\
\qquad\qquad \text{für } \varepsilon = -1, \text{ also } k_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)-1, \\
3.\ k = \tfrac{1}{2}(n-m)+2m+1,2,3,4,\ldots m = \tfrac{1}{2}(n+3m)+1,2,3,4,\ldots m \\
\qquad\qquad \text{für } \varepsilon = +2, \text{ also für } k_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)-2, \\
4.\ k = \tfrac{1}{2}(n-m)+3m+1,2,3,4,\ldots m = \tfrac{1}{2}(n+5m)+1,2,3,4,\ldots m \\
\qquad\qquad \text{für } \varepsilon = +3, \text{ also für } k_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)-3, \\
\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
5.\ k = \tfrac{1}{2}(n-m)- m+1,2,3,4,\ldots m = \tfrac{1}{2}(n-3m)+1,2,3,4,\ldots m \\
\qquad\qquad \text{für } \varepsilon = +1, \text{ also für } k_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)+1, \\
6.\ k = \tfrac{1}{2}(n-m)-2m+1,2,3,4,\ldots m = \tfrac{1}{2}(n-5m)+1,2,3,4,\ldots m \\
\qquad\qquad \text{für } \varepsilon = +2, \text{ also für } k_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)+2, \\
7.\ k = \tfrac{1}{2}(n-m)-3m+1,2,3,4,\ldots m = \tfrac{1}{2}(n-7m)+1,2,3,4,\ldots m \\
\qquad\qquad \text{für } \varepsilon = +3, \text{ also für } k_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)+3; \\
\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}$$

jedesmal m an der Zahl; und *alle* diese k sind von einander ***verschieden*** und schliefsen sich der Reihe nach ***an einander an;*** denn (32. 1. 2. 3. 4. ...) zählen ***ununterbrochen*** vorwärts, und (32. 1. 5. 6. 7. ....) rückwärts.

B. Nun bezeichne man die *mittlere* Zahl $\frac{1}{2}(n+1)$, auf welche die *letzte* Umlegung nothwendig immer führt, durch

$$(39.)\quad K = \tfrac{1}{2}(n+1),$$

und diejenigen Zahlen, welche ***durch*** diese letzte Umlegung auf K ***gebracht werden***, durch K_1, so ist zufolge (38. 1.)

$$(40.)\quad K_1 = \tfrac{1}{2}(n-m)+1, 2, 3, 4, \ldots m.$$

Unter diesen m Zahlen K_1 befindet sich auch $K = \frac{1}{2}(n+1)$ ***selbst***, nemlich $K_1 = \frac{1}{2}(n-m)+\frac{1}{2}(m+1) = \frac{1}{2}(n+1)$. Also sind es nicht m, sondern nur $m-1$, von $K = \frac{1}{2}(n+1)$ ***verschiedene*** Zahlen K_1, welche durch die *letzte*

Umlegung auf K gebracht werden. Die eine ***Hälfte*** davon ist gröfser, die andere kleiner als $\frac{1}{2}(n+1)$.

C. Da nun die Zahlen, auf welche die gegebenen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots . n$ durch ***eine*** Umlegung gebracht werden, nach (§. 12. *B.*) ***alle*** Zahlen von ihrer gröfsten bis zur kleinsten durchlaufen, so kann man, statt wie in (*B.*) von $K = \frac{1}{2}(n+1)$, auch von $K \pm \varepsilon$ ausgehen.

Geht man von $K \pm 1$ aus, so giebt dies $2m$ neue Zahlen K. Und wenn man Dies auf die $m-1$ Zahlen K_1 in (40.) anwendet, die auch durch $K+1, 2, 3, \ldots . \frac{1}{2}(m-1) = \frac{1}{2}(n+1) \pm 1, 2, 3, \ldots . \frac{1}{2}(m-1)$ ausgedrückt werden, so erhält man $\frac{1}{2}(m-1).2m = m(m-1)$ neue Zahlen.

D. Betrachtet man weiter für die ***vorletzte*** Umlegung diese $m(m-1)$ neue Zahlen als die $K \pm \varepsilon$ in (*C.*), so erhält man $m^2(m-1)$ neue Zahlen. Ferner für die ***vorvorletzte*** Umlegung $m^3(m-1)$ neue Zahlen. Und so weiter.

Also werden durch σ Umlegungen zusammen

$$1 + (m-1) + m(m-1) + m^2(m-1) + m^3(m-1) \cdots + m^{\sigma-1}(m-1)$$

$$(41.) \qquad = m^\sigma,$$

sämmtlich von einander verschiedene e_k zum ***mittleren*** $e_{k\sigma} = \frac{1}{2}(n+1)$.

E. Es sind aber nur n verschiedene e_k vorhanden; also werden diese alle durch σ Umlegungen in die Mitte gebracht, sobald

$$(42.) \qquad m^\sigma > n \quad \text{und} \quad m^{\sigma-1} < n \text{ ist.}$$

Es können aber auch Elemente e_k schon durch ***weniger*** als $\sigma - 1$ Umlegungen in die Mitte gebracht werden, wenn k nicht eine der ***äufsersten*** Zahlen 1 oder n ist: ***mehr*** als σ Umlegungen sind für keine der $k = 1, 2, 3, \ldots n$ nöthig.

In den Beispielen (32, 33, 34.) zeigt sich Dies. Nemlich es ist

Die $\sigma = 9$te Potenz von $m = 3$ ***zuerst*** gröfser als $n = 10351$, nemlich $= 19683$, während 3^8 erst $= 6561$ ist, so dafs also $\sigma = 9$ Umlegungen die ***äufserste*** Zahl $k = 1$ in die Mitte bringen.

Die $\sigma = 4$te Potenz von $m = 11$ ist zunächst gröfser als $n = 10351$, nemlich $= 14641$, während 11^3 erst 1331 ist; also bringen $\sigma = 4$ Umlegungen die ***äufserste*** Zahl $k = 1$ in die Mitte.

Die $\sigma = 2$te Potenz von $m = 199$ ist $= 39601 > n = 10351$; also bringen schon $\sigma = 2$ Umlegungen die äufserste Zahl 1 in die Mitte.

F. Für $m = n$ ist nach (41.) $\sigma = 1$; also wenn die Zahl m der ***Gruppen*** der Zahl n der ***Elemente*** in jeder *gleich* ist, bringt schon die ***erste*** Umlegung ***jedes*** Element e_k in die ***Mitte.***

16.

Wir wollen die Ergebnisse des vorigen Paragraphs durch die Beispiele in (§. 5.), also an $n = 53$ versinnlichen.

Für $m = 3$ erhält man

(43.)

I.	II.	III.	IV.	V.
27	26	23 24 25	14 15 16 17 18 19 20 21 22	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
	28	29 30 31	32 33 34 35 36 37 38 39 40	41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53

Für $m = 5$ ergiebt sich

(44.)

I.	II.	III.	IV.
27	25	15 16 17 18 19	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
	26	20 21 22 23 24	40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53
	28	30 31 32 33 34	
	29	35 36 37 38 39	

In (43. und 44.) steht in der Spalte I. die *mittlere* Zahl $27 = \frac{1}{2}(n+1)$.

In der Spalte II. stehen in (43.) die $m-1 = 2$ Zahlen 28 und 26, und in (44.) die $m-1 = 4$ Zahlen 28, 29 und 25 und 26, welche an die mittlere vor und zurück sich anschliefsen und welche durch ***eine*** Umlegung auf die mittlere gebracht werden.

In Spalte III. stehen in (43.) die $(m-1)m = 2.3 = 6$ Zahlen 29 bis 31 und 23 bis 25, und in (44.) die $(m-1)m = 4.5 = 20$ Zahlen 30 bis 39 und 15 bis 24, welche an die in (II.) vor und zurück sich anschliefsen und welche durch ***eine*** Umlegung auf die Zahlen in (II.), also durch ***zwei*** Umlegungen auf die *mittlere* gebracht werden.

In Spalte IV. stehen in (43.) die $(m-1)m^2 = 2.9 = 18$ Zahlen 32 bis 40 und 14 bis 22, und in (44.) die ***noch übrigen*** gröfsten und kleinsten Zahlen 40 bis 53 und 1 bis 14, welche an die in (III.) vor und zurück sich anschliefsen und welche durch ***eine*** Umlegung auf die Zahlen in (III.), also durch ***drei*** Umlegungen auf die ***mittlere*** gebracht werden.

In Spalte V. stehen in (43.) die noch ***übrigen*** gröfsten und kleinsten Zahlen 41 bis 53 und 1 bis 13, welche an die in (IV.) vor und zurück sich anschliefsen und durch ***eine*** Umlegung auf die Zahlen in (IV.), folglich durch ***vier*** Umlegungen auf die ***mittlere*** gebracht werden.

Hieraus ist leicht zu übersehen, wie es sich ***allgemein,*** für beliebige n, m und k verhalte.

Erstlich. Von den $k > \frac{1}{2}(n+1)$ werden folgende auf die *mittlere* gebracht:

(45.)
$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Durch } \textit{eine} \text{ Umlegung die } \frac{1}{2}(m-1) \text{ Zahlen } \frac{1}{2}(n+1)+1 \\
\qquad \text{bis } \frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{2}(m-1) = \frac{1}{2}(n+m), \\
\text{Durch } \textit{zwei} \text{ Umlegungen die } \frac{1}{2}(m-1)m \text{ Zahlen } \frac{1}{2}(n+m)+1 \\
\qquad \text{bis } \frac{1}{2}(n+m)+\frac{1}{2}(m-1)m = \frac{1}{2}(n+m^2), \\
\text{Durch } \textit{drei} \text{ Umlegungen die } \frac{1}{2}(m-1)m^2 \text{ Zahlen } \frac{1}{2}(n+m^2)+1 \\
\qquad \text{bis } \frac{1}{2}(n+m^2)+\frac{1}{2}(m-1)m^2 = \frac{1}{2}(n+m^3), \\
\quad . \quad . \quad . \

(50.)
$$\begin{cases} \text{Für } \textit{eine} \text{ Umlegung} & \mathfrak{z}_1 = m-1, \\ \text{Für } \textit{zwei} \text{ Umlegungen} & \mathfrak{z}_2 = (m-1)m, \\ \text{Für } \textit{drei} \text{ Umlegungen} & \mathfrak{z}_3 = (m-1)m^2, \\ \quad . \quad . \quad .

Für $m = 11$.

(54.)
- Durch *eine* Umlegung die $m-1 = 10$ Zahlen 5177 bis 5181 und 5171 bis 5175,
- Durch *zwei* Umlegungen die $(m-1)m = 110$ Zahlen 5182 bis 5236 und 5116 bis 5170,
- Durch *drei* Umlegungen die $(m-1)m^2 = 1210$ Zahlen 5237 bis 5841 und 4511 bis 5115,
- Durch *vier* Umlegungen die $n - m^3 = 9020$ Zahlen 5842 bis 10351 und 1 bis 4510.

Für $m-199$.

(55.)
- Durch eine Umlegung die $m-1 = 198$ Zahlen 5177 bis 5275 und 5077 bis 5175,
- Durch zwei Umlegungen die $n - m = 10152$ Zahlen 5276 bis 10351 und 1 bis 5076.

Hierdurch ist auch die *zweite* Frage in (§. 3.) beantwortet und also die erste Aufgabe vollständig gelöset.

Zweite Aufgabe, zur Auflösung.

17.

Diese Aufgabe wird ebenfalls durch ein ***Spiel*** veranlafst. Dasselbe wird von einer einzelnen Person gespielt und ist folgendes.

Auf einer Tafel von der hier folgenden Gestalt

(56.)

		9	10	7		
		11	12	3		
20	21	19	8	4	6	5
23	29	18	0	2	1	15
22	32	24	25	14	17	16
		31	27	13		
		30	26	28		

sind die 32 Felder, auf welchen die in der Figur bemerkten Zahlen stehen, mit Marken belegt. Blofs das 33te, mittlere Feld ist ***nicht*** belegt. Nun darf man jede Marke, wagerecht, links oder rechts, desgleichen senkrecht, nach

oben oder nach unten, auf das *zweite* Feld versetzen und dabei die *übersprungene* Marke *wegnehmen*. Es wird verlangt, dies so zu thun, dafs 31 Marken weggenommen werden und dafs zuletzt die einzige übrig gebliebene Marke auf das *mittlere* Feld 0 gelangt.

Möglich zu erfüllen ist das Verlangte durch folgendes Verfahren.

(57.)

	Man versetze die Marke des Feldes	nach dem Felde	und nehme weg die Marke des Feldes
1.	No. 1	No. 0	No. 2
2.	3	2	4
3.	5	4	6
4.	2	3	4
5.	7	4	3
6.	8	6	4
7.	9	7	10
8.	11	3	12
9.	7	4	3
10.	6	8	4
11.	13	2	14
12.	0	1	2
13.	15	2	1
14.	16	14	17
15.	2	13	14
16.	18	11	19
17.	20	19	21
18.	8	21	19
19.	22	20	23
20.	20	19	21
21.	11	18	19
22.	24	14	25
23.	26	25	27
24.	25	17	14
25.	28	14	13
26.	17	25	14
27.	29	0	18
28.	0	27	25
29.	30	24	31
30.	32	25	24
31.	27	0	25

Da bei jeder der 31 Versetzungen eine Marke *weggenommen* wird, so bleibt nur die letzte, 32te Marke übrig, und diese gelangt am Schlufs nach dem Felde Nr. 0.

18.

Die mathematische Aufgabe wäre nun: zu sagen, ob auch noch *andere*, wesentlich von dem obigen und von einander verschiedene Verfahren aufser demjenigen (57.) möglich sind, und *welche*, und *wieviele*. *Vier* Verfahren sind, wie leicht zu sehen, möglich, denn es ist augenscheinlich gleich, ob man bei der *ersten* Versetzung 1, oder 12, oder 29, oder 27 nach Null setzt und 2, oder 8, oder 18, oder 25 wegnimmt. Aber ob das Weitere *wesentlich*, oder nur der *Lage* im Allgemeinen nach, anders sein kann, ist die Frage.

Die Auflösung der Aufgabe dürfte ziemlich schwierig sein.

Berlin im Juni 1852.

20.

Über symmetrische Figuren.

(Von dem Herrn Professor *Möbius* zu Leipzig.)

(Aus den Berichten der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig von 1851.)

Seit dem im Sommer des Jahres 1849 von mir „Über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und über die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme" gegebenen Berichte habe ich mich mehrfach mit der Symmetrie geometrischer Figuren überhaupt beschäftigt. Ich beabsichtige jetzt, von Dem, was ich in dieser Beziehung gefunden, Einiges im Auszuge mitzutheilen, will aber vorher bemerken, dafs gleichzeitig mit jenem Berichte, Herr ***Bravais*** in Paris über denselben Gegenstand eine sehr erschöpfende und in echt geometrischem Geiste geschriebene Denkschrift*) veröffentlicht hat, die mir bei meinen späteren Untersuchungen, insonderheit rücksichtlich der von ihm mit dem Ausdrucke *polyèdres symétriques sphéroédriques* bezeichneten Figuren, von Nutzen gewesen ist.

So wie jede Gröfse sich selbst gleich ist, so ist auch jede Figur sich selbst gleich und ähnlich. Es giebt aber Figuren, welche sich selbst auf mehr als eine Art gleich und ähnlich sind; und solche Figuren sollen symmetrische genannt werden.**)

*) ***Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique; par M. A. Bravais, professeur à l'école polytechnique.*** (***Extrait du journal de mathématiques pures et appliquées, tome XIV.*** 1849.)

**) Oder, wie ich mich früher ausgedrückt hatte: eine Figur soll symmetrisch heifsen, wenn sie einer ihr gleichen und ähnlichen Figur auf mehr als eine Art gleich und ähnlich gesetzt werden kann. (Berichte für 1849, Seite 67.)

Von Herrn ***Bravais*** wird das Wesen der Symmetrie durch folgende Definitionen bestimmt:

I. ***Je nommerai centre de symétrie d'un polyèdre, un point C, tel, qu'en le joignant à un sommet quelconque S du polyèdre, et prolongeant SC d'une quantité égale à elle-même, le point s ainsi obtenu, soit aussi un sommet du polyèdre.***

II. ***Je nommerai axe du symétrie d'un polyèdre, une droite AB, telle, qu'en faisant tourner le polyèdre d'un angle*** (*une partie aliquote de* 360°) ***autour de AB, les nouveaux lieux des sommets coïncident avec les anciens.***

Zwei Figuren heifsen einander *gleich und ähnlich*, wenn jedem Puncte der einen Figur ein Punct der andern dergestalt entspricht, dafs der gegenseitige Abstand je zweier Puncte der einen Figur dem gegenseitigen Abstande der zwei entsprechenden Puncte der andern Figur gleich ist.

Dafs zwei Systeme von Puncten

$$A, B, C, D, E \text{ und } M, N, O, P, Q$$

einander gleich und ähnlich sind, wobei je zwei gleichvielte Buchstaben der beiden Reihen, also A und M, B und N, C und O, u. s. w. einander entsprechende Puncte bezeichnen: Dies wollen wir durch die Gleichung

$$ABCDE = MNOPQ$$

ausdrücken, oder besser noch durch

$$\begin{matrix} ABCDE \\ = MNOPQ, \end{matrix}$$

indem bei letzterer Form die einander entsprechenden Puncte über einander stehen, und man somit ungleich leichter, als bei der ersten Form, wahrnimmt, wie die Puncte des einen und des andern Systems als einander entsprechend zusammengehören. So ersieht man z. B. aus letzterer Form auf den ersten Blick, dafs die Linien BD und NP gleiche Länge haben; dafs die Winkel ACE und MOQ von gleicher Gröfse sind; dafs, je nachdem die Puncte A und B auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten der Ebene CDE liegen, auch M und N auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten der Ebene OPQ sich befinden; und was sonst noch aus dem Begriffe der Gleichheit und Ähnlichkeit gefolgert werden kann.

Die Ordnung übrigens, in welcher man die Buchstaben der einen der beiden Reihen, etwa der obern, auf einander folgen läfst, ist offenbar ganz willkürlich, dafern man nur unter jeden Buchstaben derselben den ihm ent-

---

III. Je nommerai plan de symétrie du polyèdre un plan, tel, qu'en abaissant d'un sommet quelconque S une perpendiculaire sur ce plan, et la prolongeant d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité Σ ainsi obtenue soit aussi un sommet du polyèdre.

IV. Nous pouvons maintenant définir .. un polyèdre symétrique, celui qui possédera, soit un centre de symétrie, soit un ou plusieurs axes de symétrie, soit un ou plusieurs plans de symétrie.

Was Herrn *Bravais* zur Aufstellung dieser verschiedenartigen Kennzeichen der Symmetrie in Bezug auf einen Punct, eine Gerade und eine Ebene Veranlassung gegeben hat, geht aus seiner Abhandlung nicht hervor. Wie indessen das Folgende lehren wird, entspringen diese Kennzeichen sämmtlich aus meiner Definition der Symmetrie, als gemeinschaftlicher Quelle, und alle nach Herrn *Bravais* symmetrisch zu nennenden Figuren sind es auch nach mir; so wie umgekehrt.

sprechenden der andern Reihe setzt, und man kann daher z. B.

$$\text{statt } \begin{matrix} ABCDE \\ = MNOPQ \end{matrix} \text{ auch schreiben } \begin{matrix} BEADC \\ = NQMPO. \end{matrix}$$

Oder mit andern Worten, indem man je zwei über einander stehende Buchstaben der Gleichung schlechthin ein *Paar* nennt: die Aufeinanderfolge der Paare kann willkürlich geändert werden; nur müssen alle anfänglich in einer Reihe befindlichen Buchstaben auch nachher in einer Reihe bleiben.

Dies vorausgeschickt, wird nach der im Obigen gegebenen Definition symmetrischer Figuren die bei einem System von Puncten Statt findende Symmetrie immer durch eine Gleichung ausgedrückt werden können, indem man nämlich die die Puncte des Systems bezeichnenden Buchstaben in beliebiger Aufeinanderfolge einer andern Aufeinanderfolge derselben Buchstaben gleich setzt; z. B.

$$\begin{matrix} ABC \\ = CBA, \end{matrix} \text{ oder } \begin{matrix} ABC \\ = CAB. \end{matrix}$$

Aus der ersteren dieser zwei Gleichungen würde blofs folgen: $AB = CB$; aus der letzteren dagegen: $AB = CA = BC$. Das Dreieck ABC würde daher im ersteren Falle ein gleichschenkliges und B dessen Spitze, im letzteren ein gleichseitiges sein; beiderlei Dreiecke aber würden, der Definition gemäfs, symmetrische Figuren zu nennen sein.

Um nun von den hiernach möglichen verschiedenen Arten symmetrischer Figuren eine Übersicht zu gewinnen, wollen wir zunächst die an sich willkürliche Aufeinanderfolge der verschiedenen Paare, aus denen eine Gleichung besteht, nach der Regel ordnen, dafs auf jedes Paar, wo es möglich ist, zunächst dasjenige folgt, dessen oberer Buchstabe einerlei mit dem untern Buchstaben des vorhergehenden Paares ist. Ist man auf solche Weise, von einem beliebigen Paare der Gleichung ausgehend, zu dem Paare gelangt, dessen unterer Buchstabe einerlei mit dem obern Buchstaben des Ausgangspaares ist, so kann man als nächstes Paar, wenn anders noch deren in der Gleichung vorhanden sind, abermals ein beliebiges unter den noch übrigen wählen. Von diesem, als neuem Anfangspaare, geht man nach der bemerkten Regel bis zu demjenigen fort, dessen unterer Buchstabe identisch mit dem obern des neuen Anfangspaares ist, und wiederholt dieses Verfahren, bis alle Paare der Gleichung erschöpft sind. Was den speciellen Fall anlangt, wenn bei einem oder etlichen Paaren der untere Buchstabe derselbe wie der obere sein sollte, so wird, da in keiner der beiden Reihen derselbe Buchstabe mehr als ein-

mal vorkommen kann, durch ein solches Paar kein weiterer Fortgang bedingt, und das nächstfolgende Paar kann ein beliebiges unter den noch übrigen sein.

Nach einer solchen Umwandlung der Gleichung besteht sie nunmehr aus einer oder mehreren Gruppen von Paaren, bei deren jeder das erste Paar eben so von dem letzten, wie jedes der übrigen von dem nächstvorhergehenden abhangt. Ich will daher solche Gruppen ***Perioden*** nennen und sie nach der Zahl der Paare, aus denen sie zusammengesetzt sind, in ***eingliedrige***, ***zweigliedrige***, ***dreigliedrige*** u. s. w. unterscheiden.

So werden z. B. die zwei obigen Gleichungen für das gleichschenklige und das gleichseitige Dreieck, periodisch geordnet, folgende sein:

$$\begin{array}{ll} & ACB \\ = & CAB \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & ACB \\ = & CBA. \end{array}$$

Die erste derselben besteht aus einer zwei- und einer eingliedrigen, die zweite aus einer dreigliedrigen Periode.

Auf dieselbe Art verwandelt sich die Gleichung

$$\begin{array}{ll} & ABCDEFG \\ = & FGBCEAD \end{array} \text{ in } \begin{array}{ll} & AFCBGDE \\ = & FABGDCE \end{array} \quad \ldots \quad (x)$$

und zerfällt somit in eine zwei-, eine vier- und eine eingliedrige Periode.

Durch diese periodische Anordnung einer Gleichung ist nun zugleich der Weg gebahnt, um die Gestalt des in ihr begriffenen Systems von Puncten näher zu bestimmen.

Nehmen wir für's Erste an, dafs die Gleichung nur aus Einer Periode bestehe.

Ist die Periode eingliedrig, so drückt die Gleichung nichts Anderes als das Gesetz der Indentität aus, wie $A = A$. Eben so wird die Gleichung mit einer zweigliedrigen Periode, wie $AB = BA$, immer erfüllt, welches auch die Örter von A und B sein mögen. Die Gleichung mit einer dreigliedrigen Periode giebt, wie wir bereits gesehen haben, ein gleichseitiges Dreieck zu erkennen. Bei vier- und mehrgliedrigen Perioden ist zu unterscheiden, ob die Construction auf eine Ebene beschränkt sein, oder im Raume überhaupt ausgeführt werden soll. Im ersteren Falle giebt die Construction einer Gleichung mit einer $n$gliedrigen Periode, wie

$$\begin{array}{ll} & ABCD \ldots MN \\ = & ACDE \ldots NA, \end{array}$$

ein gewöhnliches reguläres nEck, indem, der Gleichung zufolge, $AB = BC$,

$BC = CD$, etc. und $ABC = BCD$, $BCD = CDE$, etc. ist, und folglich sowohl die Seiten, als die Winkel des nEks $AB \ldots N$ einander gleich sind.

Dasselbe reguläre nEck thut der Gleichung auch im Falle einer räumlichen Construction Genüge. Auch wird in diesem Falle die Gleichung durch keine andere Figur befriedigt, sobald n ungerade ist. Ist aber n gerade, so läfst sich noch eine andere Construction anwenden. Man beschreibe nämlich in einer Ebene ein reguläres nEck $A'B'C' \ldots M'N'$ und errichte, abwechselnd auf der einen und der andern Seite der Ebene, gleich lange Perpendikel $A'A$, $B'B, C'C, \ldots N'N$, so dafs $A, C, E, \ldots M$ auf die eine, und $B, D, F, \ldots N$ auf die andere Seite der Ebene zu liegen kommen. Die somit entstehende, nicht ebene Figur $ABC \ldots N$ befriedigt ebenfalls die Gleichung und könnte gleichfalls ein reguläres Vieleck genannt werden, da sie mit dem gewöhnlichen regulären Vieleck die Haupt-Eigenschaft gemein hat, dafs je zwei Diagonalen derselben, welche gleich viele Seiten überspannen, wie AD und BE, gleich lang sind. Ein solches nicht ebenes reguläres Vieleck $AB \ldots MN$ hat übrigens die Eigenthümlichkeit, dafs es mit der Figur $BC \ldots NA$ nicht zur Deckung gebracht werden kann, so dafs A auf B, B auf C, etc. fiele.

Noch eine besondere Constructionsart der Gleichung ist in dem Falle ausführbar, wenn die gerade Zahl n das Doppelte einer ungeraden Zahl, also $= 6$, oder 10, oder 14, etc. ist. Um Dies hier nur für $n = 6$ zu zeigen, construire man ein reguläres Dreieck $A_1B_1C_1$ und errichte, wie vorhin, abwechselnd nach oben und nach unten, auf der horizontal anzunehmenden Dreiecks-Ebene die gleich langen Perpendikel A_1A, B_1B, C_1C, A_1D, B_1E, C_1F. Die hieraus entspringende Figur $ABCDEF$ wird gleichfalls der Gleichung

$$\begin{matrix} ABCDEF \\ = BCDEFA \end{matrix}$$

Genüge thun und aus demselben Grunde wie vorhin ein reguläres Sechseck in weiterem Sinne zu nennen sein.

Gehen wir jetzt zur Construction einer Gleichung fort, welche mehr als eine Periode enthält; und dies unter der die Betrachtung vereinfachenden Annahme, dafs keine zwei Puncte der Gleichung bei der Construction zusammenfallen. Werden nämlich zwei Reihen, welche dieselben Buchstaben, nur in verschiedener Ordnung enthalten, einander gleich gesetzt, so wird es sich meistens treffen, dafs bei Construction dieser Gleichung zwei oder mehrere Puncte zusammenfallend angenommen werden müssen. Sollte z. B. die oben mit (x) bezeichnete Gleichung in einer Ebene construirt werden, so müfste

man entweder A und F getrennt und C, B, G, D, E in der Mitte zwischen A und F vereinigt annehmen, oder man hätte ein Quadrat $CBGD$ zu verzeichnen, in dessen Mittelpuncte A, F, E zusammenfielen. Da aber eine Figur dadurch, dafs man mit einem ihrer Puncte noch einen oder mehrere vereinigt sein läfst, nicht geändert wird, so werde ich zugleich mit bemerken, wie die Gleichung beschaffen sein mufs, damit man nicht nöthig hat, zwei oder mehrere verschiedenartig in der Gleichung bezeichnete Puncte zusammenfallen zu lassen.

1) Soll die Gleichung in einer geraden Linie construirt werden können, so müssen alle Perioden der Gleichung zweigliedrig sein; bis auf eine, welche eingliedrig sein kann. Die Construction aber besteht darin, dafs man in der Geraden, von einem und demselben in ihr gelegenen Puncte die zwei Puncte jeder zweigliedrigen Periode gleichweit nach entgegengesetzten Seiten entfernt annimmt und jenen Punct den Ort des Punctes der eingliedrigen Periode sein läfst; wenn anders eine solche vorhanden ist. In der That kann ein System von Puncten in einer Geraden, aufserdem, dafs man jeden Punct sich selbst entsprechend setzt, nur noch auf Eine Art sich selbst gleich und ähnlich sein; dergestalt nämlich, dafs, wenn A, B, C, D, E die Puncte des Systems, und zwar in derselben Ordnung, in welcher sie in der Linie auf einander folgen, bezeichnen, sie resp. den Puncten E, D, C, B, A entsprechen. Dies giebt für die Symmetrie des Systems die Gleichung

$$= \begin{matrix} ABCDE \\ EDCBA, \end{matrix} \quad \text{oder, periodisch geordnet:} \quad = \begin{matrix} AEBDC \\ EADBC: \end{matrix}$$

eine Gleichung, welche aus zwei zweigliedrigen und einer eingliedrigen Periode zusammengesetzt ist. Zugleich geben die speciellen, hieraus folgenden Gleichungen

$$ACE = ECA \quad \text{und} \quad BCD = DCB$$

zu erkennen, dafs C der gemeinschaftliche Mittelpunct von AE und BD ist.

2) Soll die Gleichung in einer Ebene construirt werden können, so kann eine Periode eingliedrig sein; alle übrigen aber müssen gleichvielgliedrig sein. Heifst n die gemeinschaftliche Gliederzahl dieser Perioden, so erzeugt jede derselben ein reguläres nEck, dessen Gröfse willkürlich ist, und die gegenseitige Lage dieser nEcke ist blofs dadurch bedingt, dafs sie einen gemeinsamen Mittelpunct haben, der zugleich der Ort des Puncts der eingliedrigen Periode ist.

In dem besondern Falle, wenn $n=2$, ist aufser der eben bemerkten Constructionsweise noch eine andere zuläfslich. Man kann nämlich den geraden Linien oder Zweiecken, welche die zwei Puncte der verschiedenen zweigliedrigen Perioden verbinden, entweder, dem Vorigen analog, eine solche Lage in der Ebene geben, dafs ihre Mittelpuncte zusammenfallen, oder auch eine solche Lage, dafs sie von einer und derselben Geraden rechtwinklig halbirt werden. Im letzteren Falle können übrigens noch unbeschränkt viele eingliedrige Perioden in der Gleichung vorhanden sein; die Örter ihrer Puncte sind willkürlich in der halbirenden Geraden anzunehmen.

3) Ist eine Gleichung im Raume zu construiren, so müssen, abgesehen von den ein- und den zweigliedrigen Perioden, alle übrigen gleichvielgliedrig *) (es sei $n$gliedrig) sein. Sind nächst den $n$gliedrigen noch eine oder mehrere zweigliedrige vorhanden, so kann nur noch eine eingliedrige Statt finden, und wenn es der letztern mehr als eine giebt, so kann keine zweigliedrige vorhanden sein. Versteht man nun unter „Axe eines regulären ebenen Vielecks" eine durch seinen Mittelpunct gelegte und auf seiner Ebene normale Gerade, und unter „Mittelpunct und Axe eines regulären, nicht ebenen Vielecks" den Mittelpunct und die Axe des zu seiner Construction zu Hülfe genommenen ebenen Vielecks, so hat man die $n$gliedrigen Perioden der Gleichung durch eben so viele reguläre nEcke mit gemeinschaftlicher Axe **) darzustellen; wobei noch zu bemerken, dafs, wenn n gerade ist und man eine, oder etliche, oder alle Perioden als nicht ebene nEcke construirt, nicht nur die Axe, sondern auch die Mittelpuncte sämmtlicher nEcke zusammenfallen müssen. Eben so müssen die Mittelpuncte aller nEcke auch dann coïncidiren, wenn die Gleichung eine oder mehrere zweigliedrige Perioden enthält; die Puncte der letztern sind in der gemeinsamen Axe anzunehmen, in welcher sie in Bezug auf den gemeinsamen Mittelpunct eine symmetrische Figur für sich bilden; und dieser Mittelpunct ist der Ort des Puncts der etwa noch anwesenden eingliedrigen Periode. Sind, nächst den $n$gliedrigen, zwei oder mehrere Perioden eingliedrig, in welchem Falle, wie schon erinnert, keine

---

*) Doch können in dem Falle, wenn n eine ungerade Zahl >1 ist, $n$gliedrige und $2n$gliedrige Perioden zugleich in der Gleichung vorkommen. Die erstern sind dann als ebene reguläre nEcke und die letztern als nicht ebene reguläre $2n$Ecke von der gedachten besondern Art zu construiren; sämmtliche Vielecke aber müssen eine gemeinsame Axe und einen gemeinsamen Mittelpunct haben.

**) *Axe de symétrie,* nach Herrn *Bravais;* nur dafs dort die regulären nEcke, welche der Axe angehören, blofs ebene sind.

Periode zweigliedrig sein darf, so sind nur *ebene* reguläre nEcke zuläfslich, in deren gemeinsamer Axe die Puncte der eingliedrigen Perioden beliebig bestimmt werden können.

Eines der einfachsten hierhergehörigen Beispiele giebt die räumliche Construction der obigen Gleichung (x) ab. Hier ist $CBGD$ ein reguläres, ebenes oder auch nicht ebenes Viereck und E sein Mittelpunct; A und F aber sind zwei Puncte, welche in seiner Axe auf verschiedenen Seiten und gleichweit von E entfernt liegen.

Wenn endlich, abgesehen von den eingliedrigen, alle übrigen Perioden der Gleichung nur zweigliedrig sind, so kann die räumliche Construction auf dreifache Weise ausgeführt werden. Es müssen nämlich die Linien, welche die Paare von Puncten, aus denen die zweigliedrigen Perioden gebildet werden, einzeln verbinden, entweder einen gemeinsamen Mittelpunct *) haben, oder sie alle müssen von einer und derselben Geraden **), oder sie alle von einer und derselben Ebene ***) rechtwinklig halbirt werden. Die erste dieser Constructionsweisen ist jedoch nur dann anwendbar, wenn in der Gleichung entweder keine, oder blofs eine eingliedrige Periode vorhanden ist; der Ort des Puncts dieser Periode ist der gedachte Mittelpunct. Bei der zweiten und dritten Weise kann die Anzahl der eingliedrigen Perioden jede beliebige sein, und die Puncte dieser Perioden können willkürlich in der halbirenden Geraden, resp. Ebene genommen werden. Übrigens ist die Symmetrie, welche eine nach der dritten Weise construirte Figur besitzt, Symmetrie in dem bisher fast allein gebräuchlichen Sinne des Worts.

Die bisher betrachteten symmetrischen Figuren ergaben sich dadurch, dafs wir einer zwischen mehren Puncten aufgestellten Gleichung Genüge zu leisten suchten. Indessen sind dies nur die einfachsten symmetrischen Figuren. Denn man kann fordern, dafs eine Figur zwei oder mehreren, zwischen ihren Puncten bestehenden, von einander unabhängigen Gleichungen zugleich Genüge thut: dafs z. B. durch die gegenseitige Lage von vier Puncten A, B, C, D jede der beiden Gleichungen

$$ABCD = BADC \text{ und } ADBC = DACB,$$

---

*) *Centre de symétrie*, nach Herrn *Bravais*.
**) *Axe de symétrie binaire*, nach Herrn *Bravais*.
***) *Plan de symétrie*, nach Herrn *Bravais*.

oder jede der beiden Gleichungen

$$ACBD = ACDB \text{ und } ACBD = CABD$$

zugleich erfüllt wird. Wie man leicht sieht, sind die damit geforderten Figuren, wenn sie als ebene construirt werden, resp. ein Rechteck und ein Rhombus. Solche, durch zwei oder mehrere Gleichungen bestimmte Figuren besitzen im Allgemeinen *) einen höheren Grad von Symmetrie, und erfordern zu ihrer Discussion neue Betrachtungsweisen. Das Umfängliche dieses Gegenstandes verhindert mich, gegenwärtig näher darauf einzugehen; indessen gedenke ich, später in einer gröfseren Abhandlung die Lehre von symmetrischen Figuren nach der von mir gegebenen Definition möglichst vollständig darzustellen. Hier bemerke ich nur noch, dafs die symmetrischen Figuren von der letztgedachten zusammengesetzteren Art es sind, deren Untersuchung Herr ***Bravais*** seine im Eingange dieses Berichtes erwähnte Denkschrift vorzugsweise gewidmet und deren verschiedenen Formen er zu classificiren gesucht hat.

---

*) Denn dafs es Ausnahmen giebt, beweisen schon die angeführten Beispiele vom Oblongum und Rhombus, welche weniger symmetrisch, als das schon durch die eine Gleichung

$$ABCD = BCDA$$

bestimmte Quadrat sind. Am sichersten dürfte der Grad der Symmetrie einer Figur durch die Zahl bestimmt werden, welche angiebt, auf wie viele verschiedene Arten die Figur sich gleich und ähnlich ist. Diese Zahl ist 8 beim Quadrat, 4 beim Oblongum und Rhombus und 2 bei dem Viereck, welches der Gleichung

$$ACBD = CADB$$

entspricht und entweder ein Rhomboïd, oder ein solches Viereck ist, in welchem zwei Seiten einander parallel, aber nicht gleich, und die beiden andern Seiten einander gleich, aber nicht parallel sind; so wie 2 auch bei dem durch die Gleichung

$$ACBD = ACDB$$

definirten Viereck, d. i. bei demjenigen, in welchem zwei an einander stofsende Seiten (*AB* und *AD*) für sich, und eben so die beiden andern Seiten (*CB* und *CD*) für sich einander gleich sind.

21.

Recherches sur les coefficients des facultés analytiques.

(Par Mr. le Dr. *O. Schlömilch,* Prof. d'Analyse à l'école royale polytechnique de Dresde.)

En adoptant la définition de Mr. *Crelle,* nous appelerons *faculté analytique* une fonction de deux variables x et μ, qui satisfait aux deux conditions

$$(1.) \quad f(x, \mu+k) = f(x, \mu).f(x+\mu, k),$$

$$(2.) \quad f(x, 1) = x.$$

De ces équations on tire, en faisant $k=1$ et $\mu = 1, 2, 3,$ etc.:

$$f(x, 2) = f(x, 1).f(x+1, 1) = x(x+1),$$
$$f(x, 3) = f(x, 2).f(x+2, 1) = x(x+1)(x+2),$$
etc.,

et en désignant par n un nombre entier positif:

$$(3.) \quad f(x, n) = x(x+1)(x+2) \ldots (x+n-1).$$

Pour trouver la valeur de $f(x, 0)$, nous faisons $\mu = 0$ et $k = 1$, ce qui donne

$$f(x, 1) = f(x, 0).f(x, 1)$$

et

$$(4.) \quad f(x, 0) = 1.$$

Pour trouver la valeur de $f(x, -n)$, nous faisons $\mu = -n$ et $k = n$; l'équation (1.) donne alors

$$f(x, 0) = f(x, -n).f(x-n, n),$$

et par suite:

$$f(x, -n) = \frac{f(x, 0)}{f(x-n, n)} = \frac{1}{(x-n)(x-n+1)(x-n+2) \ldots (x-n+n-1)},$$

ou ce qui revient au même:

$$(5.) \quad f(x, -n) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3) \ldots (x-n)}.$$

Nous nous bornerons à considérer les deux fonctions $f(x, n)$ et $f(x, -n)$, et nous les développerons en séries ordonnées suivant les puissances de la variable x.

Quant à $f(z, n)$, il est clair, que l'on obtient une série *finie* de la forme

$$(6.)\quad f(z,n) = z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)$$
$$= \overset{n}{C}_0 z^n + \overset{n}{C}_1 z^{n-1} + \overset{n}{C}_2 z^{n-2} + \cdots + \overset{n}{C}_{n-1} z,$$

dans laquelle les symboles $\overset{n}{C}_0$, $\overset{n}{C}_1$, etc. désignent des coefficients encore inconnus que nous appelerons les *coefficients des facultés* à exposant positif. Il existe un développement semblable de la fonction $f(z, -n)$ que l'on peut mettre sous la forme

$$f(z,-n) = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} \cdot \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} \cdot \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{3}{z}} \cdots \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{n}{z}}$$

et l'on obtient, en supposant $z > n$, la série *infinie*

$$(7.)\quad f(z,-n) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)\ldots(z-n)}$$
$$= \overset{-n}{C}_0 z^{-n} + \overset{-n}{C}_1 z^{-n-1} + \overset{-n}{C}_2 z^{-n-2} + \overset{-n}{C}_3 z^{-n-3} + \cdots;$$

ce qui est tout à fait analogue à l'équation (6.).

Si on n'a pour but que de construire une *table* des coefficients C des deux équations (6. et 7.), on peut se servir des relations qui lient entre eux les coefficients de la même espèce. On obtient ces relations en ayant égard aux équations

$$f(z, n+1) = (z+n).f(z,n) \quad \text{et}$$
$$(z-(n+1)).f(z,-(n+1)) = f(z,-n).$$

En substituant des séries équivalentes, ces équations se réduisent aux suivantes:

$$(8.)\quad \overset{n+1}{C}_k = \overset{n}{C}_k + n\overset{n}{C}_{k-1}, \qquad k < n,$$
$$(9.)\quad \overset{-(n+1)}{C}_k = (n+1)\overset{-(n+1)}{C}_{k-1} + \overset{-n}{C}_k, \qquad k \geqq n.$$

Ces relations suffisent au calcul numérique, mais elles ne donnent pas une expression directe des coefficients cherchés. Elles offrent deux *équations aux différences*, dont il faut développer les *intégrales finies*. Pour y parvenir, on peut opter entre deux méthodes différentes. Le procédé le plus naturel serait d'exécuter l'intégration finie des équations (8 et 9.), mais on verra bientôt que cela exige des calculs assez longs, et qu'il est difficile de trouver la forme la plus convenable pour exprimer les coefficients cherchés. Le second procédé est, de prendre en secours le théorème de *Mac-Laurin*; ce qui donne

immédiatement

$$(10.)\qquad \overset{n}{C}_k = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-k)}\,[D^{n-k}f(z,n)]_{(z=0)}.$$

En faisant $z=\frac{1}{x}$ dans l'équation (7.), on a

$$(11.)\qquad \frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots(1-nx)} = \overset{-n}{C}_0+\overset{-n}{C}_1x+\overset{-n}{C}_2x^2+\overset{-n}{C}_3x^3+\cdots,$$

et en désignant par $\varphi(x,n)$ l'expression à gauche:

$$(12.)\qquad \overset{-n}{C}_k = \frac{1}{1.2.3\ldots k}\,[D^k\varphi(x,n)]_{(x=0)}.$$

À la première vue il paraît être difficile d'exécuter les différentiations indiquées des équations (10 et 12.), mais nous ferons voir que cette difficulté peut être évitée en fésant quelques transformations pour ramener les différentiations ci-dessus à la différentiation de quelques autres fonctions très simples. On parvient par là aux formules suivantes:

$$(13.)\qquad \overset{-n}{C}_k = \frac{(n)_0\,n^{n+k}-(n)_1\,(n-1)^{n+k}+(n)_2\,(n-2)^{n+k}-\cdots}{1.2.3\ldots n},$$

$$(14.)\qquad \overset{+n}{C}_k = (n-1)_k\Big[\frac{(n+k)_0\,(n+k-1)_k}{(2k)_k}\overset{-k}{C}_k-\frac{(n+k)_1\,(n+k-2)_{k-1}}{(2k-1)_{k-1}}\overset{-(k-1)}{C}_k$$
$$+\frac{(n+k)_2\,(n+k-3)_{k-2}}{(2k-2)_{k-2}}\overset{-(k-2)}{C}_k-\ldots\Big].$$

Dans ces formules les symboles $(\mu)_0$, $(\mu)_1$, $(\mu)_2$, etc. désignent les coefficients du binôme, de sorte que

$$(\mu)_0 = 1,\qquad (\mu)_1 = \frac{\mu}{1},\qquad (\mu)_2 = \frac{\mu(\mu-1)}{1.2},\ \text{etc.}$$

Les formules (13 et 14.) étant établies, nous en donnerons quelques applications à la théorie des suites.

§. 1.

Du coefficient $\overset{-n}{C}_k$.

En désignant par S_n la somme de la série finie

$$(1.)\qquad \frac{(n)_0}{a}-\frac{(n)_1}{a+1}+\frac{(n)_2}{a+2}-\frac{(n)_3}{a+3}+\cdots,$$

on a, en multipliant par $\left(1+\frac{a}{n}\right)$:

$$(2.)\qquad \left(1+\frac{a}{n}\right)S_n = \frac{(n)_0}{a}-\frac{(n)_1}{a+1}+\frac{(n)_2}{a+2}-\frac{(n)_3}{a+3}+\cdots$$
$$+\frac{(n)_0}{n}-\frac{(n)_1}{n}\frac{a}{a+1}+\frac{(n)_2}{n}\frac{a}{a+2}-\frac{(n)_3}{n}\frac{a}{a+3}+\cdots.$$

La seconde série peut être mise sous la forme

$$\frac{(n)_0}{n} - \frac{(n)_1}{n}\left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \frac{(n)_2}{n}\left(1 - \frac{2}{a+2}\right) - \cdots$$

$$= \frac{(n)_0 - (n)_1 + (n)_2 - (n)_3 + \cdots}{n} + \frac{1(n)_1}{n}\frac{1}{a+1} - \frac{2(n)_2}{n}\frac{1}{a+2} + \frac{3(n)_3}{n}\frac{1}{a+3} - \cdots$$

$$= \frac{(n-1)_0}{a+1} - \frac{(n-1)_1}{a+2} + \frac{(n-1)_2}{a+3} - \cdots$$

parceque $(n)_0 - (n)_1 + (n)_2 - \cdots = 0$ et $\frac{k(n)_k}{n} = (n-1)_k$. L'équation (2.) donne maintenant

$$\frac{n}{a+n} S_n = \frac{(n)_0}{a} - \frac{(n)_1 - (n-1)_0}{a+1} + \frac{(n)_2 - (n-1)_1}{a+2} - \cdots,$$

et comme on a toujours $(n)_0 = 1 = (n-1)_0$ et

$$(n)_k - (n-1)_{k-1} = (n-1)_k,$$

l'équation précédente se transforme en

$$\frac{n}{a+n} S_n = \frac{(n-1)_0}{a} - \frac{(n-1)_1}{a+1} + \frac{(n-1)_2}{a+2} - \cdots,$$

c'est à dire en

$$\frac{n}{a+n} S_n = S_{n-1} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{n}{a+n} S_{n-1}.$$

De là on tire immédiatement:

$$S_n = \frac{n}{a+n} \cdot \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{1}{a+1} S_0,$$

et comme $S_0 = \frac{1}{a}$, on obtient l'expression

$$\frac{1.2.3 \ldots n}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = \frac{(n)_0}{a} - \frac{(n)_1}{a+1} + \frac{(n)_2}{a+2} - \frac{(n)_3}{a+3} + \cdots *)$$

En fesant $a = -\frac{1}{x}$, on en tire

$$\frac{(-1)^n 1.2.3 \ldots n.x^n}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots(1-nx)} = (n)_0 - \frac{(n)_1}{1-x} + \frac{(n)_2}{1-2x} - \cdots + \frac{(-1)^n (n)_n}{1-nx}.$$

Pour chasser le facteur $(-1)^n$, il n'y a qu'à renverser l'ordre des termes.

---

*) On parvient aussi à cette formule par l'intégrale

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^n dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n+1)} = \frac{1.2 \ldots n}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}.$$

Il n'y a qu'à développer le binôme $(1-x)^n$ et d'intégrer les termes de la série; mais nous préféront la démonstration élémentaire ci-dessus.

Cela donne à l'aide de l'équation $(n)_{n-k} = (n)_k$:

$$1.2.3\ldots n.x^n \cdot \frac{1}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-nx)}$$
$$= \frac{(n)_0}{1-nx} - \frac{(n)_1}{1-(n-1)x} + \frac{(n)_2}{1-(n-2)x} - \ldots.$$

Cette formule sert à déterminer $\overline{C}_k^n$; car en vertu de la formule (11.) de l'introduction, on a

$$1.2\ldots n[\overline{C}_0^n x^n + \overline{C}_1^n x^{n+1} + \overline{C}_2^n x^{n+2} + \ldots]$$
$$= \frac{(n)_0}{1-nx} - \frac{(n)_1}{1-(n-1)x} + \frac{(n)_2}{1-(n-2)x} - \ldots,$$

et pour trouver $\overline{C}_k^n$ il faut différentier $(n+k)$fois l'équation citée, et faire alors $x=0$; ou, ce qui revient au même, égaliser les coefficients de x^{n+k} à gauche et à droite; ce qui donne

$$(3.) \qquad \overline{C}_k^n = \frac{(n)_0 n^{n+k} - (n)_1(n-1)^{n+k} + (n)_2(n-2)^{n+k} - \ldots}{1.2.3\ldots n}.$$

Cette équation fait voir que l'expression

$$(4.) \qquad (n)_0 n^p - (n)_1(n-1)^p + (n)_2(n-2)^p - \ldots,$$

qui se trouve dans plusieurs résultats analytiques, représente le produit

$$(5.) \qquad 1.2.3\ldots n.\overline{C}_{p-n}^n$$

et qu'elle se réduit à $1.2.3\ldots n$ pour $p=n$, et à zéro pour $p<n$. Les deux derniers circonstances sont connus; mais il paraît que la relation la plus générale qui existe entre les expressions (4 et 5.) n'a pas été reconnue.

§. 2.

Du développement de $\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n$.

La méthode dont nous nous sommes servie pour trouver la valeur de $\overline{C}_k^n$ n'est pas également applicable à la détermination de $\overset{n}{C}_k$, parcequ'elle est fondée sur une décomposition de la fraction $1:(1-x)(1-2x)\ldots(1-nx)$ en fractions simples, qui n'a pas lieu pour la faculté $z(z+1)\ldots(z+n-1)$. Pour déterminer les valeurs des coefficients $\overset{n}{C}_0$, $\overset{n}{C}_1$, etc., nous ferons voir d'abord que ces quantités entrent dans le développement de la fonction $\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n$, et que le problème se réduit à une différentiation répétée de cette fonction.

En désignant par B_1, B_3, B_5, etc. les nombres de ***Bernoulli*** ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, etc.), on a

$$(1.) \quad \frac{x}{e^x-1} = 1-\tfrac{1}{2}x+\frac{B_1x^2}{1.2}-\frac{B_3x^4}{1.2.3.4}+\frac{B_5x^6}{1.2.3.4.5.6}-\cdots$$

où la variable x doit être comprise entre les limites -2π et $+2\pi$. Cette équation est la même que celle dont s'est servi ***Laplace*** pour trouver immédiatement B_k, savoir

$$(2.) \quad \left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right]_{(0)} = (-1)^{\frac{1}{2}k-1}B_{k-1} \text{ (où } k \text{ est un nombre pair).}$$

D'autre part il est clair qu'un résultat de la forme

$$(3.) \quad \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n = \overset{n}{A}_0-\overset{n}{A}_1x+\overset{n}{A}_2x^2-\overset{n}{A}_3x^3+\cdots$$

peut être tiré de l'équation (1.) en désignant par n un nombre entier positif et par $\overset{n}{A}_0$, $\overset{n}{A}_1$, etc. des coefficients indéterminés.

Pour trouver une relation entre ces coefficients, nous prenons la dérivée de l'équation (3.) qui à gauche est

$$n\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}\right] = n\frac{x^{n-1}}{(e^x-1)^n}(1-x)-n\frac{x^n}{(e^x-1)^{n+1}}.$$

Ayant multiplié cette derivée par x, on obtient

$$n\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n(1-x)-n\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{n+1} = -1\overset{n}{A}_1x+2\overset{n}{A}_2x^2-3\overset{n}{A}_3x^3+4\overset{n}{A}_4x^4-\cdots.$$

Quant aux expressions à gauche, elles peuvent être développées à l'aide de l'équation (3.). En égalant après les coefficients de x^k à gauche et à droite, on obtient sur le champ la relation

$$(4.) \quad n\overset{n+1}{A}_k = (n-k)\overset{n}{A}_k+n\overset{n}{A}_{k-1}.$$

Les coefficients qui satisfont à cette condition se divisent en deux classes, selon que $k<n$ ou $k\geqq n$. Dans le premier cas on peut se servir de la substitution

$$(5.) \quad \overset{n}{A}_k = \frac{1}{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)}\overset{n}{\mathfrak{A}}_k,$$

par laquelle la condition (4.) se change en

$$\overset{n+1}{\mathfrak{A}}_k = \overset{n}{\mathfrak{A}}_k+n\overset{n}{\mathfrak{A}}_{k-1}.$$

Cette équation fait voir l'identité de $\overset{n}{\mathfrak{A}}_k$ et $\overset{n}{C}_k$, et delà on tire l'expression

remarquable

$$(6.)\quad \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n = \overset{n}{C}_0 - \frac{\overset{n}{C}_1}{n-1}x + \frac{\overset{n}{C}_2}{(n-1)(n-2)}x^2 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\overset{n}{C}_{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}x^{n-1}$$
$$+ (-1)^n\left[\overset{n}{A}_n x^n - \overset{n}{A}_{n+1}x^{n+1} + \overset{n}{A}_{n+2}x^{n+2} - \cdots\right].$$

Il suit de là que le coefficient $\overset{n}{C}_k$ peut être exprimé par

$$\left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n\right]_{(0)} = \frac{(-1)^k.1.2.3\ldots k}{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}\overset{n}{C}_k,$$

ou bien par

$$(7.)\quad \overset{n}{C}_k = (-1)^k(n-1)_k\left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n\right]_{(0)}.$$

Cette formule offre, comme cas particulier, la détermination des nombres de ***Bernoulli***, parcequ'en vertu de l'équation (2.) on a

$$(8.)\quad B_{k-1} = (-1)^{\frac{1}{2}k-1}\left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right]_{(0)}.$$

Il s'agit maintenant à développer les différentielles de la fonction $\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n$. Nous exécuterons cela par un procédé qui s'étend encore plus généralement sur le développement de $\left[D^k\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^n\right]_{(0)}$, pourvu que $\varphi(x)$ soit une fonction qui se réduit à l'unité pour $x=0$.

§. 3.

Développement de $\overset{n}{C}_k$.

En désignant par y la fonction

$$\frac{e^x-1}{x} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3 + \cdots,$$

on obtient à l'aide de la formule du binome:

$$\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n = \frac{1}{y^n} = \frac{1}{[1+(y-1)]^n}$$
$$= 1 + (-n)_1(y-1) + (-n)_2(y-1)^2 + \cdots + (-n)_k(y-1)^k$$
$$+ (-n)_{k+1}(y-1)^{k+1} + (-n)_{k+2}(y-1)^{k+2} + \cdots.$$

Cette série se divise en deux parties, dont la seconde se présente sous la forme

$$ax^{k+1} + bx^{k+2} + cx^{k+3} + \cdots.$$

Substituant la valeur de $y-1$, la différentielle de l'ordre k de cette partie s'évanouit pour $x=0$ et il reste

$$(1.)\quad \left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n\right]_{(0)}$$

$$= [D^k\{1+(-n)_1(y-1)+(-n)_2(y-1)^2+\cdots+(-n)_k(y-1)^k\}]_{(0)}.$$

En développant les puissances de $y-1$, cette équation peut être transformée en celle ci:

$$(2.)\quad \left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n\right]_{(0)} = [D^k(1+S_1y+S_2y^2+S_3y^3+\cdots+S_ky^k)]_{(0)}$$

et on trouve sans peine que les coefficients S sont exprimés par

$$(3.)\quad S_i = (-n)_i i_0-(-n)_{i+1}(i+1)_1+(-n)_{i+2}(i+2)_2-\cdots$$
$$\cdots(-1)^{k-i}(-n)_k(i+\overline{k-i})_{k-i}.$$

Ayant égard aux relations connues

$$(-n)_{i+1} = (-n)_i\frac{(-n)-i}{i+1} \qquad (i+1)_1 = \frac{i+1}{1}$$

$$(-n)_{i+2} = (-n)_i\frac{(-n)-i}{i+1}\cdot\frac{(-n)-i-1}{i+2} \qquad (i+2)_2 = \frac{(i+1)(i+2)}{1.2}$$

. . . . . .

l'équation (3.) peut être remplacée par la suivante:

$$(4.)\quad S_i=(-n)_i\left[1+\frac{n+i}{1}+\frac{(n+i)(n+i+1)}{1.2}+\cdots+\frac{(n+i)(n+i+1)\ldots(n+k-1)}{1.2.3\ldots(k-i)}\right].$$

C'est ici où la formule *sommatoire*

$$1+\frac{a}{1}+\frac{a(a+1)}{1.2}+\cdots+\frac{a(a+1)\ldots(a+q-1)}{1.2\ldots q} = \frac{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+q)}{1.2.3\ldots q}$$

peut être appliquée, et on en obtient

$$S_i = (-n)_i\frac{(n+i+1)(n+i+2)\ldots(n+k)}{1.2.3\ldots(k-i)},$$

ou ce qui revient au même:

$$S_i = (-1)^i(n+i-1)_i(n+k)_{k-i}.$$

Renversant l'ordre des termes de l'équation (2.), on obtient

$$\left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n\right]_{(0)}$$

$$= (-1)^k[D^k\{(n+k)_0(n+k-1)_k y^k-(n+k)_1(n+k-2)_{k-1}y^{k-1}+\cdots\}]_{(0)}.$$

Posons, pour abréger,

$$(5.)\quad [D^k y^h]_{(x=0)} = Q_h.$$

Alors l'équation précedente devient

$$(6.)\quad \left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n\right]_{(0)}$$
$$= (-1)^k[(n+k)_0(n+k-1)_k Q_k - (n+k)_1(n+k-2)_{k-1} Q_{k-1} + (n+k)_2(n+k-3)_{k-2} Q_{k-2} - \cdots].$$

On trouve la valeur de Q_h simplement par la différentiation de l'équation

$$x^h y^h = (e^x-1)^h = h_0 e^{hx} - h_1 e^{(h-1)x} + h_2 e^{(h-2)x} - \cdots$$

En appliquant la règle connue pour la différentiation des produits, on obtient

$$D^{h+k}(x^h y^h) = (h+k)_0 x^h . D^{h+k} y^h + (h+k)_1 h x^{h-1} . D^{h+k-1} y^h + \cdots + (h+k)_h h(h-1)(h-2)\ldots 2.1 . D^k y^h$$
$$= (h)_0 h^{h+k} e^{hx} - (h)_1 (h-1)^{h+k} e^{(h-1)x} + (h)_2 (h-2)^{h+k} e^{(h-2)x} - \cdots$$

Cette équation donne pour $x=0$:

$$(h+k)_h h(h-1)(h-2)\ldots 2.1 [D^k y^h]_{(0)}$$
$$= (h)_0 h^{h+k} - (h)_1 (h-1)^{h+k} + (h)_2 (h-2)^{h+k} - \cdots,$$

ce qui est le même que

$$(h+k)(h+k-1)(h+k-2)\ldots(k-1) . Q_h = 1.2\ldots h . \overset{-h}{C}_k.$$

De là on tire

$$Q_h = \frac{1}{(h+k)_h} \overset{-h}{C}_k,$$

et en vertu de l'équation (6.):

$$(7.)\quad (-1)^k\left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n\right]_{(0)}$$
$$= \frac{(n+k)_0(n+k-1)_k}{(2k)_k} \overset{-k}{C}_k - \frac{(n+k)_1(n+k-2)_{k-1}}{(2k-1)_{k-1}} \overset{-(k-1)}{C}_k + \frac{(n+k)_2(n+k-3)_{k-2}}{(2k-2)_{k-2}} \overset{-(k-2)}{C}_k - \cdots$$

Cette formule donne tous les coefficients du développement de $\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n$. En se bornant au cas $k<n$, on a en vertu de (7. §. 2.):

$$(8.)\quad \overset{n}{C}_k = (n-1)_k\left[\frac{(n+k)_0(n+k-1)_k}{(2k)_k} \overset{-k}{C}_k - \frac{(n+k)_1(n+k-2)_{k-1}}{(2k-1)_{k-1}} \overset{-(k-1)}{C}_k + \frac{(n+k)_2(n+k-3)_{k-2}}{(2k-2)_{k-2}} \overset{-(k-2)}{C}_k - \cdots\right].$$

Il y a encore à observer que le cas $n=1$ fournit une formule pour les nombres de ***Bernoulli***, car à l'aide de la formule (8. §. 2.) on obtient

$$(9.)\quad B_{k-1} = (-1)^{\frac{1}{2}k-1}\left[\frac{(k+1)_0}{(2k)_k} \overset{-k}{C}_k - \frac{(k+1)_1}{(2k-1)_{k-1}} \overset{-(k-1)}{C}_k + \frac{(k+1)_2}{(2k-2)_{k-2}} \overset{-(k-2)}{C}_k - \cdots\right],$$

k étant un nombre pair >1. Si k est impair et >1, la quantité entre les crochets s'évanouit, parceque le développement de $\frac{x}{e^x-1}$ ne contient pas des puissances impaires de x d'un exposant >1.

§. 4.

Développement de $[l(1+x)]^m$.

La formule du binôme peut être transformée aisément à l'aide de la relation

$$u(u-1)(u-2)\dots(u-(n-1)) = \overset{n}{C}_0 u^n - \overset{n}{C}_1 u^{n-1} + \overset{n}{C}_2 u^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1}\overset{n}{C}_{n-1} u$$

et on trouve par là, sous condition que $1>x>-1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^u &= 1+\frac{u}{1}x+\frac{u(u-1)}{1.2}x^2+\cdots\\ &= 1+\Big(\overset{1}{C}_1 x-\tfrac{1}{2}\overset{2}{C}_1 x^2+\frac{1}{2.3}\overset{3}{C}_2 x^3-\dots\Big)\frac{u}{1}\\ &\quad+\Big(\overset{2}{C}_0 x^2-\tfrac{1}{3}\overset{3}{C}_2 x^3+\frac{1}{3.4}\overset{4}{C}_3 x^4-\dots\Big)\frac{u^2}{1.2}\\ &\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Comme d'autre part on a

$$(1+x)^u = 1+l(1+x)\frac{u}{1}+[l(1+x)]^2\frac{u^2}{1.2}+\cdots,$$

les coefficients des mêmes puissances de u peuvent être égalisés. Cela donne

$$(1.)\qquad [l(1+x)]^m = \overset{m}{C}_0 x^m - \frac{\overset{m+1}{C}_1}{m+1}x^{m+1}+\frac{\overset{m+2}{C}_2}{(m+1)(m+2)}x^{m+2}-\cdots$$
$$1>x>-1.$$

Cette formule peut servir à transformer une série de la forme

$$a\,l(1+x)+b[l(1+x)]^2+c[l(1+x)]^2+\cdots$$

en une autre qui ne contient que des puissances de x. On a par exemple

$$\frac{1}{1+l(1+x)} = 1-l(1+x)+[l(1+x)]^2-\cdots$$
$$1>l(1+x)>-1$$

et par conséquent

$$(2.)\qquad \frac{1}{1+l(1+x)} = 1-A_1 x+A_2 x^2-A_3 x^3+\cdots$$
$$1>l(1+x)>-1,\quad 1>x>-1.$$

Le coefficient A_k peut être trouvé par la formule

$$(3.) \qquad A_k = \overset{k}{C}_0 + \frac{1}{k}\overset{k}{C}_1 + \frac{1}{k(k-1)}\overset{k}{C}_2 + \cdots + \frac{1}{k\ldots 2}\overset{k}{C}_{k-1}.$$

Les deux conditions énoncées pour l'équation (2.) peuvent être réduites à une seule, savoir à $1 > x > \frac{1}{e} - 1$.

Passons à une autre application de la formule (1.). De l'intégrale

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{z}\right)^{n-1} z^{a-1}\,dz = \frac{\Gamma(n)}{a^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{a^n}$$

on tire $z = 1-x$:

$$\int_0^1 [-l(1-x)]^{n-1}(1-x)^{a-1}\,dx = \frac{1.2\ldots(n-1)}{a^n}.$$

Maintenant la fonction $[-l(1-x)]^{n-1}$ peut être développée. En intégrant les termes de la série, on obtient

$$(4.) \qquad \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n-1)} + \frac{\overset{n}{C}_1}{a(a+1)\ldots(a+n)} + \frac{\overset{n+1}{C}_2}{a(a+1)\ldots(a+n+1)} + \ldots.$$

Ce résultat, dont ont fait usage dans le calcul inverse des différences, a été déjà donné par *Stirling*.

§. 5.

Développement de $D^n f(lx)$.

La différentiation réîterée de la fonction $f(lx)$ donne les expressions

$$Df(lx) = \frac{1}{x}f'(lx),$$

$$D^2 f(lx) = \frac{1}{x^2}[f''(lx) - f'(lx)],$$

$$D^3 f(lx) = \frac{1}{x^3}[f'''(lx) - 3f''(lx) + 2f'(lx)],$$

. . . . . .

On en conclut que l'expression générale est de la forme

$$(1.) \qquad D^n f(lx) = \frac{1}{x^n}[\overset{n}{A}_0 f^{(n)}(lx) - \overset{n}{A}_1 f^{(n-1)}(lx) + \overset{n}{A}_2 f^{(n-2)}(lx) - \cdots].$$

En même temps on voit, que les coefficients $\overset{n}{A}_0$, $\overset{n}{A}_1$, $\overset{n}{A}_2$, ... qui sont à déterminer, ne dependent pas de la nature de la fonction f. Leurs valeurs peuvent dont être trouvées si l'on prend une fonction f telle, que les différentiations à droite et à gauche dans l'équation ci-dessus sont praticables.

La plus simple fonction de cette espèce est $f(y) = e^{-\beta y}$, et on en obtient

$$f^{(k)}(y) = (-1)^k \beta^k e^{-\beta y}, \quad f^{(k)}(lx) = (-1)^k \beta^k x^{-k},$$

parcequ'on a immédiatement

$$f(lx) = x^{-\beta} \quad \text{et} \quad D^n f(lx) = (-1)^n \beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)\, x^{-\beta-n}.$$

La formule (1.) donne maintenant en substituant les valeurs mentionnées:

$$\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1) = \overset{n}{A}_0\beta^n + \overset{n}{A}_1\beta^{n-1} + \overset{n}{A}_2\beta^{n-2} + \cdots + \overset{n}{A}_{n-1}\beta.$$

Cette équation fait voir que les coefficients $\overset{n}{A}_0$, $\overset{n}{A}_1$, $\overset{n}{A}_2$, ... sont ceux de la faculté $(\beta_0+1)^n$; donc on obtient la formule remarquable suivante:

$$(2.) \qquad D^n f(lx) = \frac{1}{x^n}\left[\overset{n}{C}_0 f^{(n)}(lx) - \overset{n}{C}_1 f^{(n-1)}(lx) + \overset{n}{C}_2 f^{(n-2)}(lx) - \cdots\right].$$

Pour faciliter les calculs numériques, nous ajoutons une petite table des coefficients $\overset{n}{C}_k$ et $\overset{-n}{C}_k$.

$n=$	—IV	—III	—II	—I	+I	+II	+III	+IV	+V	+VI	+VII	+VIII
$C_0=$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$C_1=$	10	6	3	1		1	3	6	10	15	21	28
$C_2=$	65	25	7	1			2	11	35	85	175	322
$C_3=$	350	90	15	1				6	50	225	735	1960
$C_4=$	1701	301	31	1					24	274	1624	6769
$C_5=$	7770	966	63	1						120	1764	13132
$C_6=$	35105	3025	127	1							720	13068
$C_7=$	149750	9330	255	1								5040

Dresde, Décembre 1851.

22.

An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism.

(By the late *George Green,* fellow of Gonville- and Cains-Colleges at Cambridge.)*)

General preliminary results.

1.

The function which represents the sum of all the electric particles acting on a given point divided by their respective distances from this point, has the property of giving, in a very simple form, the forces by which it is solicited, arising from the whole electrified mass. We shall, in what follows, endeavour to discover some relations between this function, and the density of the electricity in the mass or masses producing it, and apply the relations thus obtained, to the theory of electricity.

Firstly, let us consider a body of any form whatever, through which the electricity is distributed according to any given law, and fixed there, and let x', y', z', be the rectangular co-ordinates of a particle of this body, ϱ' the density of the electricity in this particle, so that $dx'dy'dz'$ being the volume of the particle, $\varrho'dx'dy'dz'$ shall be the quantity of electricity it contains: moreover, let r' be the distance between this particle and a point p exterior to the body, and V represent the sum of all the particles of electricity divided by their respective distances from this point, whose co-ordinates are supposed to be x, y, z, then shall we have

$$r' = \sqrt{((x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2)},$$

and

$$V = \int \frac{\varrho' dx'dy'dz'}{r'};$$

the integral comprehending every particle in the electrified mass under consideration.

*) Vide tome 39. p. 13 of this Journal.

Laplace has shown, in his Mec. Celeste, that the function V has the property of satisfying the equation

$$0 = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2},$$

and as this equation will be incessantly recurring in what follows, we shall write it in the abridged form $0 = \delta V$; the symbol δ being used in no other sense throughout the whole of this Essay.

In order to prove that $0 = \delta V$, we have only to remark, that by differentiation we immediately obtain $0 = \delta \frac{1}{r'}$, and consequently each element of V substituted for V in the above equation satisfies it; hence the whole integral (being considered as the sum of all these elements) will also satisfy it. This reasoning ceases to hold good when the point p is within the body, for then, the co-efficients of some of the elements which enter into V becoming infinite, it does not therefore necessarily follow that V satisfies the equation

$$0 = \delta V,$$

although each of its elements, considered separately, may do so.

In order to determine what δV becomes for any point within the body, conceive an exceedingly small sphere whose radius is a inclosing the point p at the distance b from its centre, a and b being exceedingly small quantities. Then, the value of V may be considered as composed of two parts, one due to the sphere itself, the other due to the whole mass exterior to it: but the last part evidently becomes equal to ***zero*** when substituted for V in δV, we have therefore only to determine the value of δV for the small sphere itself, which value is known to be

$$\delta(2\pi a^2\varrho - \tfrac{2}{3}\pi b^2\varrho);$$

ϱ being equal to the density within the sphere and consequently to the value of ϱ' at p. If now x_1, y_1, z_1, be the co-ordinates of the centre of the sphere, we have

$$b^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2,$$

and consequently

$$\delta(2\pi a^2\varrho - \tfrac{2}{3}\pi b^2\varrho) = -4\pi\varrho.$$

Hence, throughout the interior of the mass

$$0 = \delta V + 4\pi\varrho;$$

of which, the equation $0 = \delta V$ for any point exterior to the body is a particular case, seeing that, here $\varrho = 0$.

Let now q be any line terminating in the point p, supposed without the body, then $-\left(\frac{dV}{dq}\right) =$ the force tending to impel a particle of positive electricity in the direction of q, and tending to increase it. This is evident, because each of the elements of V substituted for V in $-\left(\frac{dV}{dq}\right)$, will give the force arising from this element in the direction tending to increase q, and consequently, $-\left(\frac{dV}{dq}\right)$ will give the sum of all the forces due to every element of V, or the total force acting on p in the same direction. In order to show that this will still hold good, although the point p be within the body; conceive the value of V to be divided into two parts as before, and moreover let p be at the surface of the small sphere or $b = a$, then the force exerted by this small sphere will be expressed by

$$\tfrac{4}{3}\pi a\varrho\left(\frac{da}{dq}\right);$$

da being the increment of the radius a, corresponding to the increment dq of q, which force evidently vanishes when $a = 0$: we need therefore have regard only to the part due to the mass exterior to the sphere, and this is evidently equal to

$$V - \tfrac{4}{3}\pi a^2\varrho.$$

But as the first differentials of this quantity are the same as those of V when a is made to vanish, it is clear, that whether the point p be within or without the mass, the force acting upon it in the direction of q increasing, is always given by $-\left(\frac{dV}{dq}\right)$.

Although in what precedes we have spoken of one body only, the reasoning there employed is general, and will apply equally to a system of any number of bodies whatever, in those cases even, where there is a finite quantity of electricity spread over their surfaces, and it is evident that we shall have for a point p in the interior of any one of these bodies

$$(1.) \qquad 0 = \delta V + 4\pi\varrho.$$

Moreover, the force tending to increase a line q ending in any point p within or without the bodies, will be likewise given by $-\left(\frac{dV}{dq}\right)$; the function V

representing the sum of all the electric particles in the system divided by their respective distances from p. As this function, which gives in so simple a form the values of the forces by which a particle p of electricity, any how situated, is impelled, will recur very frequently in what follows, we have ventured to call it the potential function belonging to the system, and it will evidently be a function of the co-ordinates of the particle p under consideration.

2.

It has been long known from experience, that whenever the electric fluid is in a state of equilibrium in any system whatever of perfectly conducting bodies, the whole of the electric fluid will be carried to the surface of those bodies, without the smallest portion of electricity remaining in their interior: but I do not know that this has ever been shown to be a necessary consequence of the law of electric repulsion, which is found to take place in nature. This however may be shown to be the case for every imaginable system of conducting bodies, and is an immediate consequence of what has preceded. For let x, y, z, be the rectangular co-ordinates of any particle p in the interior of one of the bodies; then will $-\left(\frac{dV}{dx}\right)$, be the force with which p is impelled in the direction of the co-ordinate x, and tending to increase it. In the same way $-\frac{dV}{dy}$ and $-\frac{dV}{dz}$ will be the forces in y and z, and since the fluid is in equilibrium all these forces are equal to *zero:* hence

$$0 = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = dV,$$

which equation being integrated gives

$$V = \text{const.}$$

This value of V being substituted in the equation (1) of the preceding number gives

$$\varrho = 0,$$

and consequently shows, that the density of the electricity at any point in the interior of any body in the system is equal to *zero.*

The same equation (1) will give the value of ϱ the density of the electricity in the interior of any of the bodies, when there are not perfect conductors, provided we can ascertain the value of the potential function V in their interior.

3.

Before proceeding to make known some relations which exist between the density of the electric fluid at the surfaces of bodies, and the corresponding values of the potential functions within and without those surfaces, the electric fluid being confined to them alone, we shall in the first place, lay down a general theorem which will afterwards be very useful to us. This theorem may be thus enunciated:

Let U and V be two continuous functions of the rectangular co-ordinates x, y, z, whose differential co-efficients do not become infinite at any point within a solid body of any form whatever; then will

$$\int dx\,dy\,dz\,U\delta V+\int d\sigma\,U\left(\frac{dV}{dw}\right)=\int dx\,dy\,dz\,V\delta U+\int d\sigma\,V\left(\frac{dU}{dw}\right);$$

the triple integrals extending over the whole interior of the body, and those relative to $d\sigma$, over its surface, of which $d\sigma$ represents an element: dw being an infinitely small line perpendicular to the surface, and measured from this surface towards the interior of the body.

To prove this let us consider the triple integral

$$\int dx\,dy\,dz\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dU}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right)\right\}.$$

The method of integration by parts, reduces this to

$$\int dy\,dz\,V''\frac{dU''}{dz}-\int dy\,dz\,V'\frac{dU'}{dx}+\int dx\,dz\,V''\frac{dU''}{dy}-\int dx\,dz\,V'\frac{dU'}{dy}$$
$$+\int dx\,dy\,V''\frac{dU''}{dx}-\int dx\,dy\,V'\frac{dU'}{dz}-\int dx\,dy\,dz\,V\left\{\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right\};$$

the accents over the quantities indicating, as usual, the values of those quantities at the limits of the integral, which in the present case are on the surface of the body, over whose interior the triple integrals are supposed to extend.

Let us now consider the part $\int dy\,dz\,V''\frac{dU'}{dx}$ due to the greater values of x. It is easy to see since dw is every where perpendicular to the surface of the solid, that if $d\sigma''$ be the element of this surface corresponding to $dy\,dz$, we shall have

$$dy\,dz=-\frac{dx}{dw}\,d\sigma'',$$

and hence by substitution

$$\int dy\,dz\,V''\frac{dU''}{dx}=-\int d\sigma''\frac{dx}{dw}\,V''\frac{dU''}{dx}.$$

In like manner it is seen, that in the part $-\int dy\,dz\,V'\frac{dU'}{dx}$ due to the smaller values of x, we shall have $dy\,dz = +\frac{dx}{dw}d\sigma'$, and consequently

$$-\int dy\,dz\,V'\frac{dU'}{dx} = -\int d\sigma'\frac{dx}{dw}V'\frac{dU'}{dx}.$$

Then, since the sum of the elements represented by $d\sigma'$, together with those represented by $d\sigma''$, constitute the whole surface of the body, we have by adding these two parts

$$\int dy\,dz\left(V''\frac{dU''}{dx} - V'\frac{dU'}{dx}\right) = -\int d\sigma\frac{dx}{dw}V\frac{dU}{dx};$$

where the integral relative to $d\sigma$ is supposed to extend over the whole surface, and dx to be the increment of x corresponding to the increment dw.

In precisely the same way we have

$$\int dx\,dz\left(V''\frac{dU''}{dy} - V'\frac{dU'}{dy}\right) = -\int d\sigma\frac{dy}{dw}V\frac{dU}{dy}, \text{ and}$$

$$\int dx\,dy\left(V''\frac{dU''}{dz} - V'\frac{dU'}{dz}\right) = -\int d\sigma\frac{dz}{dw}V\frac{dU}{dz};$$

therefore, the sum of all the double integrals in the expression before given will be obtained by adding together the three parts just found; we shall thus have

$$-\int d\sigma V\left\{\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dw} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dw} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dw}\right\} = -\int d\sigma V\frac{dU}{dw};$$

where V and $\frac{dU}{dw}$ represent the values at the surface of the body. Hence, the integral

$$\int dx\,dy\,dz\left\{\frac{dV}{dx}\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{dU}{dy} + \frac{dV}{dz}\frac{dU}{dz}\right\},$$

by using the characteristic δ in order to abridge the expression, becomes

$$-\int d\sigma V\frac{dU}{dw} - \int dx\,dy\,dz\,V\delta U.$$

Since the value of the integral just given remains unchanged when we substitute V in the place of U and reciprocally, it is clear, that it will also be expressed by

$$-\int d\sigma U\frac{dV}{dw} - \int dx\,dy\,dz\,U\delta V.$$

Hence, if we equate these two expressions of the same quantity, after having

changed their signs, we shall have

$$(2.)\quad \int d\sigma V \frac{dU}{dw} + \int dx\,dy\,dz\,V\delta U = \int d\sigma U \frac{dV}{dw} + \int dx\,dy\,dz\,U\delta V.$$

Thus the theorem appears to be completely established, whatever may be the form of the functions U and V.

In our enunciation of the theorem, we have supposed the differentials of U and V to be finite within the body under consideration, a condition, the necessity of which does not appear explicitly in the demonstation, but, which is understood in the method of integration by parts there employed.

In order to show more clearly the necessity of this condition, we will now determine the modification which the formula must undergo, when one of the functions, U for example, becomes infinite within the body; and let us suppose it to do so in one point p' only: moreover, infinitely near this point let U be sensibly equal to $\frac{1}{r}$; r being the distance between the point p' and the element $dx\,dy\,dz$. Then if we suppose an infinitely small sphere whose radius is a to be described round p', it is clear that our theorem is applicable to the whole of the body exterior to this sphere, and since, $\delta U = \delta\frac{1}{r} = 0$ within the sphere, it is evident, the triple integrals may still be supposed to extend over the whole body, as the greatest error that this supposition can induce, is a quantity of the order a^2. Moreover, the part of $\int d\sigma U \frac{dV}{dw}$, due to the surface of the small sphere is only an infinitely small quantity of the order a; there only remains therefore to consider, the part of $\int d\sigma V \frac{dU}{dw}$ due to this same surface, which, since we have here $\frac{dU}{dw} = \frac{dU}{dr} = \frac{d\frac{1}{r}}{dr} = \frac{-1}{dr^2} = \frac{-1}{a^2}$, becomes

$$-4\pi V'$$

when the radius a is supposed to vanish. Thus, the equation (2.) becomes

$$(3.)\quad \int dx\,dy\,dz\,U\delta V + \int d\sigma U \frac{dV}{dw} = \int dx\,dy\,dz\,V\delta U + \int d\sigma V \frac{dU}{dw} - 4\pi V';$$

where, as in the former equation, the triple integrals extend over the whole volume of the body, and those relative to $d\sigma$, over its exterior surface: V' being the value of V at the point p'.

In like manner, if the function V be such, that it becomes infinite for any point p'' within the body, and is moreover, sensibly equal to $\frac{1}{r'}$, infinitely near this point, as U is infinitely near to the point p', it is evident from what has preceded that we shall have

$$(3'.)\quad \int dx\,dy\,dz\,U\delta V+\int d\sigma\,U\frac{dV}{dw}-4\pi U''$$
$$=\int dx\,dy\,dz\,V\delta U+\int d\sigma\,V\frac{dU}{dw}-4\pi V';$$

the integrals being taken as before, and U'' representing the value of U, at the point p'' where V becomes infinite. The same proeess will evidently apply, however great may be the number of similar points belonging to the functions U and V.

For abridgment, we shall in wahat follows, call those singular values of a given function, where its differential co-efficients become infinite, and the condition originally imposed upon U and V will be expressed by saying, that neither of them has any singular values within the solid body under consideration.

4.

We will now proceed to determine some relations existing between the density of the electric fluid at the surface of a body, and the potential functions thence arising, within and without this surface. For this, let $\varrho d\sigma$ be the quantity of electricity on an element $d\sigma$ of the surface, and V, the value of the potential function for any point p within it, of which the co-ordinates are x, y, z. Then, if V' be the value of this function for any other point p' exterior to this surface, we shall have

$$V=\int\frac{\varrho d\sigma}{\sqrt{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2)}};$$

ξ, η, ζ, being the co-ordinates of $d\sigma$, and

$$V'=\int\frac{\varrho d\sigma}{\sqrt{((\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2)}}:$$

the integrals relative to $d\sigma$ extending over the whole surface of the body.

It might appear at first view, that to obtain the value of V' from that of V, we should merely have to change x, y, z, into x', y', z': but, this is by no means the case; for, the form of the potential function changes suddenly, in passing from the space within to that without the surface. Of this, we may

give a very simple example, by supposing the surface to be a sphere whose radius is a and centre at the origin of the co-ordinates; then, if the density ϱ be constant, we shall have

$$V = 4\pi\varrho a \quad \text{and} \quad V' = \frac{4\pi a^2}{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}};$$

which are essentially distinct functions.

With respect to the functions V and V' in the general case, it is clear that each of them will satisfy *Laplace's* equation, and consequently

$$0 = \delta V \quad \text{and} \quad 0 = \delta' V':$$

moreover, neither of them will have singular values; for any point of the spaces to which they respectively belong, and at the surface itself, we shall have

$$\overline{V} = \overline{V'}$$

the horizontal lines over the quantities indicating that they belong to the surface. At an infinite distance from this surface, we shall likewise have

$$V' = 0.$$

We will now show, that if any two functions whatever are taken, satisfying these conditions, it will always be in our power to assign one, and only one value of ϱ, which will produce them for corresponding potential functions. For this we may remark, that the equation (3) art. 3 being applied to the space within the body, becomes, by making $U = \frac{1}{r}$,

$$\int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{\overline{dV}}{dx}\right) = \int d\sigma \overline{V}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right) - 4\pi V;$$

since $U = \frac{1}{r}$, has but one singular point, viz. p; and, we have also $\delta V = 0$ and $\delta \frac{1}{r} = 0$: r being the distance between the point p to which V belongs, and the element $d\sigma$.

If now, we conceive a surface inclosing the body at an infinite distance from it, we shall have, by applying the formula (2) of the same article to the space between the surface of the body and this imaginary exterior surface (seeing that here $\frac{1}{r} = U$ has no singular value)

$$\int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{\overline{dV'}}{dx'}\right) = \int d\sigma \overline{V'}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw'}\right):$$

since the part due to the infinite surface may be neglected, because V' is there equal to *zero*. In this last equation, it is evident that dw' is measured from the surface, into the exterior space, and hence

$$\left(d\frac{1}{r}\over dw\right) = -\left(d\frac{1}{r}\over dw'\right) \quad \text{i. e.} \quad 0 = \left(d\frac{1}{r}\over dw\right) + \left(d\frac{1}{r}\over dw'\right);$$

which equation reduces the sum of the two just given to

$$\int\frac{d\sigma}{r}\left\{\left(\frac{\overline{dV}}{dw}\right)+\left(\frac{\overline{dV'}}{dw'}\right)\right\} = -4\pi V.$$

In exactly the same way, for the point p' exterior to the surface, we shall obtain

$$\int\frac{d\sigma}{r'}\left\{\left(\frac{\overline{dV}}{dw}\right)+\left(\frac{\overline{dV'}}{dw'}\right)\right\} = -4\pi V'.$$

Hence it appears, that there exists a value of ϱ, viz. $\varrho = \frac{-1}{4\pi}\left\{\left(\frac{\overline{dV}}{dw}\right)+\left(\frac{\overline{dV'}}{dw'}\right)\right\}$, which will give V and V', for the two potential functions, within and without the surface.

Again, $-\left(\frac{\overline{dV}}{dw}\right)$ = force with which a particle of positive electricity p, placed within the surface and infinitely near it, is impelled in the direction dw perpendicular to this surface, and directed inwards; and $-\left(\frac{\overline{dV'}}{dw'}\right)$ expresses the force with which a similar particle p' placed without this surface, on the same normal with p, and also infinitely near it, is impelled outwards in the direction of this normal: but the sum of these two forces is equal to double the force that an infinite plane would exert upon p, supposing it uniformly covered with electricity of the same density as at the foot of the normal on which p is; and this last force is easily shown to be expressed by $2\pi\varrho$, hence by equating

$$(4.) \qquad 4\pi\varrho = -\left\{\frac{\overline{dV}}{dw}+\frac{\overline{dV'}}{dw'}\right\},$$

and consequently there is only one value of ϱ, which can produce V and V' as corresponding potential functions.

Although in what precedes, we have considered the surface of one body only, the same arguments apply, how great soever may be their number; for the potential functions V and V' would still be given by the formulae

$$V = \int\frac{\varrho d\sigma}{r} \quad \text{and} \quad V' = \int\frac{\varrho d\sigma}{r'};$$

the only difference would be, that the integrations must now extend over the surface of all the bodies, and, that the number of functions represented by V, would be equal to the number of the bodies, one for each. In this case, if there were given a value of V for each body, together with V' belonging to the exterior space; and moreover, if these functions satisfied to the above mentioned conditions, it would always be possible to determine the density on the surface of each body, so as to produce these values as potential functions, and there would be but one density, viz. that given by

$$(4'.) \qquad 0 = 4\pi\varrho + \frac{\overline{dV}}{dw} + \frac{\overline{dV'}}{dw'}$$

which could do so: ϱ, $\frac{\overline{dV}}{dw}$ and $\frac{\overline{dV'}}{dw'}$ belonging to a point on the surface of any of these bodies.

5.

From what has been before established (art. 3), it is easy to prove, that when the value of the potential function $\overline{V}$ is given on any closed surface, there is but one function which can satisfy at the same time the equation

$$0 = \delta V,$$

and the condition, that V shall have no singular values within this surface. For the equation (3) art. 3, becomes by supposing $\delta U = 0$,

$$\int d\sigma \overline{U} \frac{\overline{dV}}{dw} = \int d\sigma \overline{V} \frac{\overline{dU}}{dw} - 4\pi V'.$$

In this equation, U is supposed to have only one singular value within the surface, viz. at the point p', and, infinitely near to this point, to be sensibly equal to $\frac{1}{r}$; r being the distance from p'. If now we had a value of U, which, besides satisfying the above written conditions, was equal to ***zero*** at the surface itself, we should have $\overline{U} = 0$, and this equation would become

$$(5.) \qquad 0 = \int d\sigma \overline{V} \frac{\overline{dU}}{dw} - 4\pi V',$$

which shows, that V' the value of V at the point p' is given, when $\overline{V}$ its value at the surface is known.

To convince ourselves that there does exist such a function as we have supposed U to be; conceive the surface to be a perfect conductor put in communication with the earth, and a unit of positive electricity to be concentrated in the point p', then the total potential function arising from p' and

from the electricity it will induce upon the surface, will be the required value of U. For, in consequence of the communication established between the conducting surface and the earth, the total potential function at this surface must be constant, and equal to that of the earth itslef, i. e. to *zero* (seeing that in this state they form but one conducting body). Taking, therefore, this total potential function for U, we have evidently $0 = \overline{U}$, $0 = \delta U$, and $U = \frac{1}{r}$ for those parts infinitely near to p'. As moreover, this function has no other singular points within the surface, it evidently possesses all the properties assigned to U in the preceding proof.

Again, since we have evidently $U' = 0$, for all the space exterior to the surface, the equation (4) art. 4 gives

$$0 = 4\pi(\varrho) + \frac{d\overline{U}}{dw};$$

where (ϱ) is the density of the electricity induced on the surface, by the action of a unit of electricity concentrated in the point p'. Thus, the equation (5) of this article becomes

$$(6.) \qquad V' = -\int d\sigma(\varrho)\, V.$$

This equation is remarkable on account of its simplicity and singularity, seeing that it gives the value of the potential for any point p', within the surface, when $\overline{V}$, its value at the surface itself is known, together with (ϱ), the density that a unit of electricity concentradet in p' would induce on this surface, if it conducted electricity perfectly, and were put in communication with the earth.

Having thus proved, that V' the value of the potential function V, at any point p' within the surface is given, provided its value $\overline{V}$ is known at this surface, we will now show, that whatever the value of $\overline{V}$ may be, the general value of V deduced from it by the formula just given shall satisfy the equation

$$0 = \delta V.$$

For, the value of V at any point p whose co-ordinates are x, y, z, deduced from the assumed value of $\overline{V}$, by the above written formula, is

$$4\pi V = \int d\sigma \overline{V} \left(\frac{dU}{dw}\right),$$

U being the total potential function within the surface, arising from a unit of electricity concentrated in the point p, and the electricity induced on the surface

itself by its action. Then, since $\overline{V}$ is evidently independent of x, y, z, we immediately deduce

$$4\pi\delta V = \int d\sigma \overline{V} \delta\left(\frac{dU}{dv}\right).$$

Now the general value of U will depend upon the position of the point p producing it, and upon that of any other point p' whose co-ordinates are x', y', z', to which it is referred, and will consequently be a function of the six quantities x, y, z, x', y', z'. But we may conceive U to be divided into two parts, one $= \frac{1}{r}$ (r being the distance pp') arising from the electricity in p, the other, due to the electricity induced on the surface by the action of p, and which we shall call U_1. Then since U_1 has no singular values within the surface, we may deduce its general value from that at the surface, by a formula similar to the one just given. Thus

$$4\pi U_1 = \int d\sigma \overline{U}_1 \left(\frac{\overline{dU'}}{dw}\right);$$

where U' is the total potential function, which would be produced by a unit of electricity in p', and therefore, $\left(\frac{\overline{dU'}}{dw}\right)$ is independent of the co-ordinates x, y, z, of p, to which δ refers. Hence

$$4\pi\delta U_1 = \int d\sigma \left(\frac{\overline{dU'}}{dw}\right) \delta \overline{U}_1.$$

We have before supposed

$$U = \frac{1}{r} + U_1,$$

and as $\delta\frac{1}{r} = 0$, we immediately obtain

$$\delta U = \delta U_1.$$

Again, since we have at the surface itself $0 = \overline{U} = \frac{1}{\overline{r}} + \overline{U}_1$; $\overline{r}$ being the distance between p and the element $d\sigma$, we hence deduce

$$0 = \delta \overline{U}_1;$$

this substituted in the general value of δU_1 before given, there arises $\delta U_1 = 0$, and consequently $0 = \delta U$. The result just obtained being general, and applicable to any point p'' within the surface, gives immediately

$$0 = \delta\left(\frac{\overline{dU}}{dw}\right),$$

and we have by substituting in the equation determining δV,

$$0 = \delta V.$$

In a preceding part of this article, we have obtained the equation

$$0 = 4\pi(\varrho) + \left(\frac{\overline{dU}}{dw}\right),$$

which combined with $0 = \delta\left(\frac{\overline{dU}}{dw}\right)$, gives

$$0 = \delta(\varrho),$$

and therefore the density (ϱ) induced on any element $d\sigma$, which is evidently a function of the co-ordinates x, y, z, of p, is also such a function as will satisfy the equation $0 = \delta(\varrho)$: it is moreover evident, that (ϱ) can never become infinite when p is within the surface.

It now remains to prove, that the formula

$$V = \frac{1}{4\pi}\int d\sigma \overline{V}\left(\frac{\overline{dU}}{dw}\right) = -\int d\sigma(\varrho)\overline{V}$$

shall always give $V = \overline{V}$, for any point within the surface and infinitely near it, whatever may be the assumed value of $\overline{V}$.

For this, suppose the point p to approach infinitely near the surface; then it is clear that the value of (ϱ), the density of the electricity induced by p, will be insensible, except for those parts infinitely near to p, and in these parts it is easy to see, that the value of (ϱ) will be independent of the form of the surface, and depend only on the distance $p,d\sigma$. But, we shall afterwards show (art. 10), that when this surface is a sphere of any radius whatever, the value of (ϱ) is

$$(\varrho) = \frac{-\alpha}{2\pi . f^3};$$

α being the shortest distance between p and the surface, and f representing the distance $p,d\sigma$. This expression will give an idea of the rapidity with which (ϱ) decreases, in passing from the infinitely small portion of the surface in the immediate vicinity of p, to any other part situate at a finite distance from it, and when substituted in the above written value of V, gives, by supposing α to vanish,

$$V = \overline{V}.$$

It is also evident, that the function V, determined by the above written formula, will have no singular values within the surface under consideration.

What was before proved, for the space within any closed surface, may likewise be shown to hold good, for that exterior to a number of closed surfaces, of any forms whatever, provided we introduce the condition, that V'

shall be equal to *zero* at an infinite distance from these surfaces. For, conceive a surface at an infinite distance from those under consideration; then, what we have before said, may be applied to the whole space within the infinite surface and exterior to the others; consequently

$$(5'.) \qquad 4\pi V' = \int d\sigma \overline{V'} \left(\frac{\overline{dU}}{dw}\right);$$

where the sign of integration must extend over all the surfaces, (seeing that the part due to the infinite surface is destroyed by the condition, that V' is there equal to *zero*) and dw must evidently be measured from the surfaces, into the exterior space to which V' now belongs.

The form of the equation (6) remains also unaltered, and

$$(6'.) \qquad V' = -\int (\varrho)\, d\sigma \overline{V'};$$

the sign of integration extending over all the surfaces, and (ϱ) being the density of the electricity which would be induced on each of the bodies, in presence of each other, supposing they all communicated with the earth by means of infinitely thin conducting wires.

6.

Let now A be any closed surface, conducting electricity perfectly, and p a point within it, in which a given quantity of electricity Q is concentrated, and suppose this to induce an electrical state in A; then will V, the value of the potential function arising from the surface only, at any other point p', also within it, be such a function of the co-ordinates p and p', that we may change the co-ordinates of p, into those of p', and reciprocally, without altering its value. Or, in other words, the value of the potential function at p', due to the surface alone, when the inducing electricity Q is concentrated in p, is equal to that which would have place at p, if the same electricity Q were concentrated in p'.

For, in consequence of the equilibrium at the surface, we have evidently, in the first case, when the inducing electricity is concentrated in p,

$$\frac{Q}{\overline{r}} + \overline{V} = \beta;$$

$\overline{r}$ being the distance between p and $d\sigma'$ an element of the surface A, and β a constant quantity dependant upon the quantity of electricity originally placed on A. Now the value of V at p' is

$$V = -\int (\varrho')\, d\sigma' \overline{V},$$

by what has been shown (art. 5); (ϱ') being, as in that article, the density of the electricity which would be induced on the element $d\sigma'$ by a unit of electricity in p', if the surface A were put in communication with the earth. This equation gives

$$\delta V = -\int(\varrho')\, d\sigma'\, \delta\overline{V} = 0;$$

since $\delta\overline{V} = -\delta\frac{Q}{r} = 0$: the symbol δ referring to the co-ordinates x, y, z, of p. But we know that $0 = \delta' V$; where δ' refers in a similar way to the co-ordinates x', y', z', of p' only. Hence we have simultaneously

$$0 = \delta V \quad \text{and} \quad 0 = \delta' V;$$

where it must be remarked, that the function V has no singular values, provided the points p and p' are both situate within the surface A. This being the case the first equation evidently gives (art. 5)

$$V = -\int(\varrho)\, d\sigma \overline{V};$$

$\overline{V}$ being what V would become, if the inducing point p were carried to $d\sigma$, p' remaining fixed. Where $\overline{V}$ is a function of x', y', z', and ξ, η, ζ, the co-ordinates of $d\sigma$, whereas (ϱ) is a function of x, y, z, ξ, η, ζ, independent of x', y', z'; hence by the second equation

$$0 = \delta' V = -\int(\varrho)\, d\sigma\, \delta'\overline{V},$$

which could not hold generally whatever might be the situation of p, unless we had

$$0 = \delta\overline{V};$$

where we must be cautious, not to confound the present value of $\overline{V}$, with that employed at the beginning of this article in proving the equation $0 = \delta V$, which last, having performed its office, will be no longer employed.

The equation $0 = \delta' V'$ gives in the same way

$$V = -\int(\varrho')\, d\sigma' \overline{\overline{V}};$$

$\overline{\overline{V}}$ being what $\overline{V}$ becomes by bringing the point p' to any other element $d\sigma'$ of the surface A. This substituted for $\overline{V}$, in the expression before given, there arises

$$V = +\iint(\varrho)(\varrho')\, d\sigma\, d\sigma' \overline{\overline{V}}:$$

in which double integral, the signs of integration, relative to each of the independent elements $d\sigma$ and $d\sigma'$, must extend over the whole surface.

If now, we represent by V', the value of the potential function at p arising from the surface A, when the electricity Q is concentrated in p', we

shall evidently have

$$V_1 = +\int(\varrho')(\varrho)\, d\sigma'\, d\sigma \overline{\overline{V}}_1.$$

where the order of integrations alone is changed, the limits remaining unaltered: $\overline{\overline{V}}_1$ being what V_1 would become, by first bringing the electrical point p' to the surface, and afterward the point p to which V_1 belongs. This being done, it is clear that $\overline{V'}$ and $\overline{\overline{V}}_1$ represent but one and the same quantity, seeing that each of them serves to express the value of the potential function, at any point of the surface A, arising from the surface itself, when the electricity is induced upon it by the action of an electrified point, situate in any other point of the same surface, and hence we have evidently

$$V = V_1,$$

as was asserted at the commencement of this article.

It is evident from art. 5, that our preceding arguments will be equally applicable to the space exterior to the surfaces of any number of conducting bodies, provided we introduce the condition, that the potential function V, belonging to this space, shall be equal to *zero*, when either p or p' shall remove to an infinite distance from these bodies, which condition will evidently be satisfied, provided all the bodies are originally in a natural state. Supposing this therefore to be the case, we see that the potential function belonging to any point p' of the exterior space, arising from the electricity induced on the surfaces of any number of conducting bodies, by an electrified point in p, is equal to that which would have place at p, if the electrified point were removed to p'.

What has been just advanced, being perfectly independent of the number and magnitude of the conducting bodies, may be applied to the case of an infinite number of particles, in each of which the fluid may move freely, but which are so constituted that it cannot pass from one to another. This is what is always supposed to take place in the theory of magnetism, and the present article will be found of great use to us when in the sequel we come to treat of that theory.

7.

These things being established with respect to electrified surfaces; the general theory of the relations between the density of the electric fluid and

the corresponding potential functions, when the electricity is disseminated through the interior of solid bodies as well as over their surfaces, will very readily flow from what has been proved (art. 1).

For this let V' represent the value of the potential function at a point p', within a solid body of any form, arising from the whole of the electric fluid contained in it, and ϱ' be the density of the electricity in its interior; ϱ' being a function of the three rectangular coordinates x, y, z: then if ϱ be the density at the surface of the body, we shall have

$$V' = \int \frac{dx\,dy\,dz\,\varrho'}{r'} + \int \frac{d\sigma\varrho}{r};$$

r' being the distance between the point p' whose co-ordinates are x', y', z', and that whose co-ordinates are x, y, z, to which ϱ' belongs, also r the distance between p' and $d\sigma$, an element of the surface of the body: V' being evidently a function of x', y', z'. If now V be what V' becomes by changing x', y', z', into x, y, z, it is clear from (art. 1), that ϱ' will be given by

$$0 = 4\pi\varrho' + \delta V.$$

Substituting for ϱ', the value which results from this equation, in that immediately preceding we obtain

$$V' = -\int \frac{dx\,dy\,dz\,\delta V}{4\pi r'} + \int \frac{\varrho d\sigma}{r},$$

which, by means of the equation (3. art. 3), becomes

$$\int \frac{\varrho d\sigma}{r} = \frac{1}{4\pi}\left\{\int d\sigma \overline{V}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right) - \int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{d\overline{V}}{dw}\right)\right\};$$

the horizontal lines over the quantities, indicating that they belong to the surface itself.

Suppose $V_{,}$ to be the value of the potential function in the space exterior to the body, which, by (art. 5), will depend on the value of V at the surface only; and the equation (2. art. 3), applied to this exterior space, will give since $\delta V_{,} = 0$ and $\delta \frac{1}{r} = 0$,

$$\int d\sigma \overline{V}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw'}\right) = \int d\sigma \overline{V}_{,}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw'}\right) = \int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{\overline{dV_{,}}}{dw'}\right);$$

where dw' is measured from the surface into the exterior space to which $V_{,}$

belongs, as dw is, into the interior space. Consequently $dw = -dw'$, and therefore

$$\int d\sigma \overline{V}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right) = -\int d\sigma \overline{V}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw'}\right) = -\int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{\overline{dV_1}}{dw'}\right).$$

Hence the equation determining ϱ becomes, by substituting for $\int d\sigma \overline{V}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right)$ its value just given,

$$\int \frac{\varrho d\sigma}{r} = \frac{-1}{4\pi}\int \frac{d\sigma}{r}\left\{\left(\frac{\overline{dV}}{dw}\right) + \left(\frac{\overline{dV_1}}{dw'}\right)\right\},$$

an equation which could not subsist generally, unless

$$(7.) \qquad \varrho = \frac{-1}{4\pi}\left\{\frac{\overline{dV}}{dw} + \frac{\overline{dV_1}}{dw'}\right\}.$$

Thus the whole difficulty is reduced to finding the value V_1 of the potential function exterior to the body.

Although we have considered only one body, it is clear that the same theory is applicable to any number of bodies, and that the values of ϱ and ϱ' will be given by precisely the same formulae, however great that number may be: V_1 being the exterior potential function common to all the bodies.

In case the bodies under consideration are all perfect conductors, we have seen (art. 1), that the whole of the electricity will be carried to their surfaces, and therefore there is here no place for the application of the theory contained in this article; but as there are probably no perfectly conducting bodies in nature, this theory becomes indispensably necessary, if we would investigate the electrical phenomena in all their generality.

Having in this, and the preceding articles, laid down the most general principles of the electrical theory, we shall in what follows apply these principles to more special cases; and the necessity of confining this Essay within a moderate extent, will compel us to limit ourselves to a brief examination of the more interesting phenomena.

(To be cont.)

23.

Geometrisches.

(Von Herrn *W. Winkhaus*, cand. math. zu Halver bei Arnsberg.)

---

1. Alle Kugelzonen verschiedener Kugeln von gleicher Höhe h und gleichem mittlern Radius $= \varrho$ haben den gleichen Cubik-Inhalt $J = h(\varrho^2 - \frac{1}{12}h^2)\pi$ (wo $\pi = 3{,}14\ldots$).

2. Analoge Formeln giebt es für alle Körper, welche durch Umdrehung der Curven ersten und zweiten Grades um eine feste Axe entstehen. Die parallelen Grundflächen, welche übrigens auch beliebige Figuren sein können, seien Kreise mit den Radien R und r, die übrige Bezeichnung sei wie oben, so hat man, wenn die Drehung um die gröfsere Axe geschieht, für die Zone

Des Paraboloïds $J = \pi h\varrho^2 = \frac{1}{2}\pi h(R^2 + r^2)$,

Des Ellipsoïds $J = \pi h\left(\varrho^2 - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{12}h^2\right) = \frac{1}{2}\pi h\left(R^2 + r^2 + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{3}h^2\right)$

oder $J = \frac{1}{6}\pi\cdot\frac{a}{b}\sqrt{(4\varrho^2 - 2R^2 - 2r^2)\cdot(4\varrho^2 + R^2 + r^2)}$,

Des Hyperboloïds $J = \pi h\left(\varrho^2 + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{12}h^2\right)$,

oder $J = \frac{1}{2}(\pi h)\left(R^2 + r^2 - \frac{1}{3}h^2\cdot\frac{b^2}{a^2}\right)$,

oder $J = \frac{1}{6}\pi\cdot\frac{a}{b}\sqrt{(-4\varrho^2 + 2R^2 + 2r^2)\cdot(4\varrho^2 + R^2 + r^2)}$;

und für die Zone

des Kegels $J = \frac{1}{2}\pi h[R^2 + r^2 - \frac{1}{3}(R-r)^2] = \pi h[Rr + \frac{1}{3}(R-r)^2]$.

Die Formel $J = \pi h[\varrho^2 + \frac{1}{12}(R-r)^2]$, welche zur Berechnung die bequemste und den ersten Formeln analog ist, hat *Koppe* im 18. Bande dieses Journals mitgetheilt; und zwar in der Form, wie sie für den Obelisken pafst.

Im September 1851.

24.
Aufgabe.

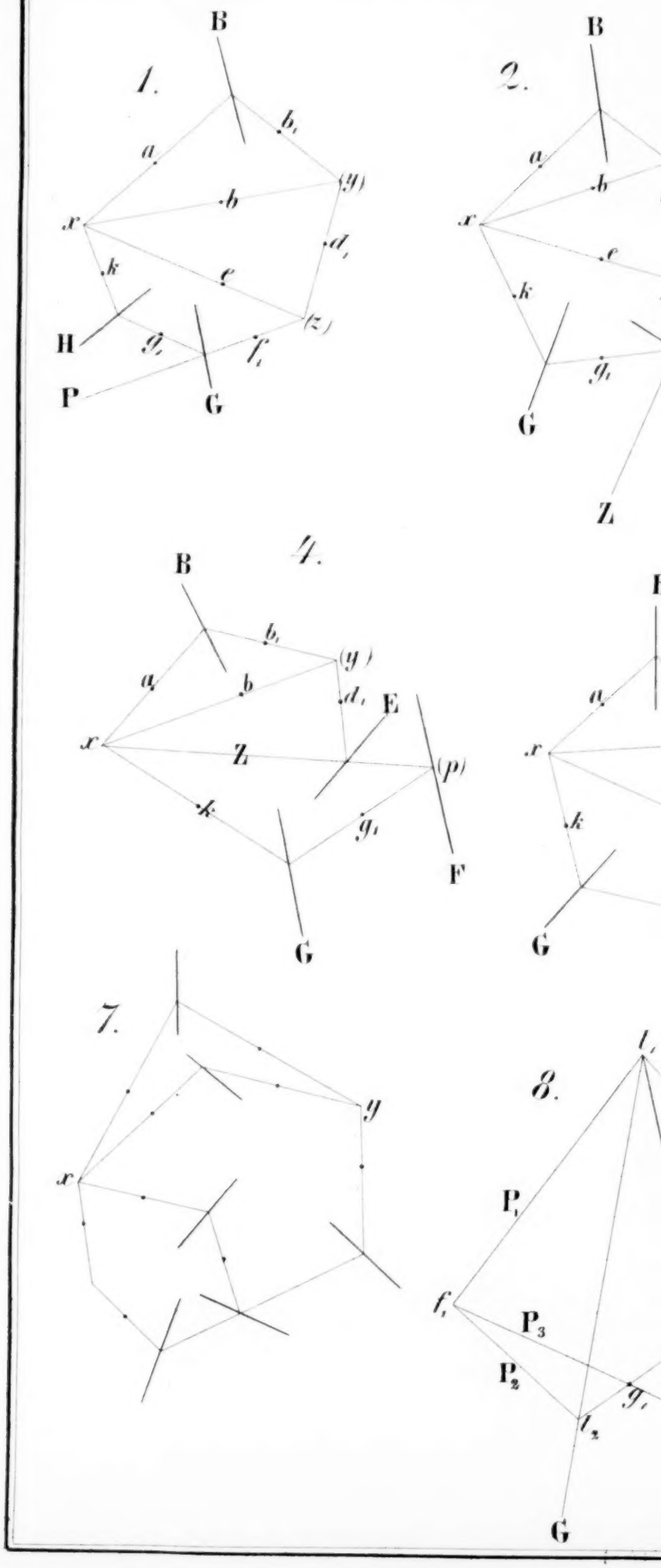
Der Beweis der beiden Sätze, dafs jede ganze Zahl aus drei Trigonalzahlen, so wie aus zwei Trigonalzahlen und dem Vierfachen einer dritten durch die Addition sich zusammensetzen läfst, das heifst, dafs, wenn man

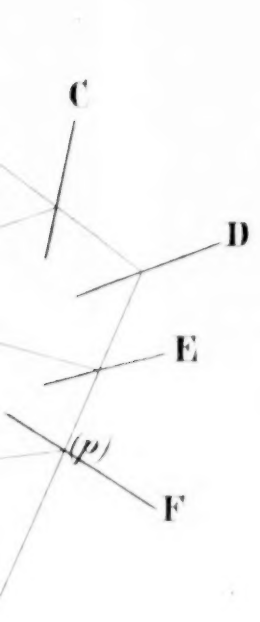
$$\tfrac{1}{2}w\,(w+1)=a,\quad \tfrac{1}{2}x\,(x+1)=b,\quad \tfrac{1}{2}y\,(y+1)=c \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{2}w_1(w_1+1)=a_1,\quad \tfrac{1}{2}x_1(x_1+1)=b_1,\quad \tfrac{1}{2}y_1(y_1+1)=c_1$$

setzt, für jede ganze Zahl z immer ganzzahlige Werthe 0, 1, 2, 3, 4, ... von w, x, y und w_1, x_1, y_1 Statt finden, für welche

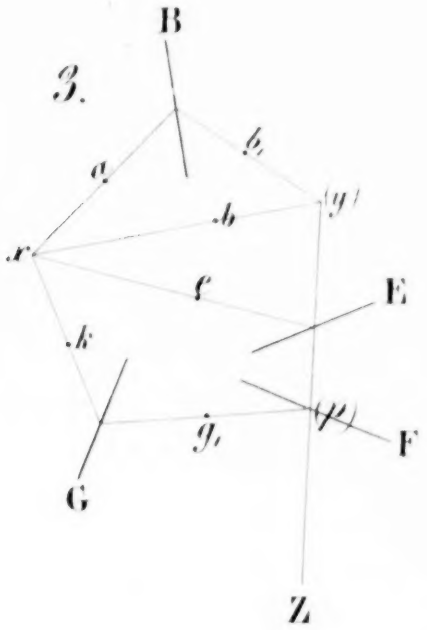
$$z = a+b+c, \text{ so wie}$$
$$z = a_1+b_1+4c_1$$

ist, läfst sich zwar vollständig auf den Satz gründen, dafs jede Zahl, welche nicht eine der Formen $4k$ und $8k+7$ hat, aus weniger als vier Quadraten ohne gemeinschaftlichen Theiler durch die Addition zusammengesetzt werden kann: indessen wäre vielleicht auch noch ein directerer Beweis der beiden Sätze zu wünschen, und die Aufgabe wäre, einen solchen Beweis zu geben.

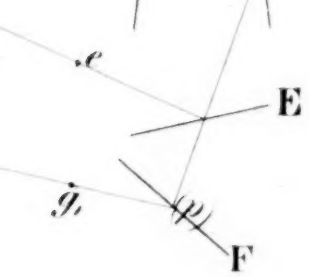

1.
B
b_1
a_1
(y)
b
x
d_1
k
e
(z)
H
g_1
f_1
P
G
2.
B
a_1
b
x
e
k
g_1
G
Z
4.
B
b_1
(y)
a_1
b
d_1
E
x
Z
(p)
k
g_1
F
G
7.
y
x
8.
l_1
P_1
f_1
P_3
P_2
g_1
l_2
G


C
D
E
(p)
F

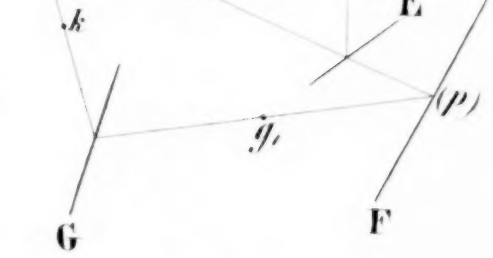
3.

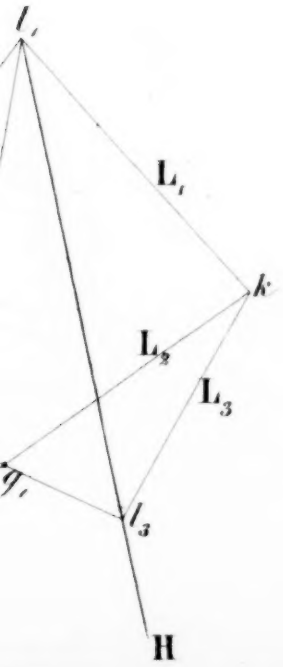

B
a
b
(y)
x
h
c
E
k
g
(p)
F
G
Z

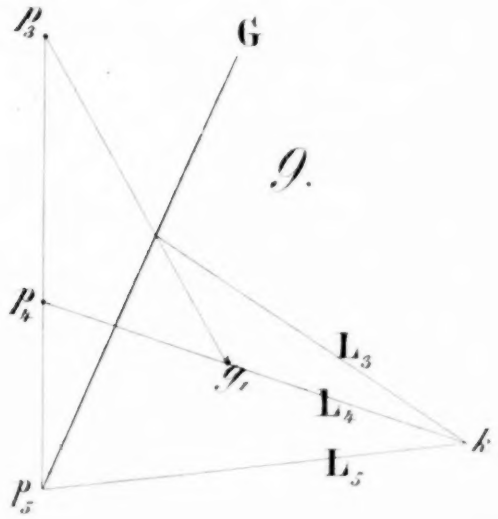
5.


B
C
D
b
c
E
g
(p)
F

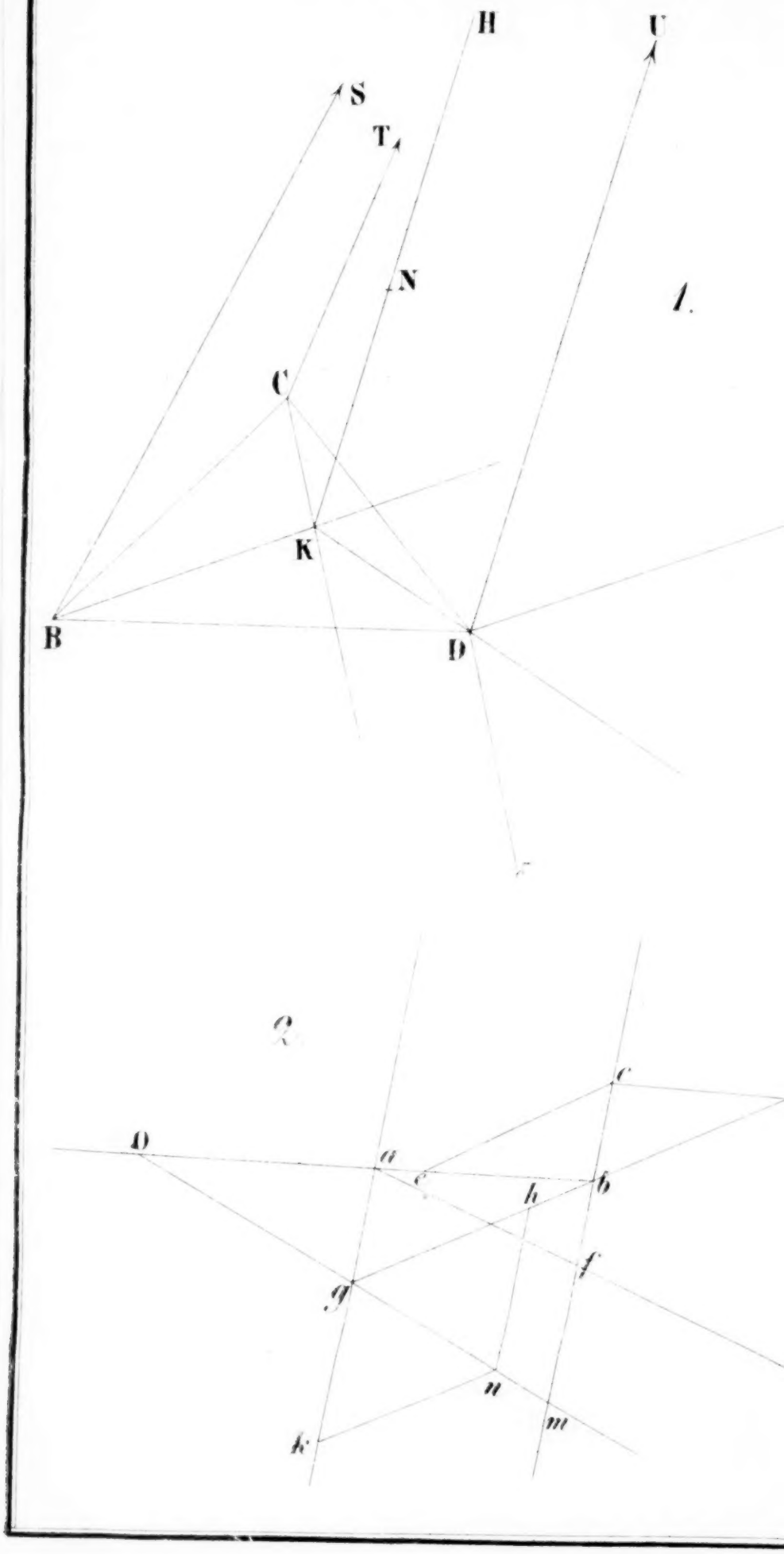
6.

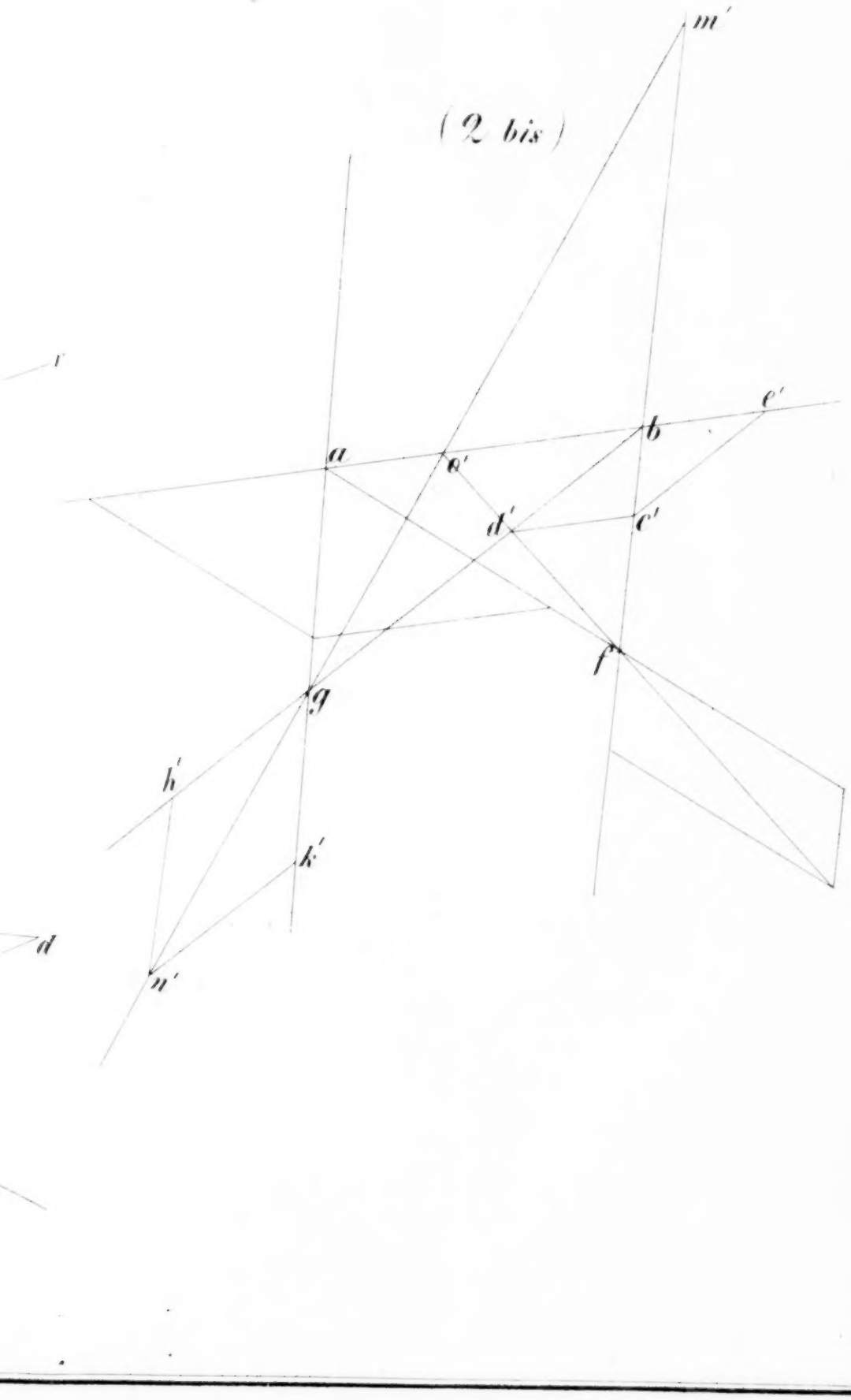

B
a
b
C
D
x
Z
c
E
k
g
(p)
G
F


l
L1
k
L2
L3
g
l3
H

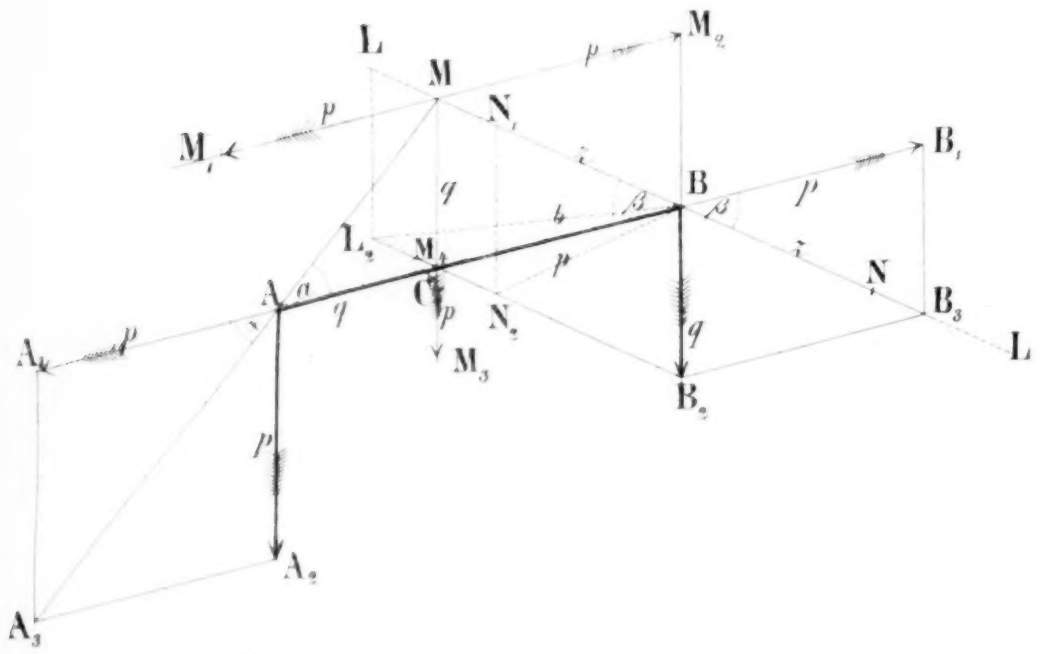

p3
G
p4
L3
g
L4
k
L5
p5

9.

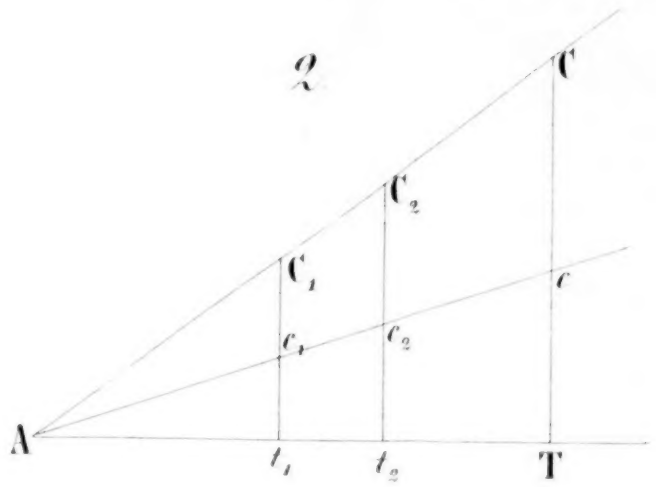

H
U
S
T
N
C
K
B
D
1.
2.
c
O
a
e
b
h
f
g
n
m
k


(2 bis)
m'
r
e'
b
a
c'
d'
e'
f'
g'
h'
k'
d
n'

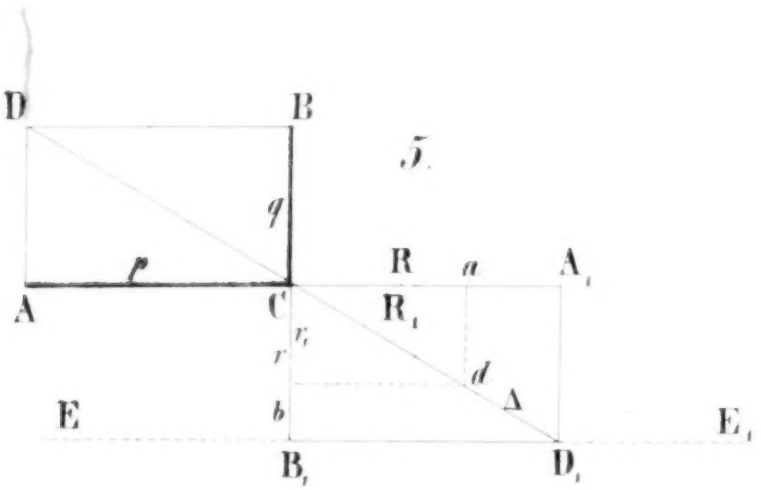
1.


L
M
M_2
M_1
N_1
B_1
B
L_2
M_4
A
C
N_2
M_3
B_2
B_3
N
L
A_1
A_2
A_3

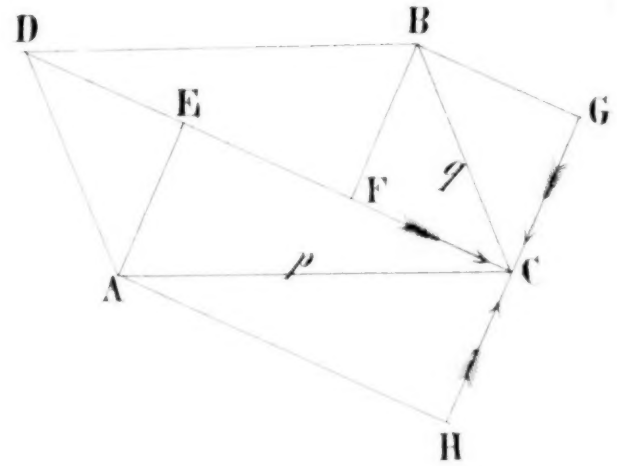
2.


C
C_2
C_1
c
c_1
c_2
A
t_1
t_2
T

5.

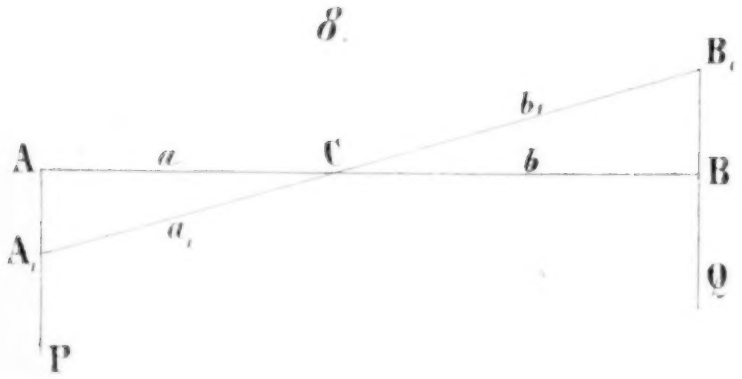

D
B
q
p
A
C
R
a
A_1
R_1
r_1
r
d
Δ
E
b
E_1
B_1
D_1

6.

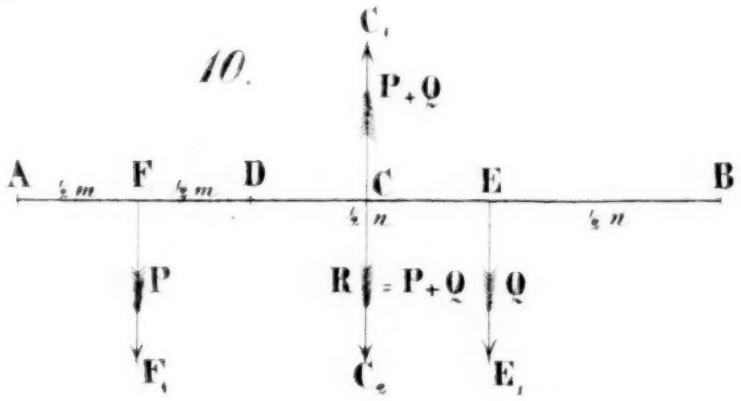

D
B
E
G
F
q
A
p
C
H

A

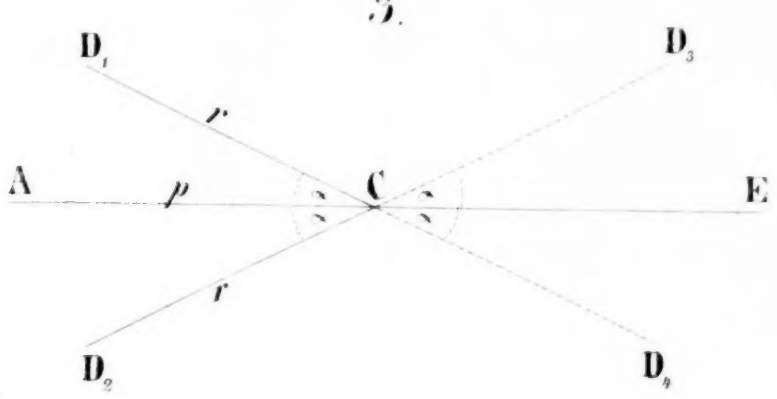
8.


B_1
b_1
A
a
C
b
B
A_1
a_1
Q
P

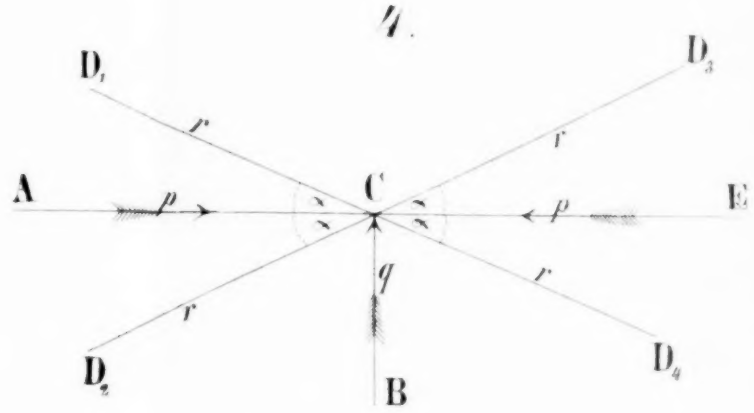
10.


C_1
P+Q
A
½ m
F
½ m
D
C
E
B
½ n
½ n
P
R = P+Q
Q
F_1
C_2
E_1

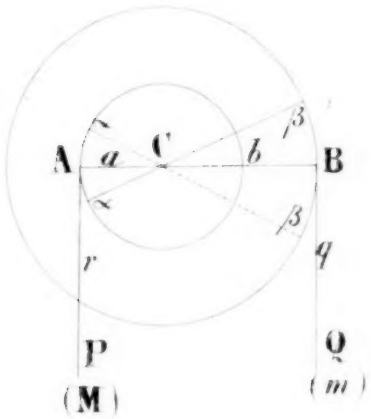
3.


D1
D3
r
A
p
C
E
r
D2
D4

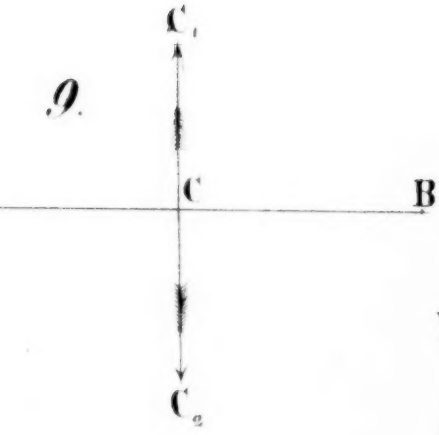
4.


D1
D3
r
r
A
p
C
p
E
q
r
r
D2
B
D4

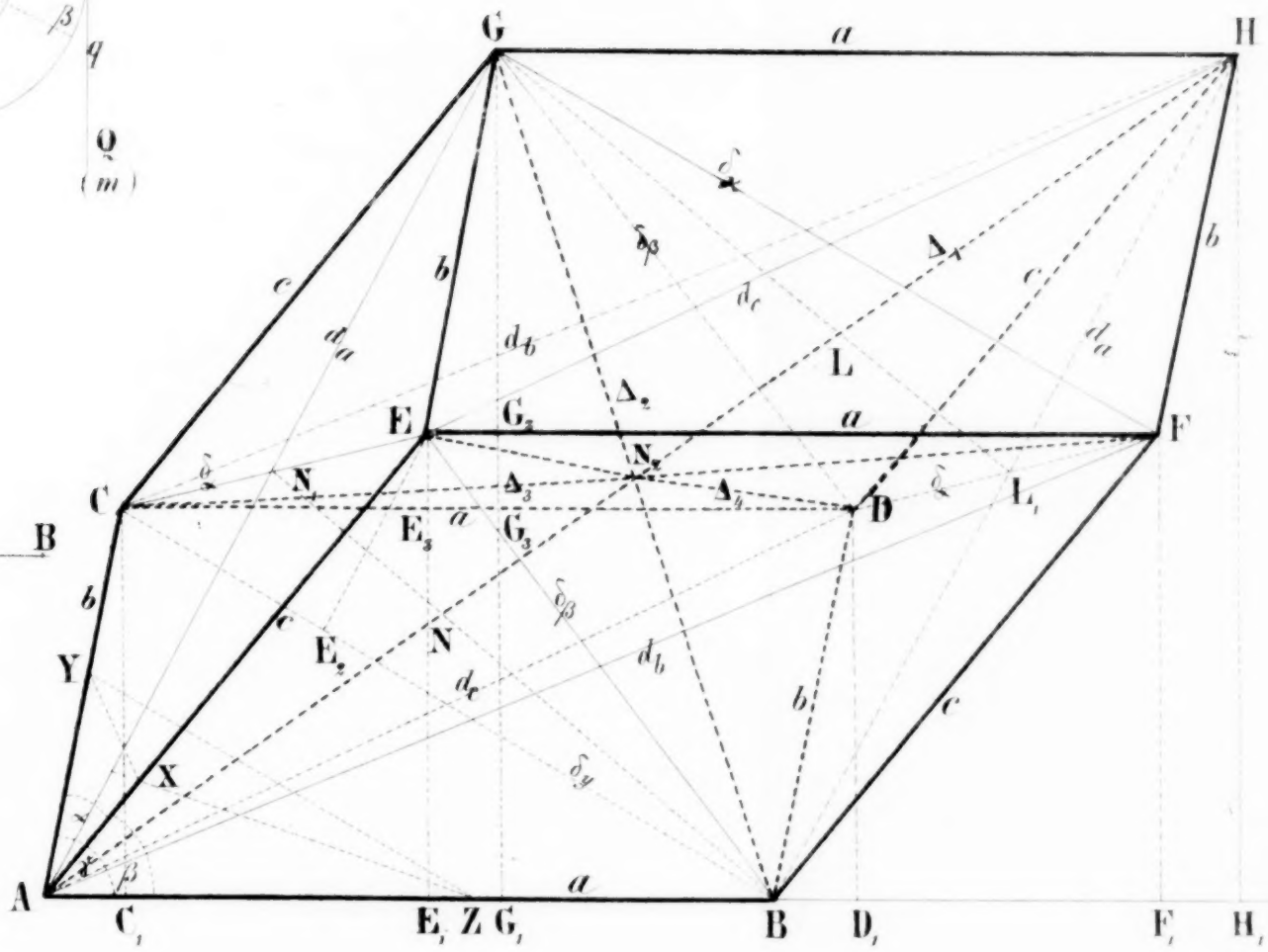
7.

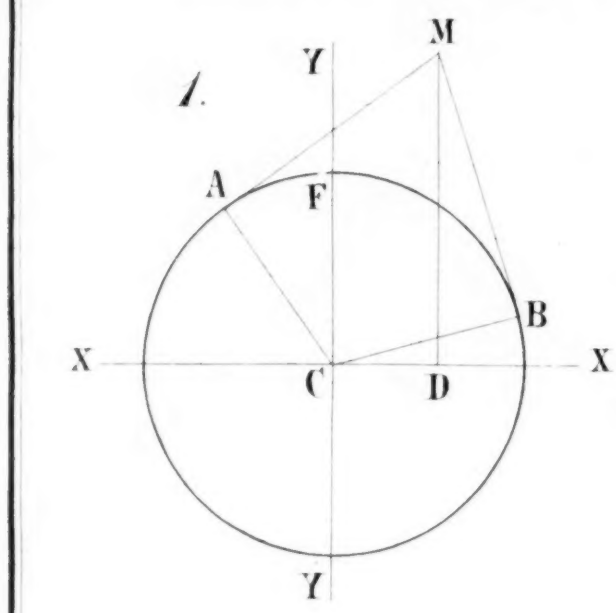

A
a
C
b
B
β
β
r
q
P
(M)
Q
(m)

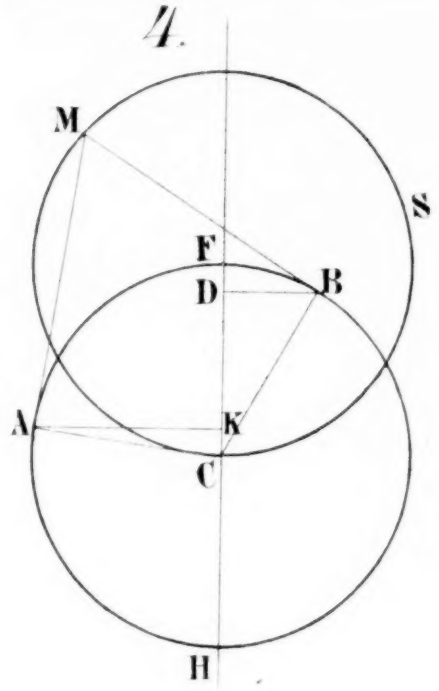
9.

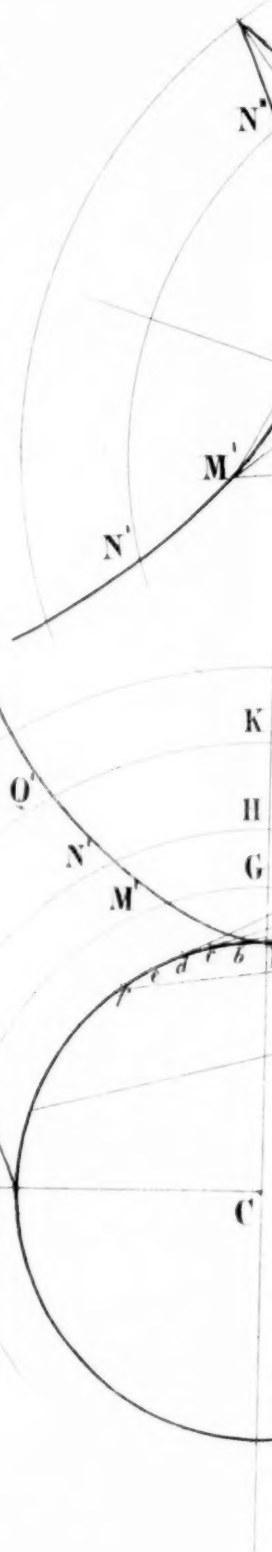

C1
C
B
C2

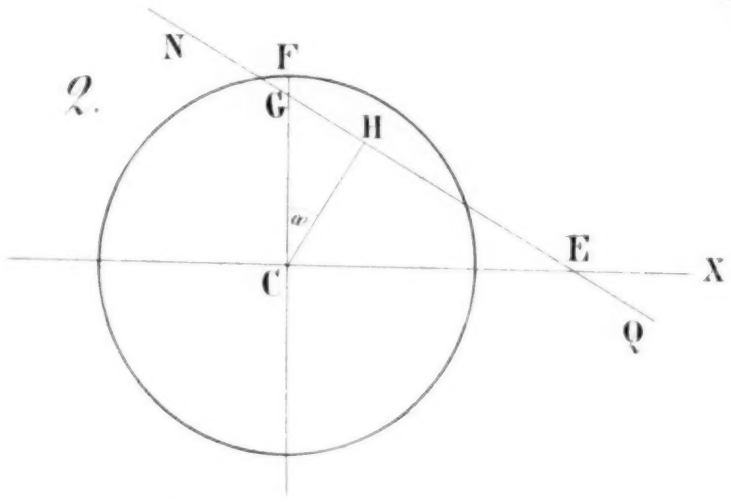
11.

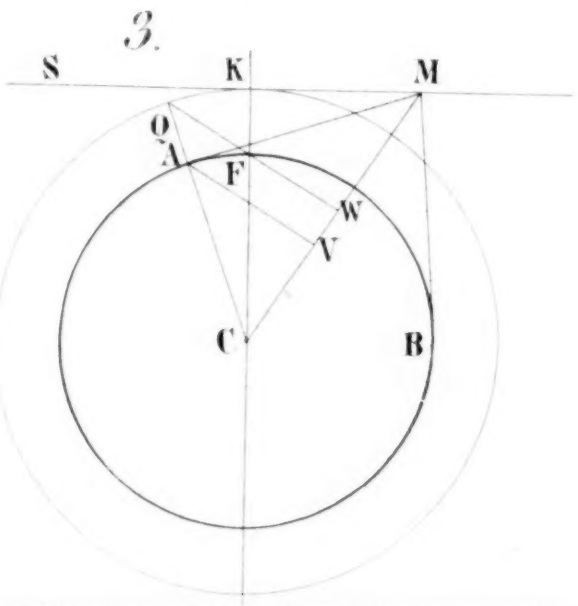

G
a
H
c
b
b
c
L
E
G2
a
F
C
N1
N2
D
L1
E3
a
G3
b
c
E2
N
Y
X
A
a
B
C1
E1
Z
G1
D1
F1
H1


1.
M
Y
A
F
B
X
X
C
D
Y

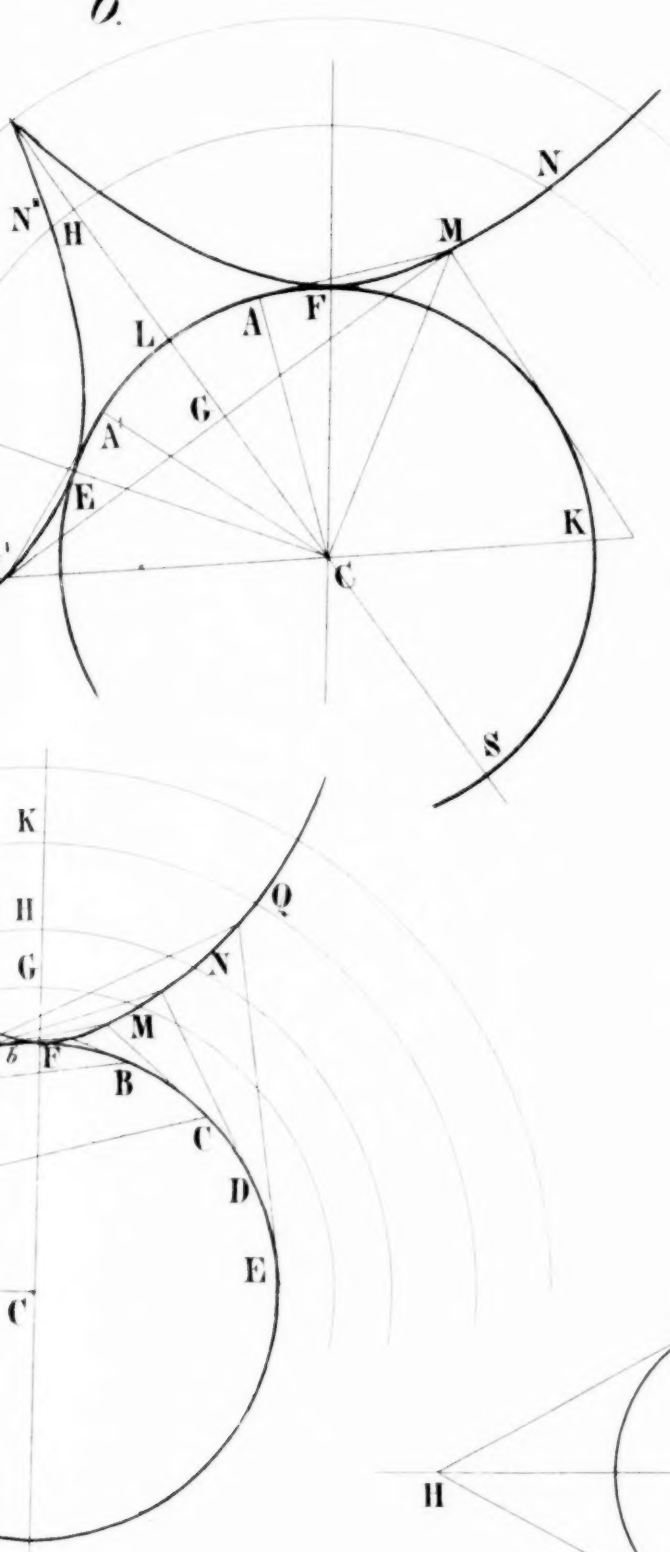

4.
M
S
F
D
B
A
K
C
H


N'
M'
N'
5.
K
Q'
H
N'
G
M'
Q'₁
N'₁
M'₁
K₁
H₁
G₁
C

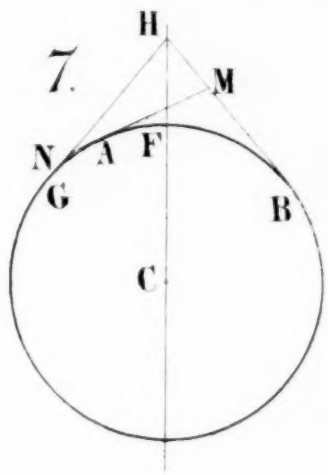

2.
N
F
G
H
a
C
E
X
Q


3.
S
K
M
Q
A
F
W
V
C
B

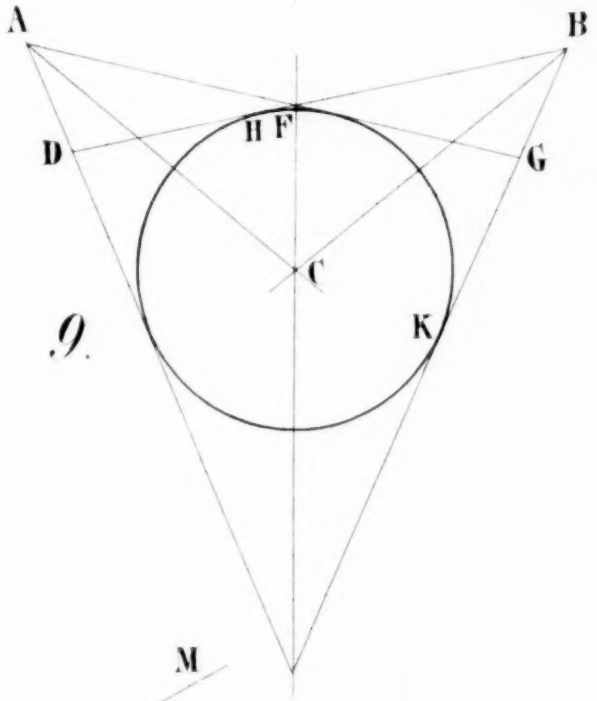
6.


N
N'
H
M
L
A
F
G
A'
E
K
C
S
K
H
G
Q
N
M
b
F
B
C
D
E
C

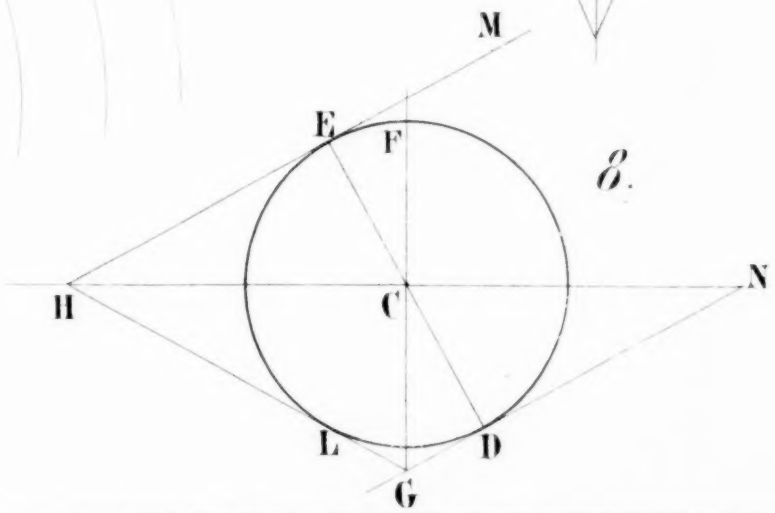
7.


H
M
N
A
F
G
B
C

9.


A
B
D
H F
G
C
K

8.


M
E
F
H
C
N
L
D
G